Lietuvos mokinių atranka į Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

2011 m.

1. Kiekvienas šachmatų turnyro dalyvis su kiekvienu kitu sužaidė po dvi partijas: vieną žaisdamas baltosiomis figūromis, o kitą – juodosiomis. Už turnyre laimėtą partiją skiriamas taškas, už sužaistą lygiosiomis – pusė taško, o už pralaimėtą – 0 taškų. Pasibaigus turnyrui, visi šachmatininkai turėjo po lygiai taškų.
   a) Įrodykite, kad kurie nors du turnyro dalyviai po tiek pat partijų sužaidė lygiosiomis.
   b) Įrodykite, kad kurie nors du turnyro dalyviai pralošė po tiek pat partijų, žaisdami baltosiomis figūromis.

2. Neneigiami realieji skaičiai $x_1, x_2, ..., x_{100}, x_{101}, x_{102}$, kur $x_{101} = x_1$ ir $x_{102} = x_2$, tenkina nelygybes
$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leqslant 1 \text{ su kiekvienu } i = 1, 2, ..., 100.$$
Raskite didžiausią galimą reiškinio
$$x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + ... + x_{99}x_{101} + x_{100}x_{102}$$
reikšmę.

3. Smailiojo trikampio ABC pusiaukampinės kertasi taške I, o aukštinės – taške H. Tegul M yra apie trikampį apibrėžto apskritimo trumpesniojo lanko AC vidurio taškas. Raskite kampą ABC, jei yra žinoma, kad $MI = MH$.

4. Skirtingi natūralieji skaičiai $s_1, s_2, ..., s_n$ tenkina lygybę
$$\left(1 - \frac{1}{s_1}\right)\left(1 - \frac{1}{s_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{s_n}\right) = \frac{51}{2010}.$$
Kokia yra mažiausia galima n reikšmė?

5. Taškai A_0, B_0, C_0 dalija pusiau atitinkamai trikampio ABC kraštines BC, CA, AB, o taškai A_1, B_1, C_1 dalija pusiau (pagal ilgį) atitinkamai laužtes BAC, CBA, ACB. Įrodykite, kad tiesės A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 kertasi viename taške.

6. Tegul $m \geqslant 2$ ir n yra natūralieji skaičiai. Aibę $S(m, n)$ sudaro visi daugianariai $P(x)$, kurių koeficientai priklauso aibei $\{0, 1, 2, ..., m^2 - 1\}$, tenkinantys sąlygą $P(m) = n$. Raskite aibės $S(m, n)$ elementų skaičių, kai
   a) $n = 10m$;
   b) $n = m^2$;
   c) n yra bet koks natūralusis skaičius.