Atranka į 2015 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Pirmoji diena, 2015 04 11

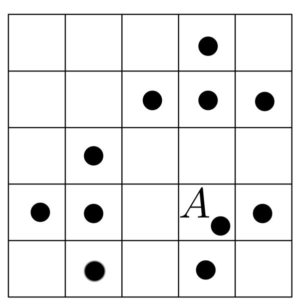
1. Duoti du besiliečiantys apskritimai α ir β. Bendra apskritimų liestinė liečia α ir β atitinkamai (skirtinguose) taškuose A ir B. Atkarpa AP yra apskritimo α skersmuo, o tiesė, einanti per tašką P, liečia β taške Q. Įrodykite, kad $AP = PQ$.

2. Raskite visus lygties

$$a! \cdot b! = a! + b! + c!$$

natūraliuosius sprendinius (a, b, c).
(Čia $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, pavyzdžiui, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.)

3. Duota 5×5 lentelė su šviesti galinčiais langeliais. Liečiant langelius, galima keisti jų būseną: šviečiančius užgesinti, o nešviečiančius vėl uždegti. Palietus bet kurį langelį, pakinta ne tik jo, bet ir visų gretimų (bendrą kraštinę su juo turinčių) langelių būsenos. Pradžioje visi lentelės langeliai užgesinti, o Hermina nori, kad lentelėje šviestų lygiai vienas langelis. Pavyzdžiui, jei Hermina kokia nors tvarka paliestų paveikslėlyje pažymėtus langelius, tai ji uždegtų vienintelį langelį A, o visi kiti liktų užgesinti.



a) Raskite dar keturis langelius, kurie gali tapti tuo vieninteliu pabaigoje šviečiančiu langeliu.
b) Įrodykite, kad joks iš lentelės likusių 20 langelių negali tapti tuo vieninteliu pabaigoje šviečiančiu langeliu.

Antroji diena, 2015 04 12

4. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad
$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy$$
su bet kokiais realiaisiais skaičiais x ir y.
(Čia $\mathbb{R}$ žymi visų realiųjų skaičių aibę.)

5. Aibės A ir B yra natūraliųjų skaičių aibės $\{1, 2, 3, \dots\}$ poaibiai, pasižymintys tokiomis dviem savybėmis:
   a) Bet kurių dviejų skirtingų aibės A elementų x ir y suma $x + y$ priklauso aibei B.
   b) Bet kurių dviejų skirtingų aibės B elementų z ir t santykis $\frac{z}{t}$ (didesnį skaičių z dalijant iš mažesnio t) priklauso aibei A.

   Kiek daugiausiai elementų gali turėti aibių sąjunga $A \cup B$?
   (Aibę $A \cup B$ sudaro elementai, priklausantys bent vienai iš dviejų aibių A ir B.)

6. Duotas lygiagretainis $ABCD$ su centru S. Trikampio ABD įbrėžtinis apskritimas su centru O liečia BD taške T. Įrodykite, kad tiesės OS ir CT yra lygiagrečios.