ALYTAUS APSKRITIES XX KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Druskininkai, 2016 m. gruodžio 2 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1. Penkiuose krepšeliuose buvo po tam tikrą skaičių grybų. Iš pradžių Agnė paėmė penktadalį grybų iš pirmo krepšelio ir sudėjo juos į antrą krepšelį. Tada penktadalį antro krepšelio grybų ji perkėlė į trečią krepšelį ir t. t. Pagaliau penktadalį penkto krepšelio grybų Agnė perkėlė į pirmą krepšelį. Dabar visuose krepšeliuose grybų pasidarė po lygiai. Kiek grybų buvo krepšeliuose?

Sprendimas. Tegu x_1, x_2, x_3, x_4 ir x_5 yra grybų skaičius atitinkamai pirmame, antrame, trečiame, ketvirtame ir penktame krepšelyje.

Po Agnės atliktų veiksmų grybų skaičius antrame krepšelyje pasidarė

$$0{,}8(x_2+0{,}2x_1), \tag{1}$$

trečiame krepšelyje –

$$0{,}8(x_3+0{,}2(x_2+0{,}2x_1)), \tag{2}$$

ketvirtame –

$$0{,}8(x_4+0{,}2(x_3+0{,}2(x_2+0{,}2x_1))), \tag{3}$$

penktame –

$$0{,}8(x_5+0{,}2(x_4+0{,}2(x_3+0{,}2(x_2+0{,}2x_1)))), \tag{4}$$

o pirmame krepšelyje –

$$0{,}8x_1+0{,}2(x_5+0{,}2(x_4+0{,}2(x_3+0{,}2(x_2+0{,}2x_1)))). \tag{5}$$

Visi skaičiai, užrašyti (1) – (5) formulėmis, yra (pagal sąlygą) lygūs.

Pažymėkime $a=x_2+0{,}2x_1.$ Tada iš (1) ir (2) skaičių lygybės gauname, kad $x_3+0{,}2a=a,$ o iš čia – $x_3=0{,}8a.$

Sugretinę (1) ir (3) skaičius, gauname:

$$x_4+0{,}2(0{,}8a+0{,}2a)=a \Rightarrow x_4=0{,}8a.$$

Analogiškai iš (1) ir (4) gauname, kad $x_5=0{,}8a,$ o tada iš (1) ir (5) gauname:

$$0{,}8x_1+0{,}2a=0{,}8a \Rightarrow x_1=0{,}75a.$$

Pagaliau iš lygybės $a=x_2+0{,}2x_1$ gauname, kad $x_2=0{,}85a.$

Vadinasi, grybų skaičiai užrašomi tokiomis formulėmis:

$$x_1=0{,}75a,\quad x_2=0{,}85a,\quad x_3=0{,}8a,\quad x_4=0{,}8a,\quad x_5=0{,}8a.$$

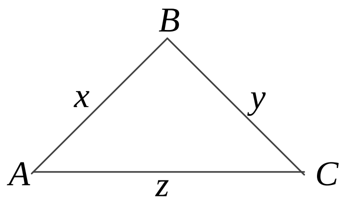
Kadangi $0{,}75=\frac{3}{4},\ \ 0{,}85=\frac{17}{20},\ \ 0{,}8=\frac{4}{5},$ skaičius a turi būti skaičiaus 20 kartotinis, t. y. $a=20k,\ \ k=1, 2, 3, \ldots.$ Todėl

$$x_1=15k,\quad x_2=17k,\quad x_3=16k,\quad x_4=16k,\quad x_5=16k,\quad k=1, 2, 3, \ldots.$$

Ats.: $15k$, $17k$, $16k$, $16k$, $16k$; $k \in \mathrm{N}$.

