ALYTAUS KRAŠTO MOKSLEIVIŲ
XI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
K. KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Alytus, 2006 m. gruodžio mėn. 2 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

UŽDAVINIŲ SPRENDIMAS

1. Krepšyje yra baravykų, raudonikių ir rudmėsių – iš viso 41 grybas. Paėmę iš krepšio bet kuriuos 33 grybus, tarp jų rasime nemažiau kaip 3 raudonikius. Tarp bet kurių 30 grybų rastume bent du baravykus, o tarp bet kurių 25 grybų – bent vieną rudmėsę. Nustatykite, kiek baravykų, raudonikių ir rudmėsių yra krepšyje.

Sprendimas. Tegu x yra baravykų, y – raudonikių, o z yra rudmėsių skaičius; tada $x+y+z=41$.

Pagal sąlygą gauname šias nelygybes:

$$x+z\le 30,\quad y+z\le 28,\quad x+y\le 24.$$

Sudėję jas, turėsime nelygybę

$$2x+2y+2z\le 82.$$

Iš čia $x+y+z\le 41$.

Sugretinę šią nelygybę su lygybe $x+y+z=41$, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x \quad + z = 30, \\ \quad y + z = 28, \\ x + y \quad = 24. \end{cases}$$

Ši sistema turi vienintelį sprendinį: $x=13$, $y=11$, $z=17$.

Ats.: 13 baravykų, 11 raudonikių ir 17 rudmėsių.

2. Raskite lygties

$$x^2-xy-2y^2=7$$

visus sveikuosius sprendinius.

Sprendimas. Išskaidykime kairiąją lygties pusę:

$$x^2-xy-2y^2=(x^2-y^2)-(xy+y^2)=(x+y)(x-2y).$$

Taigi turime lygtį:

$$(x+y)(x-2y)=7.$$

Yra tokios galimybės:

$$\begin{cases} x+y=\pm 1, \\ x-2y=\pm 7 \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} x+y=\pm 7, \\ x-2y=\pm 1. \end{cases}$$

Gauname šiuos sprendinius: (3; –2), (–3; 2), (5; 2), (–5; –2).

Ats.: (3; –2), (–3; 2), (5; 2), (–5; –2).

3. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio pusė yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, o trečdalis – natūraliojo skaičiaus kubas.

Sprendimas. Ieškomasis skaičius turi būti skaičiaus $a=2^k\cdot 3^m$ (k, m, – natūralieji skaičiai) kartotinis; taigi lygus $n\cdot 2^k\cdot 3^m$, $n\in$N. Aišku, šis skaičius bus mažiausias, kai $n=1$.

Pagal uždavinio sąlygą gauname:

$$\frac{a}{2}=2^{k-1}\cdot 3^m=\left(2^{\frac{k-1}{2}}\cdot 3^{\frac{m}{2}}\right)^2,$$

$$\frac{a}{3} = 2^k \cdot 3^{m-1} = \left(2^{\frac{k}{3}} \cdot 3^{\frac{m-1}{3}}\right)^3 .$$

Turime rasti mažiausius natūraliuosius skaičius k ir m, kurie tenkina šias sąlygas:
1) k yra nelyginis skaičius ir dalijasi iš 3;
2) m yra lyginis skaičius, o $(m-1)$ dalijasi iš 3.

Tokia skaičių pora yra: $k = 3$, $m = 4$; taigi $a = 2^3 \cdot 3^4 = 648$.
Ats.: 648.

4. Natūralieji skaičiai suskirstyti į tokias grupes: (1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10), (11; 12; 13; 14; 15),...
Raskite:

a) vienuoliktos grupės skaičių sumą;

b) dvidešimt pirmos grupės pirmąjį skaičių.

Sprendimas. Tegu a_n yra n-tos grupės pirmasis skaičius, o b_n – šios grupės paskutinis skaičius $(n = 1, 2, 3, ...)$. Aišku, kad $a_1 = b_1$; be to, $b_{n+1} = b_n + n + 1$, $n = 1, 2, 3, ...$.
Gauname:
$b_{10} = b_9 + 10 = (b_8 + 9) + 10 = (b_7 + 8) + 9 + 10 = ... = (b_1 + 2) + 3 + ... + 10 = 1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55$.
Taigi vienuolikta grupė yra tokia: (56; 57; 58; ... ; 66). Jos skaičių suma lygi 671.
Dvidešimt pirmos grupės pirmasis skaičius yra

$$a_{21} = b_{20} + 1 = (1 + 2 + 3 + ... + 20) + 1 = \frac{21 \cdot 20}{2} + 1 = 211 .$$

Ats.: 671; 211.

5. Dešimtyje vazų yra saldainių – visose po skirtingą skaičių. Kiekvienos vazos saldainius galima išdėlioti į kitas devynias vazas taip, kad šiose devyniose vazose saldainių būtų po lygiai. Koks mažiausias saldainių skaičius gali būti vazoje, kurioje yra daugiausia saldainių?

