Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
2007 m.

IX klasė

1. Ant lentos užrašyta 10 pliusų ir 15 minusų. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du ženklus ir vietoj jų parašyti pliusą, jei tie ženklai sutampa, arba minusą, jei jie skirtingi. Koks ženklas galiausiai liks lentoje (po 24 operacijų)?

2. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{400}\right).$$

3. Raskite visas sveikųjų skaičių poras (x, y), tenkinančias lygtį

$$(x+y^2)\cdot(x^2+y)=(x+y)^3.$$

4. Ar 81-ženklis skaičius $\underbrace{111\ldots1}_{\text{81 skaitmuo}}$, kurio visi skaitmenys yra vienetai, dalijasi iš 81?

Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
2007 m.

X klasė

1. Ant lentos užrašyta 10 pliusų ir 15 minusų. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du ženklus ir vietoj jų parašyti pliusą, jei tie ženklai sutampa, arba minusą, jei jie skirtingi. Koks ženklas galiausiai liks lentoje (po 24 operacijų)?

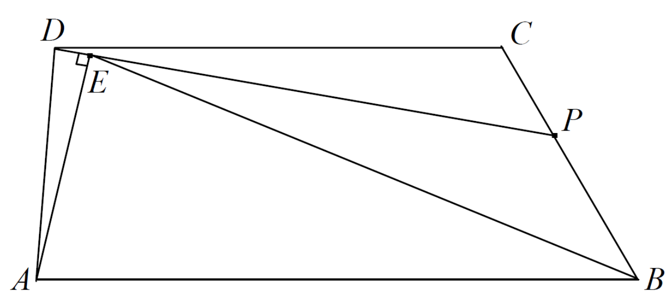
2. Pažymėkime A_n aibę, kurią sudaro iš eilės einantys natūralieji skaičiai nuo n iki n^2, t. y.

$$A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots, n^2\}.$$

Aibė A_n vadinama *tvarkinga*, jeigu joje yra keturi skirtingi skaičiai a, b, c ir d, kuriems galioja lygybė $ad = bc$.

a) Ar A_{10} yra tvarkinga aibė?
b) Ar A_{2007} yra tvarkinga aibė?
c) Su kuriais natūraliaisiais n aibė A_n yra tvarkinga?

3. Trapecijoje $ABCD$ kraštinė AB lygiagreti su kraštine CD. Taškas P pažymėtas kraštinėje BC taip, kad $\dfrac{AB}{DC} = \dfrac{BP}{CP}$. Iš taško A nuleistas statmuo į atkarpą DP (taškas E yra statmens pagrindas). Įrodykite, kad $AB = BE$.



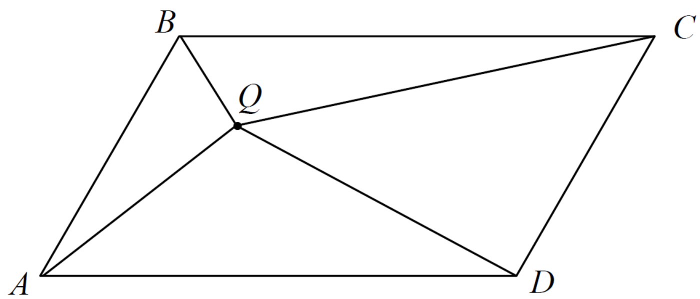
4. Ar lygiakraštį trikampį galima padalyti į 2007 lygiakraščius trikampius?

Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada

2007 m.

XI klasė

1. Lygiagretainio $ABCD$ viduje pažymėtas taškas Q, kuris sujungtas su lygiagretainio viršūnėmis atkarpomis QA, QB, QC ir QD. Kampų AQB ir DQC suma lygi $180°$, o kampas QAD lygus $50°$. Raskite kampą QCD.



2. Ar lygiakraštį trikampį galima padalyti į 2007 lygiakraščius trikampius?

3. Raskite visus natūraliųjų skaičių rinkinius (a, b, c, d), tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} ab + cd = 34, \\ ac - bd = 19. \end{cases}$$

4. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(19^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(20^4+\frac{1}{4}\right)}.$$

Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada

2007 m.

XII klasė

1. Tegu $\{a_1, a_2, \ldots, a_{201}\}$ yra aibė, sudaryta iš natūraliųjų skaičių, mažesnių už 300. Įrodykite, kad egzistuoja tokie aibės elementai a_i ir a_j, kad $\dfrac{a_i}{a_j} = 3^k$ su kokiu nors natūraliuoju k.