2. Trys dviratininkai vienu metu pradeda važiuoti uždaru maršrutu *ABCA*, kurį sudaro tiesaus kelio atkarpos *AB*, *BC* ir *CA*. Kiekvienoje atkarpoje visų trijų dviratininkų greitis yra pastovus, bet skirtingas. Pirmojo dviratininko greitis atkarpoje *AB* lygus 12 km/h, atkarpoje *BC* – 10 km/h, o atkarpoje *CA* – 15 km/h. Antrojo dviratininko greitis atkarpose *AB*, *BC* ir *CA* yra atitinkamai 15 km/h, 15 km/h ir 10 km/h, o trečiojo – 10, 20 ir 12 kilometrų per valandą. Kokiu kampu susikerta tiesaus kelio atkarpos *AB* ir *BC*, jei žinoma, kad visi trys dviratininkai kartu finišavo taške *A*?

Sprendimas. Tegu x yra atkarpos AB, y – atkarpos BC ir z – atkarpos CA ilgis (kilometrais). Tada $\frac{x}{12}+\frac{y}{10}+\frac{z}{15}$ yra pirmojo dviratininko, $\frac{x}{15}+\frac{y}{15}+\frac{z}{10}$ – antro, o $\frac{x}{10}+\frac{y}{20}+\frac{z}{12}$ – trečio dviratininko sugaištas laikas. Pagal sąlygą,



$$\frac{x}{12}+\frac{y}{10}+\frac{z}{15}=\frac{x}{15}+\frac{y}{15}+\frac{z}{10}=\frac{x}{10}+\frac{y}{20}+\frac{z}{12}.$$

Nagrinėdami lygčių sistemą, gausime:

$$\begin{cases}\frac{x}{12}+\frac{y}{10}+\frac{z}{15}=\frac{x}{15}+\frac{y}{15}+\frac{z}{10},\\ \frac{x}{12}+\frac{y}{10}+\frac{z}{15}=\frac{x}{10}+\frac{y}{20}+\frac{z}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+6y+4z=4x+4y+6z,\\ 5x+6y+4z=6x+3y+5z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=2z,\\ -x+3y=z\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=0{,}6z,\ \ x=0{,}8z.$$

Kadangi $x^2+y^2=(0{,}8z)^2+(0{,}6z)^2=z^2,$ trikampis ABC yra statusis; $\angle B=90°$.

Ats.: 90°.

3. Raskite visas sveikųjų skaičių poras (x; y), kurioms esant galioja lygybė

$$x^3+3x^2y-4y^3=100.$$

Sprendimas. Kadangi

$$x^3+3x^2y-4y^3=(x^3-y^3)+3y(x^2-y^2)=(x-y)(x^2+4xy+4y^2)=(x-y)(x+2y)^2,$$

lygtis tampa tokia:

$$(x-y)(x+2y)^2=100.$$

Sveikiesiems sprendiniams rasti išspręskime šias lygčių sistemas:

1) $\begin{cases}x-y=1,\\ x+2y=\pm10;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=4,\\ x+2y=\pm5;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x-y=25,\\ x+2y=\pm2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y=100,\\ x+2y=\pm1.\end{cases}$

Iš pirmos sistemos gauname porą (4; 3), iš antros – porą (1; –3), iš trečios – porą (16; –9), o iš ketvirtos – porą (67; –33).

Ats.: (4; 3), (1; –3), (16; –9), (67; –33).

4. Didesnių už 5 skirtingų pirminių skaičių $p_1,\ p_2, ..., \ p_n$ kvadratų suma dalijasi iš 6. Įrodykite, kad tada ir skaičius n dalijasi iš 6.

Įrodymas. Pagal sąlygą, yra toks natūralusis skaičius k, kuriam esant galioja lygybė

$$p_1^2+p_2^2+...+p_n^2=6k.$$

Tada

$$(p_1^2+p_2^2+...+p_n^2)-n=(p_1^2-1)+(p_2^2-1)+...+(p_n^2-1)=$$
$$=(p_1-1)(p_1+1)+(p_2-1)(p_2+1)+...+(p_n-1)(p_n+1).$$

Skaičiai p_i-1 ir p_i+1, $i=1,2,...,n,$ yra lyginiai, todėl kiekviena sandauga $(p_i-1)(p_i+1)$ dalijasi iš 2. Be to, vienas iš skaičių p_i-1 ir p_i+1 dalijasi iš 3. Vadinasi, kiekvienas reiškinio

$$(p_1-1)(p_1+1)+(p_2-1)(p_2+1)+...+(p_n-1)(p_n+1)$$

dėmuo dalijasi iš 6. Todėl iš lygybės

$$(p_1-1)(p_1+1)+(p_2-1)(p_2+1)+...+(p_n-1)(p_n+1)=6k-n$$

išplaukia, kad n dalijasi iš 6.

