

**ALYTAUS APSKRITIES XX KOMANDINĖ MATEMATIKOS  
OLIMPIADA  
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI**

Druskininkai, 2016 m. gruodžio 2 d.

**UŽDAVINIAI**

1. Penkiuose krepšeliuose buvo po tam tikrą skaičių grybų. Iš pradžių Agnė paėmė penktadalį grybų iš pirmo krepšelio ir sudėjo juos į antrą krepšelį. Tada penktadalį antro krepšelio grybų ji perkėlė į trečią krepšelį ir t. t. Pagaliau penktadalį penkto krepšelio grybų Agnė perkėlė į pirmą krepšelį. Dabar visuose krepšeliuose grybų pasidarė po lygiai. Kiek grybų buvo krepšeliuose?
2. Trys dviratininkai vienu metu pradeda važiuoti uždaru maršrutu  $ABCA$ , kurį sudaro tiesaus kelio atkarpos  $AB$ ,  $BC$  ir  $CA$ . Kiekvienoje atkarpoje visų trijų dviratininkų greitis yra pastovus, bet skirtingas. Pirmojo dviratininko greitis atkarpoje  $AB$  lygus  $12$  km/h, atkarpoje  $BC$  –  $10$  km/h, o atkarpoje  $CA$  –  $15$  km/h. Antrojo dviratininko greitis atkarpose  $AB$ ,  $BC$  ir  $CA$  yra atitinkamai  $15$  km/h,  $15$  km/h ir  $10$  km/h, o trečiojo –  $10$ ,  $20$  ir  $12$  kilometrų per valandą. Kokiu kampu susikerta tiesaus kelio atkarpos  $AB$  ir  $BC$ , jei žinoma, kad visi trys dviratininkai kartu finišavo taške  $A$ ?
3. Raskite visas sveikųjų skaičių poras  $(x; y)$ , kurioms esant galioja lygybė
$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 = 100.$$
4. Didesnių už  $5$  skirtingų pirminių skaičių  $p_1, p_2, \dots, p_n$  kvadratų suma dalijasi iš  $6$ . Įrodykite, kad tada ir skaičius  $n$  dalijasi iš  $6$ .
5. Gimnazistas Jonas lentoje užrašė savo sugalvotą skaičių  $A$ , tarp kurio skaitmenų nėra nulio, ir skaičių  $B$ , gautą iš  $A$ , nubraukus vieną jo skaitmenį. Sudėjęs  $A$  ir  $B$ , gavo  $2016$ . Tada jo klasės draugė Agnė užrašė mažesnę už  $A$  skaičių  $C$ , taip pat neturintį nė vieno nulio, ir skaičių  $D$ , gautą iš  $C$ , nubraukus vieną jo skaitmenį. Sudėjusi  $C$  ir  $D$ , gavo  $2017$ . Raskite Jono sugalvotą skaičių  $A$ .
6. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0, \\ y^2 + 2z + 1 = 0, \\ z^2 + 2x + 1 = 0. \end{cases}$$
7. Įrašius nulį tarp natūraliojo skaičiaus vienetų ir dešimčių skaitmens, gaunamas  $9$  kartus didesnis skaičius. Koks yra tas skaičius?
8. Skaičius  $a$  yra lygties  $x^3 - 12x + 8 = 0$  sprendinys. Nustatykite, ar skaičius  $2 - \frac{4}{a}$  taip pat yra šios lygties sprendinys.
9. Iškiliojo penkiakampio  $ABCDE$  kampai  $BAE$ ,  $DCB$  ir  $AED$  yra statieji. Į jį įbrėžtas apskritimas. Raskite kampą  $ACE$ .
10. Stačiosios trapecijos  $ABCD$  ( $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ) įstrižainės  $AC$  ir  $BD$  susikerta taške  $O$ , taškas  $M$  yra statmens, nuleisto iš taško  $O$  į kraštinę  $AB$ , pagrindas. Įrodykite, kad  $\angle CMO = \angle DMO$ .