

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TEV,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XIII LIETUVOS 5–6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2011 09 24

1. Ant arklio Dominyko vieną šeštadienio rytą nusileido tiršto liūdesėlio migla, kai atlėkusi jo draugė guvioji kielė Kamilė ėmė nesustodama tarškėti, kad ne kiekvienas oi visai ne kiekvienas Skirsnemunės vaikelis pajėgtų be klaidų ir be skaičiuoklio tiksliai suskaičiuoti, kiek tiksliai yra pirmosios skaičių šimtinės skaičių nuo
 $1, 2, 3, \dots, 98, 99, 100,$
kurių skaitmenų suma nesidalija be liekanos nei iš 2, nei iš 5.

Arklys Dominykas nė nepajuto, kaip jis pats labai susikaupęs ėmėsi ieškoti to uždavinio atsakymo. Dominykas niekada nedarydavo klaidų, nors skaičiuodavo labai pamažu.

Kai arklys Dominykas pabaigs skaičiavimus, jis sužinos teisingą atsakymą. Koks yra tas teisingas atsakymas? Kiek gi yra tokių pirmosios šimtinės skaičių nuo 1 iki 100, kurių skaitmenų suma nesidalija be liekanos nei iš 2, nei iš 5?

2. Kiekvieną kartą, kai arklys Dominykas būdavo paėdęs ir traukdavo, klasiko žodžiais tariant, “kažką sunkaus pavalkiot”, jis visada, nesvarbu į kurią pusę beeitų, prieidavo vešlią kvadrato formos pievą ir džiugiai sužvengdavo. Po to sužvengimo toji kvadrato pieva vienu mirksniu virsdavo tokia stačiakampio formos pieva, kurios viena kraštinė pasidarydavo trečdaliu ilgesnė už buvusią kvadrato kraštinę, o kita, atvirkščiai, visada lygiai 30-čia metrų sutrumpėdavo.

Rožinė arklio Dominyko svajonė buvo kada nors prieiti tokią kvadrato formos pievą, kuriai ištiesai užtverti nesvarbu, ar prieš nusižvengimą, ar jau po nusižvengimo užtektų lygiai tokio paties ilgio tvoros.

Ar tai įmanoma? Jei tai įmanoma, tai koks tada būtų tokio kvadrato kraštinės ilgis ir koks tada būtų tokios tvoros ilgis?

3. Asiliukas Dainius buvo senas, ištikimas ir labai atsidavęs arklio Dominyko draugas ir visada nešdavo Dominykui kažkokių nematytų uždavinių, kurių iš pradžių Dominykas visai nesiverždavo spręsti. Bet ėmęs spręsti Dominykas labai pykdavo, jeigu jam nepasisekdavo jų nors kiek pabaigti.
Šiandien atėjęs asiliukas Dainius išsitraukė iš kišenės 16 sulipusių raidžių ir skaičių porų

$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3$ ir d_4

ir ėmė raginti Dominyką surašyti tas sulipusias poras po vieną į kiekvieną 4 x 4 lentelės langelį taip, kad ir kiekvienoje lentelės eilutėje, ir kiekviename tos lentelės stulpelyje po vieną kartą pasitaikytų ir visos 4 raidės

a, b, c ir d

ir visi keturi skaičiai

1, 2, 3 ir 4.

Dominykas nelabai tiki, kad tai gali pavykti, o asiliukas Dainius sako, kad tai turėtų pavykti jau vien dėlto, kad ta toji lentelė labai gražiai atrodytų – tik pagalvokite: jokioje eilutėje ir jokiame stulpelyje jokios raidės ir jokie skaičiai nesikartoja. Kuo baigsis šitie įrašinėjimai?

4. Kai Pempė Matilda būna gerai nusiteikusi, ji visada čiulba, kad yra arklio Dominyko teta, arba nežinia iš kur prasimano vis naujų kartais labai keistokų uždavinių. Tie Pempės Matildos uždaviniai paprastai yra pateikiami kaip kelių klausimų serija. Štai ir šiandien atlėkusi pempė jau nenori atstoti nuo Dominyko, stačiai neduoda jam ramybės vis klausinėdama:
 - a) Ar gali kokio nors natūrinio skaičiaus skaitmenų suma nesidalyti iš 6? Ar turėtumėte pempei pavyzdį?
 - b) Ar gali būti, kad 3 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių skaitmenų suma nei viena nesidalija be liekanos iš 6? Ar ir dabar turėtumėte pempei pavyzdį?
 - c) Ar gali būti, kad 6 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių skaitmenų suma nei viena nesidalija be liekanos iš 6? Negi rasite pempei jau trečią pavydį?
 - d) Ar pajėgtumėte teisingai išsiaiškinti, kiek apskritai daugiausiai yra iš eilės einančių natūraliųjų skaičių, kurių skaitmenų sumos nei viena nesidalija be liekanos iš 6?
5. Kairiajame apatiniame 5 x 5 lentos langelyje stovi šaškė. Arklys Dominykas ir Asiliukas Dainius pakaitomis perkėlinėja tą šaškę į kaimyninį pagal kraštinę langelį; pradeda visada Dominykas. Pralaimėjusiu Kielė Kamilė garsiai paskelbia tą, kuris perkelia šaškę į tokį laukelį, kuriame ta šaškė jau yra pabuvojusi. Ar gali kuris nors iš jų – arklys Dominykas arba Asiliukas Dainius – perkėlinėti šaškę taip, kad jis visada laimėtų, nors ir ką bedarytų kitas žaidėjas ir kaip jis tada turėtų perkėlinėti tą šaškę?