Sprendimas. Tegu $a_1, a_2, ..., a_{10}$ yra saldainių skaičiai vazose ir $a_1 < a_2 < ... < a_{10}$.
Išskirstykime saldainius iš pirmos vazos. Į n-ąją vazą ($n = 2, 3, ..., 10$) įdedamų saldainių skaičių pažymėkime S_n. Aišku, kad $S_{10} \geq 0$, $S_9 \geq 1$, $S_8 \geq 2$, $S_7 \geq 3$, $S_6 \geq 4$, $S_5 \geq 5$, $S_4 \geq 6$, $S_3 \geq 7$, $S_2 \geq 8$; taigi $a_1 = S_2 + S_3 + ... + S_{10} \geq 8 + 7 + ... + 2. + 1 = 36$. Tada $a_2 \geq 37$, $a_3 \geq 38, ...,$ $a_{10} \geq 45$. Saldainių skaičius dešimtoje vazoje bus $a_{10} = 45$ tik tada, kai $a_1 = 36$, $a_2 = 37$, $a_3 = 38$, ..., $a_9 = 44$. Nesunku įsitikinti, kad šis skaičių rinkinys tenkina ir antrąją uždavinio sąlygą: kiekvienos vazos saldainius galima išdėlioti į kitas devynias vazas taip, kad šiose devyniose vazose saldainių būtų po lygiai.
Ats.: 45.

6. Apskaičiuokite sumą

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!$$

(čia $m! = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ – skaičiaus m faktorialas, $m = 1, 2, ..., n$).

Sprendimas. Tegu S yra ieškomoji suma. Tada

$$S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (1! + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!) - 1 = ((1! + 1 \cdot 1!) + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!) - 1 =$$
$$= (1! \cdot 2 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!) - 1 = ((2! + 2 \cdot 2!) + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!) - 1 = (3! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!) - 1 = ... =$$
$$= (n! + n \cdot n!) - 1 = n!(n+1) - 1 = (n+1)! - 1$$

Ats.: $(n+1)! - 1$

7. Jeigu $x > 0$, $y > 0$ ir $x^3 + y^3 = x - y$, tai $x^2 + y^2 < 1$. Įrodykite.

Sprendimas. $\dfrac{x^3 + y^3}{x - y} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} < 1 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$.

8. Raskite mažiausią teigiamą nelygybės $[x] \cdot \{x\} \geq 3$ sprendinį (čia $[x]$ yra sveikoji skaičiaus x dalis, $\{x\} = x - [x]$ – trupmeninė skaičiaus x dalis; pavyzdžiui, $[5{,}1] = 5$, $\{5{,}1\} = 0{,}1$, $[4{,}999] = 4$, $\{4{,}999\} = 0{,}999$, $[-5{,}01] = -6$, $\{-5{,}01\} = 0{,}99$).

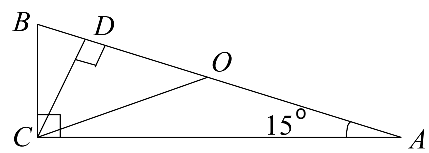
Sprendimas. Kadangi $0 \leq \{x\} < 1$, tai $[x] > 3$. Kai $[x] = 4$, gauname $\{x\} \geq \dfrac{3}{4} = 0{,}75$; taigi, $x \geq 4{,}75$. Jeigu $[x] \geq 5$, tai $x \geq [x] \geq 5 > 4{,}75$. Vadinasi, $x = 4{,}75$ yra mažiausias teigiamas nelygybės sprendinys.

Ats.: $x = 4{,}75$.

9. Stačiojo trikampio *ABC* smailusis kampas lygus 15°, o aukštinės, išvestos iš stačiojo kampo *C* į įžambinę, ilgis lygus 1 dm. Apskaičiuokite trikampio *ABC* plotą.

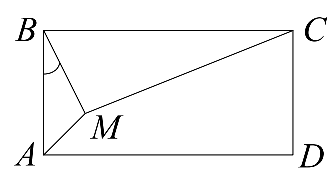
Sprendimas. Sakykime, *O* – įžambinės vidurio taškas. Kadangi trikampis *AOC* yra lygiašonis, tai $\angle DOC = 30^\circ$. Taigi trikampyje *ODC* statinis *DC* yra prieš 30° kampą. Vadinasi, $OC = 2DC = 2$ (dm), $AB = 2OC = 4$ (dm).

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CD = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$ (dm^2)



10. Stačiakampio *ABCD* kraštinė *BC* yra dvigubai ilgesnė už kraštinę *AB*. Šio stačiakampio viduje pažymėtas taškas *M*. Raskite kampo *ABM* kosinusą ir stačiakampio plotą, jeigu $AM = \sqrt{2}$, $BM = 2$, $CM = 6$.

Sprendimas. Tegu $\angle ABM = \alpha$, $AB = x$. Tada $BC = 2x$. Trikampiui *ABM* pritaikykime kosinusų teoremą:



$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + 4 - 4x\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x^2 + 2}{4x}$$

Pritaikę kosinusų teoremą trikampiui *MBC*, gauname $\sin\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{x^2 - 8}{2x}$. Iš lygties $\left(\dfrac{x^2 + 2}{4x}\right)^2 + \left(\dfrac{x^2 - 8}{2x}\right)^2 = 1$

turėsime $x^2 = \dfrac{38 \pm 12}{5}$. Iš čia $x^2 = \dfrac{26}{5}$ arba $x^2 = 10$. Sprendinys $x^2 = \dfrac{26}{5}$ netinka, nes $\sin\alpha = \dfrac{\frac{26}{5} - 8}{\frac{5^2}{5}} < 0$.

Taigi $x^2 = 10 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{10 + 2}{4\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. Tuomet plotas $S = 2x^2 = 20$.

Ats.: $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, 20.