ALYTAUS APSKRITIES XIX KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Merkinė, 2015 m. gruodžio 4 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1. Marytė rado 175 baravykus ir sudėjo juos į kelias krūveles – po vienodą baravykų skaičių. Jeigu Marytė dviejų krūvelių grybus išskirstytų po lygiai į kitas krūveles, tai jos padidėtų po 10 baravykų. Raskite krūvelių skaičių.

Sprendimas. Krūvelių skaičių pažymėkime *x*. Tada $\frac{175}{x}$ bus baravykų skaičius kiekvienoje krūvelėje.

Remdamiesi antra sąlygos dalimi, gauname lygtį

$$2\cdot\frac{175}{x}=10\cdot(x-2).$$

Iš čia gauname kvadratinę lygtį $x^2-2x-35=0,$ kurios sprendiniai yra 7 ir –5.

Vadinasi, Marytė baravykus sudėjo į 7 krūveles.

Ats.: 7.

2. Nelyginiai natūralieji skaičiai suskirstyti į grupes: pirmą grupę sudaro skaičius 1, antrą – skaičiai 3 ir 5, trečią – skaičiai 7, 9 ir 11 ir t. t. Apskaičiuokite *n*-tos grupės skaičių sumą.

Sprendimas. Iš pradžių nustatykime, koks yra pirmas *n*-tos grupės $(n>1)$ skaičius. Kadangi pirmoje grupėje yra vienas skaičius, antroje – du, trečioje – trys ir t. t., tai bendras sugrupuotų nelyginių skaičių, esančių prieš *n*-tą grupę, skaičius yra

$$1+2+3+...+(n-1)=\frac{(1+(n-1))(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Todėl paskutinis $n-1$ grupės skaičius yra $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}-1=n(n-1)-1.$

Vadinasi, pirmas *n*-tos grupės $(n>1)$ skaičius yra

$$(n(n-1)-1)+2=n(n-1)+1,$$

o ieškoma suma (ją pažymėkime S_n) yra

$$S_n=(n(n-1)+1)+(n(n-1)+3)+(n(n-1)+5)+...+(n(n-1)+(2n-1))=$$
$$=\frac{((n(n-1)+1)+(n(n-1)+(2n-1)))\,n}{2}=\frac{2n^2\cdot n}{2}=n^3.$$

Ats.: n^3.

3. Natūralusis skaičius dalijasi iš 56. Jo skaitmenų suma lygi 56, o paskutiniai du skaitmenys sudaro skaičių 56. Raskite tokį natūralųjį skaičių.

Sprendimas. Skaičiaus 56 skaitmenų suma lygi 11, o skaičiaus $56\cdot 6=336$ skaitmenų suma lygi 12. Vadinasi, skaičiaus $a=33656565656$ skaitmenų suma lygi 56. Aišku, kad jis dalijasi iš 56 $(a=56\cdot 601010101)$.

Ats.: 33656565656.

4. Raskite visus sveikųjų skaičių x, y ir z trejetus $(x;\, y;\, z)$, kurie tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ x+yz=7. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš antros lygties atėmę pirmą, gauname lygtį

$$yz-y-z=1.$$

Ją pertvarkykime taip:

$$(yz-z)-(y-1)=2,$$
$$(y-1)(z-1)=2.$$

Galimi tik šie atvejai:

$$y-1=1,\ \ z-1=2;$$
$$y-1=-1,\ \ z-1=-2;$$
$$y-1=2,\ \ z-1=1;$$
$$y-1=-2,\ \ z-1=-1.$$

Gauname tokias poras $(y;\, z)$:

(2; 3), (0; –1), (3; 2), (–1; 0).

Apskaičiavę x reikšmes, gauname šiuos trejetus $(x;\, y;\, z)$:

(1; 2; 3), (7; 0; –1), (1; 3; 2), (7; –1; 0).

Ats.: (1; 2; 3), (7; 0; –1), (1; 3; 2), (7; –1; 0).

5. Skaičiai x, y ir z tenkina sąlygą $x(x+1)=y(y+1)=z(z+1).$ Įrodykite, kad

$$(x-y)(y-z)(z-x)=0.$$

Įrodymas. Iš lygybės $x(x+1)=y(y+1)$ gauname:

$$x^2+x-y^2-y=0 \Rightarrow (x-y)(x+y+1)=0.$$

Analogiškai iš lygybės $x(x+1)=z(z+1)$ gauname lygybę $(x-z)(x+z+1)=0.$

Jei $x-y=0$ arba $x-z=0,$ tai teiginys galioja.

Tarę, kad $x\neq y$ ir $x\neq z,$ gautume:

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow y=z \ \Rightarrow y-z=0.$$

Taigi ir šiuo atveju lygybė

$$(x-y)(y-z)(z-x)=0$$

galioja.

6. Šeimą sudaro trys asmenys: tėvas, motina ir sūnus. Šiuo metu jų amžių suma yra 65 metai. Prieš 9 metus tokia suma buvo 40 metų. Be to, prieš 4 metus tėvas buvo 9 kartus vyresnis už sūnų. Kiek metų turi tėvas, motina ir sūnus?

Sprendimas. Kadangi sumų skirtumas $65-40=25$ nesidalija iš 3, prieš 9 metus sūnaus dar nebuvo.

Tegu x yra tėvo, y – motinos, o z – sūnaus metų skaičius šiuo metu. Pagal uždavinio sąlygą, $x+y+z=65,$ $(x-9)+(y-9)=40,$ $x-4=9(z-4).$ Išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=65, \\ x+y \qquad =58, \\ x \qquad -9z=-32, \end{cases}$$

gauname, kad $z=7$ (pakanka iš pirmos lygties atimti antrą lygtį), $x=31$ ir $y=27.$

Ats.: 31, 27 ir 7.