5. Gimnazistas Jonas lentoje užrašė savo sugalvotą skaičių *A*, tarp kurio skaitmenų nėra nulio, ir skaičių *B*, gautą iš *A*, nubraukus vieną jo skaitmenį. Sudėjęs *A* ir *B*, gavo 2016. Tada jo klasės draugė Agnė užrašė mažesnį už *A* skaičių *C*, taip pat neturintį nė vieno nulio, ir skaičių *D*, gautą iš *C*, nubraukus vieną jo skaitmenį. Sudėjusi *C* ir *D*, gavo 2017. Raskite Jono sugalvotą skaičių *A*.

Sprendimas. Aišku, kad tiek skaičiaus *A*, tiek skaičiaus *C* pirmas skaitmuo yra 1. Be to, abu skaičiai keturženkliai. Tegu $C=\overline{1xyz}.$ Jei Agnė būtų nubraukusi pirmą, antrą arba trečią skaitmenį, skaičiaus *D* vienetų skaitmuo būtų *z*. Todėl *C* ir *D* suma būtų lyginis skaičius. Vadinasi, Agnė nubraukė vienetų skaitmenį *z* ir gavo skaičių $D=\overline{1xy}.$

Kadangi $C=\overline{1xy}\cdot 10+z=10D+z,$ gauname lygtį $(10D+z)+D=2017$. Spręsdami gauname:

$$11D+z=2017,$$
$$11D+z=11\cdot 183+4,$$
$$11(D-183)+(z-4)=0.$$

Taigi $D=183,$ $z=4$ ir $C=1834$.

Kadangi $A>C,$

$$B=2016-A=2017-(A+1)<2017-C=183.$$

Tai reiškia, kad Jonas nubraukė skaičiaus *A* antrą skaitmenį.

Tarę, kad $A=\overline{1xyz},$ gautume, kad $B=\overline{1yz}.$ O tada

$$\overline{1xyz}+\overline{1yz}=2016,$$
$$(10+x)\cdot 100+(10y+z)+100+(10y+z)=2016,$$
$$(11+x)\cdot 100+2(10y+z)=2016.$$

Jei $x=8,$ tai $2(10y+z)=116 \Rightarrow 10y+z=58 \Rightarrow y=5, z=8.$

Jei $x=9,$ tai $2(10y+z)=16 \Rightarrow 10y+z=8 \Rightarrow y=0, z=8.$

Taigi $A=1858$.

Ats.: 1858.

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+2y+1=0, \\ y^2+2z+1=0, \\ z^2+2x+1=0. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudėję visas tris lygtis, gausime lygtį

$$x^2+y^2+z^2+2y+2z+2x+3=0,$$

o iš jos lygtį

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=0,$$

turinčią vienintelį sprendinį (–1; –1; –1).

Ats.: (–1; –1; –1).

7. Įrašius nulį tarp natūraliojo skaičiaus vienetų ir dešimčių skaitmens, gaunamas 9 kartus didesnis skaičius. Koks yra tas skaičius?

Sprendimas. Tegu $\overline{axy}$ yra ieškomas skaičius; čia *x* ir *y* yra skaitmenys, o *a* –natūralusis skaičius (galbūt, dviženklis ar net vienaženklis). Pagal sąlygą,

$$\overline{ax0y}=9\cdot\overline{axy}.$$

Kadangi $\overline{axy}=100a+10x+y$ ir $\overline{ax0y}=1000a+100x+y,$ gauname lygtį

$$1000a + 100x + y = 9(100a + 10x + y),$$

o iš jos – lygtį

$$100a + 10x = 8y.$$

Aišku, kad $0 \le 8y \le 72$. Vadinasi, negali būti $a \ge 1$. Kitaip sakant, ieškomas skaičius yra dviženklis skaičius $\overline{xy}$.

