

XI LIETUVOS 5–6 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2009 09 12

Uždavinių sąlygos

1. Kiekvienais metais tėtė Karlas savo numylėtajam kantriam išmintingajam Buratinui jo gimtadienio proga skiria aritmetinių kišenpinigių. Tų kišenpinigių suma nustatoma pagal nepajudinamus dėsniumus ir, skaičiuojant ją kukliais centais, visada yra lygi paties Buratino ir jo kilniojo globėjo metų sandaugai. Šiais metais Buratinas gavo 7,81 Lt. Kokią sumą Buratinas yra gavęs pernai?

2. Reto atokvėpio minutėmis nemarusis Brėmų kvartetas - Kanopa, Rainys, Reksas ir Petuchauskas, padalijęs šachmatų lentą į keturias lygias dalis, žiūrėjęs vieną jos ketvirtį, kuris yra 16 laukelių – 8 baltus ir 8 juodus pakaitomis einančius laukelius turintis 4×4 kvadratas.

Zigzago formos kelią, sudarytą iš keturių baltų langelių, po vieną iš kiekvienos eilutės, išsidėsčiusį taip, kad šie keturi langeliai iš eilės *sueina kampais*, jie vadina *Brėmų taku*. Susitarę, koks iš keturių baltų *sueinančių kampais* laukelių sudarytas ketvertas yra *Brėmų takas*, jie tuojau ėmė energingai ginčytis, kiek iš viso tokių *Brėmų takų* galima rasti tame nedideliame 4×4 kvadrato. Metraštininkas Rolandas liudija, kad jie iki išnaktų taip ir nesutarė, kiekgi tų *Brėmų takų* tame nedideliame 4×4 kvadrato yra iš viso.

Ar jūs pajėgtumėte nemariajam Brėmų kvartetui suprantamai išaiškinti, kiek tokių *Brėmų takų* iš viso yra tame (nedideliame) 4×4 kvadrato?

3. Dabar jau mažai kas beprisimena, kad prieš išgarsėdami nemariojo kvarteto nariai kasdienę duoną užsidirbdavo liedami prakaitą miestų saugos srityje. Metraštininkas Rolandas patvirtino, kad vienas kuris nors iš jų kas naktį prieš aušrą apsiūkindavo Brėmų miestą, žiūrėdamas, ar viskas ten yra gerai. Rolandas tiksliai matė, kad Kanopa apsiūkino Brėmų miestą dvigubai tiek kartų, kiek Rainys, trigubai tiek kartų, kiek Reksas, ir net keturis kartus tiek, kiek Petuchauskas. Visi kartu jie apsuko apie Brėmus 400 ratų. Kiek kartų apsiūkino Brėmus Kanopa?

4. Vakar Brėmuose baigėsi Nacijų taurės futbolo turnyras, kuriame kiekviena komanda sužaidė po vienas rungtynes su kiekviena kita komanda. Žaidžiama buvo pagal tokias sveiką azartą ugdančias taisykles: laimėjęsioji rungtynes komanda pelnydavo net 3 taškus, sužaidusiai lygiosiomis komandai buvo skiriamas 1 taškas, o pralaimėjęsioji komanda negaudavo nieko. Pasibaigus turnyru paaškėjo, kad visos komandos kartu sukaupė 21 tašką. Turnyro trubadūras Petuchauskas išsisas 3 dienas manė, kad težinant tik tiek, kiek čia pasakyta, neįmanoma nei susivokti:

(A) kiek iš viso komandų dalyvavo toje Nacijų taurėje, nei nustatyti,

(B) kiek taškų pasibaigus turnyru buvo sukaupusi kiekviena iš dalyvavusiųjų Nacijų taurėje komandų yra visiškai neįmanoma.

