Atranka į 2017 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Pirmoji diena, 2017 03 25

1. Trikampio ABC kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai K ir N, kad $KB = KN$. Kampo ACB pusiaukampinė kerta trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą taškuose C ir R. Iš taško R į tiesę AB nuleistas statmuo kerta atkarpą BN taške D. Įrodykite, kad taškai A, K, D ir N priklauso vienam apskritimui.

2. Aibę, sudarytą iš $m \geqslant 2$ natūraliųjų skaičių, vadiname *paprasta*, jei bet kurie du tos aibės elementai yra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių n, kad bet kuriai paprastai aibei, kuri yra aibės $S = \{1, 2, \ldots, 2017\}$ poaibis ir kuri turi lygiai n elementų, visada priklausytų bent vienas pirminis skaičius.

3. Du daugianarius su sveikaisiais koeficientais $A(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ir $B(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ (čia $m, n \geqslant 0$ ir $a_n, b_m \neq 0$) vadiname *panašiaisiais*, jei $m = n$ ir jei rinkiniuose $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ir $b_0, b_1, \ldots, b_n$ kiekvienas sveikasis skaičius sutinkamas po tiek pat kartų.

   Daugianariai su sveikaisiais koeficientais $P(x)$ ir $Q(x)$ yra panašieji ir $P(16) = 3^{2012}$.

   a) Įrodykite, kad $Q(3^{2012}) \neq 0$.

   b) Raskite mažiausią galimą $|Q(3^{2012})|$ reikšmę.

Antroji diena, 2017 03 26

4. Duoti pirminiai skaičiai $p > q$ ir natūralieji skaičiai k, ℓ. Aibę A sudaro visi natūralieji skaičiai n, su kuriais $p^k q^\ell n$ dalijasi iš $p + n$.
   a) Įrodykite, kad $|A| \geqslant 1$.
   b) Įrodykite, kad $|A| \geqslant k\ell + k + \ell$.
   c) Įrodykite, kad $|A| \leqslant k\ell + k + 2\ell - 1$.
   d) Ar egzistuoja pirminių skaičių pora $p > q$, su kuria $|A| = 127$, kai $k = \ell = 10$?

   (Čia $|A|$ žymi aibės A elementų skaičių.)

5. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms lygybė
$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy$$
   galioja su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.
   (Čia $\mathbb{R}$ žymi visų realiųjų skaičių aibę.)

6. Duotas natūralusis skaičius $n \geqslant 4$. Taisyklingasis n-kampis padalijamas į trikampius, nubrėžiant $n-3$ nesikertančias (neturinčias bendrų vidinių taškų) įstrižaines. Kiek daugiausiai tarpusavyje nelygių trikampių gali būti tarp gautųjų?