Iš lygties $10x = 8y$ gauname vienintelį sprendinį: $x = 4, \ \ y = 5$.

Taigi ieškomas skaičius yra 45.

Ats.: 45.

8. Skaičius a yra lygties $x^3 - 12x + 8 = 0$ sprendinys. Nustatykite, ar skaičius $2 - \frac{4}{a}$ taip pat yra šios lygties sprendinys.

Sprendimas. Reikia patikrinti, ar galioja lygybė $\left(2 - \frac{4}{a}\right)^3 - 12\left(2 - \frac{4}{a}\right) + 8 = 0.$ Skaičiuodami gauname:

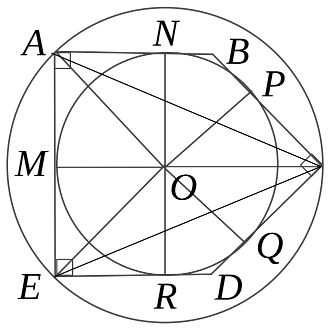
$$\left(2 - \frac{4}{a}\right)^3 - 12\left(2 - \frac{4}{a}\right) + 8 = 8 - \frac{48}{a} + \frac{96}{a^2} - \frac{64}{a^3} - 24 + \frac{48}{a} + 8 =$$

$$= \frac{96}{a^2} - \frac{64}{a^3} - 8 = \frac{8}{a^3}(12a - 8 - a^3) = -\frac{8}{a^3}(a^3 - 12a + 8) = 0,$$

nes $a^3 - 12a + 8 = 0.$

Ats.: $2 - \frac{4}{a}$ yra lygties sprendinys.

9. Iškilojo penkiakampio *ABCDE* kampai *BAE*, *DCB* ir *AED* yra statieji. Į jį įbrėžtas apskritimas. Raskite kampą *ACE*.



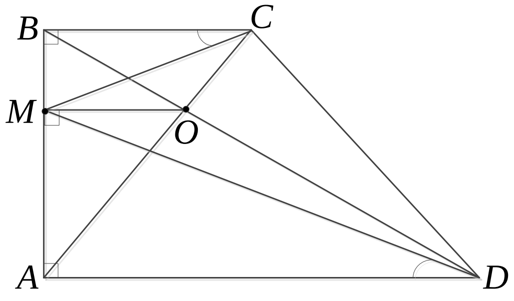
Sprendimas. Iš į penkiakampį įbrėžto apskritimo centro *O* nubrėžiame statmenis *OM*, *ON*, *OP*, *OQ* ir *OR* į penkiakampio kraštines. Iš lygybių $OM = ON = OP = OQ = OR$ išplaukia, kad keturkampiai *EROM*, *MONA* ir *POQC* yra lygūs kvadratai. Todėl $OA = OE = OC.$ Nubrėžiame apskritimą, kurio centras – taškas *O*, o spindulys *OA*. Kampas *ACE* yra jo įbrėžtinis, o $\angle AOE = 90°$ – centrinis. Taigi $\angle ACE = 45°.$

Ats.: $\angle ACE = 45°.$

10. Stačiosios trapecijos *ABCD* ($\angle A = \angle B = 90°$) įstrižainės *AC* ir *BD* susikerta taške *O*, taškas *M* yra statmens, nuleisto iš taško *O* į kraštinę *AB*, pagrindas. Įrodykite, kad $\angle CMO = \angle DMO$.

Įrodymas. Kadangi $AD \parallel BC \parallel OM$, tai

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{BM}{AM}.$$



Iš čia gauname, kad trikampiai *CBM* ir *DAM* yra panašieji, todėl $\angle MCB = \angle MDA.$. Kadangi $AD \parallel BC \parallel OM$, tai

$$\angle MCB = \angle CMO \ \text{ ir } \ \angle MDA = \angle DMO.$$

Vadinasi, $\angle CMO = \angle DMO$.