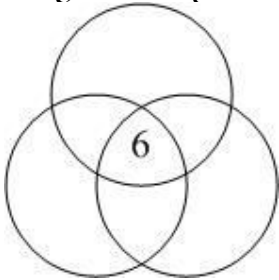
Ar teisingai išsisas 3 dienas mąstė turnyro trubadūras Petuchauskas?

Kiek komandų dalyvavo Nacijų taurės futbolo turnyre?

Kiek taškų pasibaigus turnyru buvo sukaupusi kiekviena iš dalyvavusių komandų?

Atsakymą paaškinkite.

5. Kitą kartą nemariojo kvarteto nariai, įsitaisę kempinge netoli gimtųjų Brėmų ir pamatę 3 persidengiančius skritulius, sudarančius net 7 atskiras sritis, sumanė jose įkurdinti visus 7 skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7, skiriant po vieną skaičių, jų žodžiais sakant, vienai *sričiai valdyti*. Jie dar nusprendė, kad centrinę sritį, bendrą visiems apskritimams, visada turi valdyti 6-etas (žr. brėžinį),



kaip turįs daugiausiai daliklių. Jie labai tikėjosi, kad tuos skaičius visoms toms 7 sritims valdyti galima paskirti *demokratiškai*, arba taip, kad kiekviename iš tų 3 skritulių visų jo sritis valdančių skaičių suma visada būtų vienoda (ir lygi T).

Viskas būtų labai gerai, tik jiems niekaip nesiseka surasti nors vieno tokio *demokratiško valdymo pavyzdžio*. Padėkite jiems ir

(A) pavaizduokite jiems vieną tokio *demokratinio valdymo pavyzdį* ir prireikus nurodykite jiems ir atitinkamą tos sumos T reikšmę;

(B) surašykite jiems visas tokias įmanomas T reikšmes (kiekvieną su savo atitinkamu *demokratinio valdymo pavyzdžiu*).

Organizuoja
Vilniaus universitetas

Remia
UAB "AFFECTO LIETUVA"
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,
Leidykla TEV,
Leidykla TYTO ALBA,
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS,
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

XI LIETUVOS 7–8 KLASIŲ MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2009 09 12

Uždavinių sąlygos

1. Nemarusis Brėmų kvartetas – Kanopa, Rainys, Reksas ir Petuchauskas – tapę absoliučiais smūginės muzikos klasikais, niekada daugiau nebegalėdavo pasirodyti visi keturi kartu. Kartais jie dar *pasirodydavo trise* – tai būdavo laikoma neapsakomos pagarbos ženklu ir visi tokie pasirodymai ir tik tokie buvo vadinami *brėminėmis ekstazijomis*. Kai Brėmų mieste šią vasarą vyko Pasaulinė matprotų siauta, nemarusis kvartetas skėlė keliolika išskirtinių *brėminių ekstazijų*. Miesto siela Rolandas, dalyvavęs visose tose ekstazijose, paliudijo, kad maestro Petuchauskas pasirodė dažniau nei visi kiti – 8 kartus, o maestro Kanopa – rečiau nei likę trys, tik 5 kartus. Rolandas dar be žodžių leido suprasti, kad to, kas dabar čia yra pasakyta, pakanka, kad gudresnis ar labiau susikaupiantis protas suvoktų, kelias apskritai *brėmines ekstazijas* toje Pasaulinėje matprotų siautoje Brėmene skėlė nemarusis kvartetas. O jūs ar galėtumėte pasakyti, kelias *brėmines ekstazijas* toje Pasaulinėje matprotų siautoje Brėmuose skėlė muzikantai?

2. Brėmų elitinės lygos futbolo varžytuvėse dalyvauja tik 5 komandos. Tose varžytuvėse kiekviena iš penkių komandų sužaidė po vienas rungtynes su kiekviena kita iš likusių keturių komandų. Kiekvienai komandai buvo skiriami 3 taškai už laimėtas rungtynes, 1 taškas buvo duodamas už lygiosiomis sužaistas rungtynes ir nebuvo skiriama taškų už pralaimėtas rungtynes. Pasibaigus turnyrui komandų rikiuotė buvo tokia:

Prerijų liūtai 10 taškų, Stepių buivolai 9 taškai, Himalajų anūkai 4, Taikieji buldogai 3 ir Vėjo malūnai 1 taškas.

