

**Atranka į 2013 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas**

**Pirmoji diena, 2013 04 06**

1. Stačiakampio  $ABCD$  įstrižainės kertasi taške  $O$ . Taškas  $E$  priklauso tiesei  $AB$  ir  $AE = AO$  (čia taškas  $A$  yra tarp taškų  $E$  ir  $B$ ). Taškas  $F$  priklauso tiesei  $DB$  ir  $BF = BO$  (čia  $B$  yra tarp  $F$  ir  $D$ ). Trikampis  $EFC$  yra lygiakraštis. Įrodykite, kad tiesė  $EO$  yra statmena tiesei  $DB$ .
2. Natūralieji skaičiai  $a, b, c$  ir  $d$  yra tokie, kad  $ac + bd$  dalijasi iš  $a^2 + b^2$ . Ar gali skaičių  $a^2 + b^2$  ir  $c^2 + d^2$  didžiausias bendras daliklis būti lygus:
  - a) 1?
  - b) 3?
  - c) 74?
3. Kai kuriuose lentos  $12 \times 12$  langeliuose tupi po vabalą. Du vabalus vadinsime *kaimynais*, jeigu jie yra langeliuose, turinčiuose bendrą kraštinę arba bendrą kampą. Kiek daugiausiai vabalų gali tupėti ant lentos, jei kiekvienas vabalas turi lygiai vieną kaimyną?

**Antroji diena, 2013 04 07**

4. Raskite visus tokius daugianarius  $P(x)$  su realiaisiais koeficientais, kad jei  $P(m)$  yra sveikasis skaičius, tai ir  $m$  yra sveikasis skaičius.
5. Iš smailiojo trikampio  $ABC$  (kuriame  $AB > AC$ ) pusiauakraštinių susikirtimo taško į kraštinę  $BC$  nuleisto statmens pagrindas yra taškas  $D$ . Raskite santykį  $BD : BA$ , jei  $AD$  yra kampo  $BAC$  pusiauokampinė.
6. Ketvertą  $(x, y, z, n)$ , kur  $x, y, z$  yra teigiami realieji skaičiai, o  $n$  – natūralusis skaičius, vadinsime *tobulu*, jei

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$$

ir  $\sqrt{x+n} + \sqrt{y+n} + \sqrt{z+n}$  yra sveikasis skaičius.

- a) Raskite bent vieną tobulą ketvertą  $(x, y, z, n)$ , kuriame  $n > 2013$ .
- b) Raskite visus tobulus ketvertus  $(x, y, z, n)$ .