Š				

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TEV,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XIII LIETUVOS 7-8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Konkurso dalyvius sveikina Maria Falk de Losada,
Pasaulinės nacionalinių matematikos varžybų federacijos Prezidentė

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2011 09 24

1. Pempė Matilda iš kažkur (o iš kur – ji nė už ką nepasakys) atnešė triženklį skaičių, kielė Kamilė tuojau žaismingai perstatė vietomis jo vienetų ir dešimčių skaitmenis, o Asiliukas Dainius nieko nelaukdamas ir niekieno nepasiklausęs ėmė ir sudėjo abu tuos skaičius.

Arklys Dominykas paklausė, kokia gi yra ta suma yra?

Asiliukas Dainius staiga pasidarė labai paslaptingas ir tepasakė, kad tų skaičių suma turi 4 skaitmenis ir prasideda skaitmenimis 173.

Arklys Dominykas nusprendė surasti, koks galėtų būti tas paskutinis 4-tasis dar nežinomas tos sumos (vienetų) skaitmuo.

2. Guvioji Kielė Kamilė šimtamečio ažuolo viršūnėje rado senovinį pergamentą su tituliname puslapyje užrašytu šimtaženkliais skaičiumi. Jo pirmieji 49 skaitmenys buvo visi devynetai, 50-tojo skaitmens apskritai nesimatė, jis buvo visai išblukęs, toliau jame buvo dar 49 nuliai, o pats paskutinis to 100-ženklis skaitmuo buvo vėl devynetas.

Paskutinis rankraščio sakiny iškilmingai bylojo, kad tas visas 100-ženklis skaičius pats garantuotai yra kažinkokio įžymaus natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Arklys Dominykas žino, kad Kielė Kamilė neatstos nuo jo tol, kol jis jai smulkiai tiksliai ir labai suprantamai neišguldys, koks gi yra tas 50-tasis išblukęs to 100-ženklis skaičiaus skaitmuo ir kol jis jai neparodys, keliaženklis ir kokio skaičiaus kvadratas yra tas pradinis skaičius.

3. Asiliukas Dainius ir arklys Dominykas dalyvavo Pasagų mėtymo į taikinį konkurse, o guvioji Kielė Kamilė su Pempė Matilda vedė visą apskaitą su statistika.

Pempė Matilda kruopščiai ir tiksliai užfiksavo, kad jie abu – Dominykas ir Dainius metė pasagą po 5 kartus ir pataikė į tokius apskritimus:

10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3 ir 2.

Guvioji Kielė Kamilė žavėjosi tuo, kad po pirmųjų 3-jų metimų abu ištikimi kovotojai turėjo vienodą pirmųjų 3-jų pataikymų sumą, o Pempė Matilda buvo labai nustebusi, kai sužinojo, kad per paskutinius 3 metimus asiliukas Dainius sumetė 3 kartus daugiau taškų negu Dominykas.

Atskrido Atamanas Šarka, pasiklausė pasiklausė ir labai aiškiai, nors ir tyliai pasakė, kad čia viskas teisingai, kad nėra čia ko triukšmauti ir pasiūlė visiems pro šalį skrendantiems susigaudyti, kiek gi iš tikro taškų trečiuoju metimu pelnė Dainius ir kiek gi trečiuoju metimu uždirbo patsai Dominykas?

4. Pempė Matilda nuo pat ryto juokino Arklį Dominyką su Asiliuku Dainiumi tarškėdama tokį labai keistą ir niekur neregėtą jiems klausimą: ar gali trikampio ir keturkampio susikirtimas būti aštuoniakampis?

Pasijuokę jie nutarė tuojau surasti pademonstruoti Matildai griežtą samprotavimą, kad to niekaip negali būti.

Kokiais juokais čia baigsis tie jų įrodinėjimai?

5. Kairiajame apatiniame 7 x 7 lentos langelyje stovi šaškė.

Š							

Arkllys Dominykas ir Asiliukas Dainius pakaitomis labai atsargiai vis perkėlinėja tą šaškę į kaimyninį pagal kraštinę langelį; pradeda Dominykas. Pralaimėjusiu Kielė Kamilė garsiai paskelbia tą, kuris perkelia šaškę į tokį laukelį, kuriame ta šaškė jau yra pabuvojusi. Ar gali kuris nors iš jų – arkllys Dominykas arba Asiliukas Dainius – perkėlinėti šaškę taip, kad jis visada laimėtų, nors ir ką bedarytų kitas žaidėjas ir kaip jis tada turėtų tą šaškę perkėlinėti?

6. Arkllys Dominykas ir asiliukas Dainius ištisas tris dienas nuo ryto iki vakaro ginčijosi, ar gali kada nors įvykti toks ledo ritulio turnyras, kuriame kiekviena komanda privalėtų po vieną kartą sužaisti su kiekviena kita komanda, kuriame dalyvautų daugiau negu 5 komandos ir kuriame visos komandos turnyrui pasibaigus būtų surinkusios skirtingą taškų skaičių.

Negana to, dar būtinai reikia, kad paskutinę vietą tame turnyre užėmusi komanda būtų laimėjusi ne mažiau kaip 25 % žaistų rungtynių, o antrą vietą užėmusi komanda, atvirkščiai, ne daugiau kaip 40 % visų žaistų rungtynių.

Tame ledo ritulio, kuris Dominykui visada atrodė labai keistas sportas, turnyre už pergalę komandai skiriami 2 taškai, už lygiąsias – po vieną tašką, o už pralaimėtas rungtynes įskaitoma 0 taškų.

Ar tikrai įmanomas toks turnyras? Ar tik nebus čia ko pripainiota? Aišku, kad be užpildytos turnyrinės lentelės mums pas juos nėra ko rodytis.