7. Natūralusis skaičius x neturi nuliui lygių skaitmenų. Be to, $x \cdot \overline{x} = 1000 + p(x)$; čia $\overline{x}$ yra skaičius, užrašytas tais pačiais skaitmenimis kaip ir x, tik atvirkščia tvarka, o $p(x)$ yra skaičiaus x skaitmenų sandauga. Raskite tokį natūralųjį skaičių x.

Sprendimas. Aišku, kad x nėra vienaženklis skaičius. Jei x būtų dviženklis skaičius, tai jį galima užrašyti formule $x = 10a + b;\ \ a, b \in \{1; 2; ...; 9\}$. Tada, $\overline{x} = 10b + a$ ir $p(x) = ab$. Iš lygybės $x \cdot \overline{x} = 1000 + p(x)$ gauname:

$$(10a + b)(10b + a) = 1000 + ab,$$
$$101ab + 10a^2 + 10b^2 = 1000 + ab,$$
$$100ab + 10a^2 + 10b^2 = 1000,$$
$$10ab + a^2 + b^2 = 100.$$

Taikydami perrankos metodą, gauname $a = 2,\ \ b = 4$ arba $a = 4,\ \ b = 2.$ Taigi x yra 24 arba 42.

Nesunku įsitikinti, kad x negali būti triženklis ar daugiau skaitmenų turintis skaičius.

Ats.: 24 arba 42.

8. Kokio skaičiaus faktorialą reikia išbraukti iš sandaugos

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 99! \cdot 100!,$$

kad likusių skaičių sandauga būtų kurio nors natūraliojo skaičiaus kvadratas?

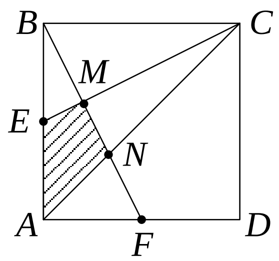
Sprendimas. Remdamiesi skaičiaus faktorialo apibrėžimu, gauname, kad

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 99! \cdot 100! = 1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100) =$$
$$= 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdot 5^{96} \cdot \ldots \cdot 98^3 \cdot 99^2 \cdot 100 =$$
$$= (2^{98} \cdot 3^{98} \cdot 4^{96} \cdot 5^{96} \cdot \ldots \cdot 98^2 \cdot 99^2) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 100 =$$
$$= a^2 \cdot 2^{50} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 50 = (a \cdot 2^{25})^2 \cdot 50!;$$

čia $a = 2^{49} \cdot 3^{49} \cdot 4^{48} \cdot 5^{48} \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99.$

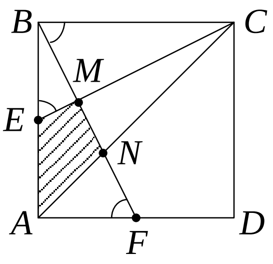
Taigi išbraukus $50!$ gaunamas natūraliojo skaičiaus $a \cdot 2^{25}$ kvadratas.

Ats.: $50!$.



9. Kvadrato *ABCD* (žr. pav.) kraštinės ilgis lygus 1. Be to, $AE = EB$ ir $AF = FD.$ Raskite subrūkšniuotos figūros *AEMN* plotą.

Sprendimas. Iš trikampių *ANF* ir *BNC* panašumo ($\angle NAF = \angle BCN$ ir $\angle ANF = \angle BNC$) išplaukia, kad



$$\frac{AN}{NC} = \frac{AF}{BC} = \frac{1}{2},$$
$$AN = \frac{1}{2}NC = \frac{1}{3}AC.$$

Vadinasi,

$$S_{ABN} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}.$$

Iš trikampių *ABF* ir *BME* panašumo ($\angle ABF = \angle MBE$ ir $\angle AFB = \angle MEB$) gauname:

$$\frac{EM}{AF} = \frac{BE}{BF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\frac{S_{BME}}{S_{ABF}} = \frac{EM^2}{AF^2}.$$

Iš čia

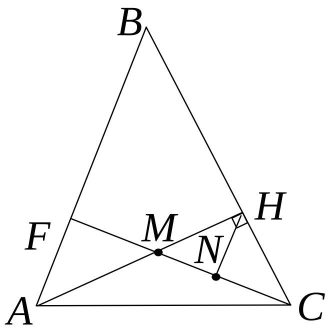
$$\frac{S_{BME}}{S_{ABF}} = \frac{1}{5}.$$

Kadangi $S_{ABF} = \frac{1}{4}$, tai $S_{BME} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$. Vadinasi,

$$S_{AEMN} = S_{ABN} - S_{BME} = \frac{1}{6} - \frac{1}{20} = \frac{7}{60}.$$

Ats.: $\frac{7}{60}$.

10. Trikampio ABC aukštinės AH ir CF kertasi taške M, kuris yra pirmosios aukštinės vidurio taškas, o antrąją dalija santykiu $CM : MF = 2:1$. Raskite trikampio kampą ABC.



Sprendimas. Jei N – MC vidurys, tai $FM = MN = NC$. $\Delta AFM = \Delta HNM$ ($AM = HM$, $FM = NM$, $\angle AMF = \angle HMN$), todėl $AF = NH$. Bet $NH = \frac{1}{2} MC$, taigi $AF = MN = FM$. Trikampis AFM – statusis lygiašonis, todėl $\angle FAM = 45°$, taigi iš stačiojo trikampio AHB seka $\angle B = 45°$.

Ats.: 45°.