ALYTAUS APSKRITIES XV JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Druskininkai, 2011 m. lapkričio 19 d.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI

1. Trijų natūraliųjų skaičių a, b ir c suma lygi 2013. Įrodykite, kad skaičius $\overline{abc}$ dalijasi iš 3.

Sprendimas. Tegu $x = \overline{abc}$. Skaičių a, b,c ir x skaitmenų sumas pažymėkime atitinkamai $S(a)$, $S(b)$, $S(c)$ ir $S(x)$. Pagal dalumo iš 3 požymį skirtumai $S(a)-a$, $S(b)-b$, $S(c)-c$ dalijasi iš 3. Kadangi 2013 dalijasi iš 3 ir

$$S(x) = S(a)+S(b)+S(c) = ((S(a)-a)+(S(b)-b)+S(c)-c)+(a+b+c) =$$
$$= (S(a)-a)+(S(b)-b)+S(c)-c)+2013,$$

tai x dalijasi iš 3.

2. Natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 100 surašykite taip, kad jokie vienuolika iš jų neitų nei didėjimo, nei mažėjimo tvarka.

Sprendimas. Viena iš galimybių yra tokia:

10, 9, 8, 7, 6, 5,4, 3, 2, 1,
20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11,
30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21,
40, 39, 38, 37, 36, 35, 34 33, 32, 31,
50, 49, 48, 47, 46, 45, 44, 43, 42, 41,
60, 59, 58, 57, 56, 55, 54, 53, 52, 51,
70, 69, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 62, 61,
80, 79, 78, 77, 76, 75, 74, 73, 72, 71,
90, 89, 88, 87, 86, 85, 84, 83, 82, 81,
100, 99, 98, 97, 96, 95, 94, 93, 92, 91.

3. Teniso turnyre dalyvavo 10 žaidėjų. Kiekvienas iš jų sužaidė po vieną partiją su kiekvienu kitu turnyro dalyviu. Tarkime, kad $l_1, l_2, ..., l_{10}$ yra tenisininkų laimėtų partijų skaičiai, o $p_1, p_2, ..., p_{10}$ – pralaimėtų partijų skaičiai. Įrodykite, kad galioja tokia lygybė:

$$l_1^2 + l_2^2 + ... + l_{10}^2 = p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{10}^2.$$

Sprendimas. Aišku, kad $l_i = 9 - p_i, i = 1, 2, ..., 10.$ Be to,

$$l_1 + l_2 + ... + l_{10} = p_1 + p_2 + ... + p_{10} = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\,8!} = 45.$$

Todėl

$$l_1^2 + l_2^2 + ... + l_{10}^2 = (9-p_1)^2 + (9-p_2)^2 + ... + (9-p_{10})^2 =$$
$$= (81 - 18p_1 + p_1^2) + (81 - 18p_2 + p_2^2) + ... + (81 - 18p_{10} + p_{10}^2) =$$
$$= 810 - 18(p_1 + p_2 + ... + p_{10}) + (p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{10}^2) =$$
$$= 810 - 18 \cdot 45 + (p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{10}^2) = p_1^2 + p_2^2 + ... + p_{10}^2.$$

4. Šachmatų turnyre dalyvauja ne daugiau kaip 30 dalyvių. Pagal turnyro taisykles kiekvienas žaidėjas susitinka su kiekvienu kitu dalyviu tik vieną kartą. Sužaidus $\frac{3}{8}$ visų partijų, pasirodė, kad jų skaičius lygus pernai vykusiame turnyre sužaistų partijų skaičiui. Kiek šachmatininkų dalyvauja turnyre ir kiek jų dalyvavo pernai?

Sprendimas. Tegu *x* yra šiemetinio , o *y* – pernai vykusio turnyro dalyvių skaičius. Partijų skaičiai turnyruose yra

$$C_x^2 = \frac{x!}{2!\,(x-2)!} = \frac{x\,(x-1)}{2} \text{ ir } C_y^2 = \frac{y!}{2!\,(y-2)!} = \frac{y\,(y-1)}{2}.$$

Pagal uždavinio sąlygą $x \in \{2; 3; ...; 30\}$ ir

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{x\,(x-1)}{2} = \frac{y(y-1)}{2}.$$

Kadangi sandauga $x\,(x-1)$ turi dalytis iš 16, tai galimos *x* reikšmės yra 16 ir 17.

Kai $x=16$, gauname:

$$\frac{y(y-1)}{2} = 45 \Rightarrow y^2 - y - 90 = 0 \Rightarrow y \in \{-9; 10\}.$$

Antruoju atveju (kai $x=17$)

$$\frac{y(y-1)}{2} = 51 \Rightarrow y^2 - y - 102 = 0 \Rightarrow y \notin \boldsymbol{Z}.$$

Vadinasi, $x=16$, $y=10$.

5. Skaičiai *p* ir *q* yra pirminiai. Raskite juos, esant sąlygai, kad bent vienas lygties $x^4 - px^3 + q = 0$ sprendinys yra sveikasis skaičius.

Sprendimas. Tegu *a* yra sveikasis lygties $x^4 - px^3 + q = 0$ sprendinys. Tada $q = pa^3 - a^4 = a^3(p-a)$. Kadangi *q* yra pirminis skaičius, tai $a=1$.

Iš lygybės $q = p-1$ nustatome, kad ją tenkina tik viena pirminių skaičių pora: $p=3$, $q=2$.

6. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių *n*, kuriam esant natūralusis skaičius $n^3 - 3n^2 + 4$ dalijasi iš 173.

Sprendimas. Skaičius 173 yra pirminis ir

$$n^3 - 3n^2 + 4 = (n^3+1) - 3(n^2-1) = (n+1)(n^2-4n+4) = (n+1)(n-2)^2.$$

Vadinasi, skaičius $n^3 - 3n^2 + 4$ dalijasi iš 173 tik tada, kai $n+1 = 173k$, $k \in \boldsymbol{N}$, arba $n-2 = 173l$, $l \in \boldsymbol{N}$.

Galimai mažiausia *n* reikšmė yra $n=172$.

7. Ežero vanduo pastoviai pasipildo iš požeminių šaltinių. Visą ežero vandenį 183 drambliai galėtų išgerti per 1 dieną, o 37 drambliai – per 5 dienas. Per kiek dienų visą ežerą išgertų vienas dramblys?

Sprendimas. Tegu *A* yra vandens kiekis (m^3) ežere pradiniu momentu, o *B* – vandens kiekis (m^3), kuriuo ežeras pasipildo iš požeminių šaltinių per vieną dieną. Sakykime, kad vienas dramblys išgeria *C* m^3 per vieną dieną. Ieškomąjį dienų skaičių pažymėkime *x*. Pagal uždavinio sąlygą sudarykime tokią sistemą:

$$\begin{cases} 183C = A + B, \\ 5 \cdot 37C = A + 5B, \\ Cx = A + Bx. \end{cases}$$

Gauname: $A = 182{,}5C$, $B = 0{,}5C$ ir $x = 365$.

Ats.: 365.

8. Trikampio ABC kraštinių ilgiai tenkina tokią sąlygą: $BC^3 = AB^3 + AC^3$. Ar kampas A gali būti statusis?

Sprendimas. Pažymėkime $a = BC$, $b = AC$ ir $c = AB$. Tada

$a^3 = b^3 + c^3 \Rightarrow a > b,\ a > c \Rightarrow ab^2 > b^3,\ ac^2 > c^3 \Rightarrow a(b^2 + c^2) > b^3 + c^3 = a^3 \Rightarrow b^2 + c^2 > a^2 \Rightarrow A$ nėra statusis kampas (A yra smailusis kampas).

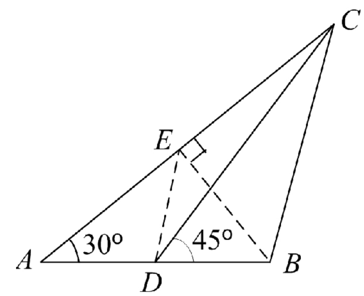
9. Trikampyje ABC nubrėžta pusiaukraštinė CD. Apskaičiuokite kampo B didumą, jeigu $\angle A = 30^\circ$ ir $\angle CDB = 45^\circ$.

Sprendimas. Nubrėžkime $BE \perp AC$ ir sujunkime E su D. Trikampis EDB yra lygiakraštis, nes $BE = \frac{1}{2}AB = DB$ ir $ED = \frac{1}{2}AB = DB$ (kaip apibrėžto apie statųjį trikampį ABE apskritimo spindulys). Todėl $\angle EDC = 15^\circ$. Be to,

$$\angle ACD = \angle CDB - \angle CAD = 15^\circ.$$

Iš čia išplaukia, kad ΔBEC yra lygiašonis statusis trikampis ir $\angle B = \angle ABE + \angle EBC = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$.

Ats.: 105°.



10. Buvo apklausti vienos pagrindinės mokyklos mokiniai. Pasirodė, kad 90 % žiemos mėgėjų mėgsta ir vasarą, o 72 % vasaros mėgėjų mėgsta ir žiemą. Užtat 10 % apklaustų mokinių nemėgsta nei žiemos, nei vasaros. Nustatykite, kiek procentų apklaustų mokinių mėgsta tik žiemą arba tik vasarą? Raskite galimai mažiausią apklaustų mokinių skaičių.

Sprendimas. Tegu n yra apklaustų mokinių skaičius. Žiemos mėgėjų skaičių pažymėkime x, o vasaros mėgėjų skaičių pažymėkime y. Pagal uždavinio sąlygą $0{,}9x$ žiemos mėgėjų mėgsta ir vasarą, o $0{,}72y$ vasaros mėgėjų mėgsta ir žiemą, o $0{,}1n$ mokinių nemėgsta nei žiemos, nei vasaros.

Toliau nagrinėkime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 0{,}9x = 0{,}72y, \\ 0{,}1n + x + y - 0{,}9x = n. \end{cases}$$

Gauname $x = 0{,}8y$ ir $1{,}08y = 0{,}9n$. Iš čia

$$y = \frac{0{,}9n}{1{,}08} = \frac{5n}{6}, \quad x = 0{,}8 \cdot \frac{5n}{6} = \frac{2n}{3}.$$

Ieškomasis mokinių, mėgstančių tik vieną sezoną, skaičius yra $0{,}1x + 0{,}28y = \frac{n}{15} + \frac{7n}{30} = 0{,}3n.$ Jis sudaro 30 % apklaustų mokinių.

Galimai mažiausias apklaustų mokinių skaičius yra $n = 30$, nes $0{,}1n$, x ir y turi būti sveikieji skaičiai.