

**ALYTAUS KRAŠTO MOKSLEIVIŲ
XI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
K. KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI**

**Alytus, 2006 m. gruodžio mėn. 2 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

U Ž D A V I N I A I

1. Krepšyje yra baravykų, raudonikių ir rudmėsių – iš viso 41 grybas. Paėmę iš krepšio bet kuriuos 33 grybus, tarp jų rasime nemažiau kaip 3 raudonikius. Tarp bet kurių 30 grybų rastume bent du baravykus, o tarp bet kurių 25 grybų – bent vieną rudmėsę. Nustatykite, kiek baravykų, raudonikių ir rudmėsių yra krepšyje.
2. Raskite lygties
$$x^2 - xy - 2y^2 = 7$$
visus sveikuosius sprendinius.
3. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio pusė yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, o trečdalis – natūraliojo skaičiaus kubas.
4. Natūralieji skaičiai suskirstyti į tokias grupes: (1), (2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9; 10), (11; 12; 13; 14; 15),... Raskite:
 - a) vienuoliktos grupės skaičių sumą;
 - b) dvidešimt pirmos grupės pirmąjį skaičių.
5. Dešimtyje vazų yra saldainių – visose po skirtingą skaičių. Kiekvienos vazos saldainius galima išdėlioti į kitas devynias vazas taip, kad šiose devyniose vazose saldainių būtų po lygiai. Koks mažiausias saldainių skaičius gali būti vazoje, kurioje yra daugiausia saldainių?
6. Apskaičiuokite sumą
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$$
(čia $m! = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ – skaičiaus m faktorialas, $m = 1, 2, \dots, n$).
7. Jeigu $x > 0$, $y > 0$ ir $x^3 + y^3 = x - y$, tai $x^2 + y^2 < 1$. Įrodykite.
8. Raskite mažiausią teigiamą nelygybės $[x] \cdot \{x\} \geq 3$ sprendinį (čia $[x]$ yra sveikoji skaičiaus x dalis, $\{x\} = x - [x]$ – trupmeninė skaičiaus x dalis; pavyzdžiui, $[5,1] = 5$, $\{5,1\} = 0,1$, $[4,999] = 4$, $\{4,999\} = 0,999$, $[-5,01] = -6$, $\{-5,01\} = 0,99$).
9. Stačiojo trikampio ABC smailusis kampas lygus 15° , o aukštinės, išvestos iš stačiojo kampo C į įžambinę, ilgis lygus 1 dm. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą.
10. Stačiakampio $ABCD$ kraštinė BC yra dvigubai ilgesnė už kraštinę AB . Šio stačiakampio viduje pažymėtas taškas M . Raskite kampo ABM kosinusą ir stačiakampio plotą, jeigu $AM = \sqrt{2}$, $BM = 2$, $CM = 6$.