Pagrindinis turnyro balsas maestro Petuchauskas tvirtino, kad vien pažiūrėjus į tuos rezultatus jau galima padaryti tokias kertines išvalgas ir paaiškinti ne tik:

(A) kelios rungtynės tame turnyre baigėsi lygiosiomis, bet net ir tiksliai nustatyti

(B) kaip Himalajų anūkai sužaidė su visomis kitomis likusiomis komandomis.

Mes tvirtai tikime, kad ir Jūs turėdami laiko irgi galėtumėte visa tai ir tiksliai nustatyti, ir suvokiamai paaiškinti.

3. Tylomis žiemos naktimis, kai išsiskirsto paskutiniai negausūs praeiviai, amžinasis miesto sergėtojas tylusis Rolandas ramiai nulipa centre nuo pjedestalo ir su maestro Rainiu dėlioja tokį, kaip jie vadina, *tylųjį Brėmų pasiansasą*. Tam reikalingos 7 skirtingos kortelės su skaičiais 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 - kiekvienoje kortelėje įrašytas vienintelis skaičius. Rolandas su Rainiu tada pakaitomis ima po kortelę, paprastai pirmasis kortelę ima Rolandas. Tas, kuris anksčiau negu jo varžovas iš savo turimų kortelių (nebūtinai visų) sudaro natūralųjį skaičių, kuris be liekanos dalijasi iš 17, laimi. Portale ihaha.com įsiplieskė nuožmūs ginčai apie tai, ar gali kuris nors iš jų visada imti korteles taip, kad vis tiek laimėtų, kad ir ką bedarytų jo varžovas. Atsirado vienas gudročius, vardu Reksas, kuris išsijuosęs tvirtino, kad:

(A) jeigu jau kuris nors iš jų ir gali visada laimėti, kad ir ko besigriebtų kitas žaidėjas, tai tuo laiminčiuoju yra tas, kuris pradeda.

Ar teisus gudročius Reksas? Atsakymą pagrįskite.

(B) Tai ar gali kuris nors iš jų visada laimėti, kad ir ko besigriebtų jo varžovas?

Kaip čia yra? Atsakymą, suprantama, irgi pagrįskite.

4. Į šį kryžiaskaitį (nepainioti su kryžiažodžiu) maestro Rainys nori žūt būt įrašyti 4 dviženklis skaičius – 2 horizontaliai ir 2 vertikalčiai. Jis yra gerai įsikalęs sau į galvą, kad joks dviženklis skaičius neprasideda nuliu. Jis pasiryžęs šiuos keturis dviženklis skaičius įrašyti pasirinktą tvarka, paaiškindamas, kodėl šis kryžiaskaitis turi vienintelį sprendinį.

1.	2.
3.	

Horizontaliai: 1. Skaičiaus 3 kartotinis. 3. Trigubas pirminis skaičius

Vertikalčiai: 1. Skaičiaus 25 kartotinis. 2. Tikslusis kvadratas

5. Pradėjęs nuo lygiakraščio trikampio ABC , kurio kraštinės ilgis yra 2 metrai, jo išorėje ant visų jo kraštinių AB , BC ir CA maestro Reksas bematant nubraižė kvadratus $ABPQ$, $BCTU$, $CARS$. Atėjęs kitas maestro, Kanopa, švaistėsi tvirtinimais, kad ne Rekso nosiai suskaičiuoti šešiakampio $PQRSTU$ plotą. Prišokęs jau trečias maestro Petuchauskas puolė padėti Reksui ir per dvi valandas juodu gavo teisingą atsakymą.

Kam lygus šešiakampio $PQRSTU$ plotas?