2. Raskite visus natūraliųjų skaičių rinkinius (a, b, c, d), tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} ab + cd = 34, \\ ac - bd = 19. \end{cases}$$

3. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę:

$$\frac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(3^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(5^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(19^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(4^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(6^4 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(20^4 + \frac{1}{4}\right)}.$$

4. Tegu a, b, c yra bet kurio trikampio kraštinių ilgiai. Įrodykite nelygybę:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
2008 m.

IX klasė

1. Ant stalo stovi 7 neuždegtos lempos, kiekviena su savo jungikliu, kuris nedegančią lempą uždega, o degančią užgesina.

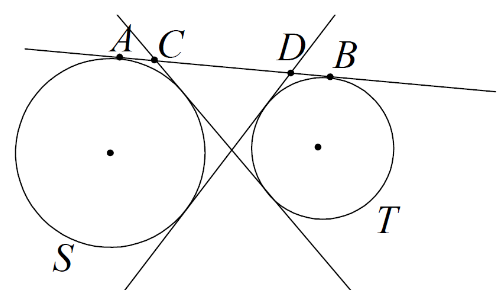
a) Vienu ėjimu galima nuspausti bet kuriuos 4 jungiklius. Ar taip elgiantis galima pasiekti, kad visos lempos degtų vienu metu?

b) Vienu ėjimu galima nuspausti bet kuriuos 3 jungiklius. Ar taip elgiantis galima pasiekti, kad visos lempos degtų vienu metu?

2. Kiekvienoje kubo viršūnėje įrašome po triženklį skaičių, sudarytą tik iš skaitmenų 1 ir 2. Ar gali būti taip, kad bet kuriose dviejose kubo viršūnėse, kurias jungia to kubo briauna, įrašytų skaičių skaitmenys sutaptų daugiausiai vienoje pozicijoje? (Pavyzdžiui, skaičių 221 ir 122 skaitmenys sutampa lygiai vienoje pozicijoje – dešimčių.)

Pastaba. Užduotis tampa kiek įdomesnė, nei pasiūlyta olimpiadoje, jei reikalaujama, kad visi 8 skaičiai būtų skirtingi.

3. Plokštumoje duoti du vienas kito išorėje esantys ir bendrų taškų neturintys apskritimai S ir T. Šiems apskritimams išvestos trys bendros liestinės bei pažymėti jų taškai, kaip parodyta paveikslėlyje (A ir B yra lietimosi taškai, C ir D yra liestinių susikirtimo taškai). Įrodykite, kad $AC = BD$.



4. Išspręskite lygtį:

$$\frac{x^4+4}{x^2-2} = 5x.$$

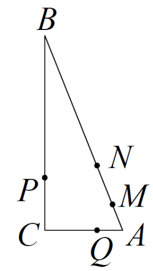
Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
2008 m.

X klasė

1. Ant stalo stovi 13 neuždegtų lempų, kiekviena su savo jungikliu, kuris nedegančią lempą uždega, o degančią užgesina.

a) Vienu ėjimu galima nuspausti bet kuriuos 8 jungiklius. Ar taip elgiantis galima pasiekti, kad visos lempos degtų vienu metu?
b) Vienu ėjimu galima nuspausti bet kuriuos 7 jungiklius. Ar taip elgiantis galima pasiekti, kad visos lempos degtų vienu metu?

2. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB taip pažymėti taškai M ir N, kad $AN = AC$ ir $BM = BC$ (žr. pav.). Tada statiniuose BC ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai P ir Q, kad $BP = BN$ ir $AQ = AM$. Įrodykite, kad taškai C, P, N, M ir Q priklauso vienam apskritimui.



3. Tegu x yra dešimties iš eilės einančių natūraliųjų skaičių suma, o y – tų pačių dešimties skaičių kubų suma. Įrodykite, kad $y^2 - x^2$ dalijasi iš 12.

4. Duota kvadratinė lentelė, sudaryta iš 4×4 vienetinių langelių. Kai kurie langeliai nudažyti taip, kad vienu metu išbraukus bet kurias dvi eilutes ir bet kuriuos du stulpelius, gautoje 2×2 lentelėje lieka bent vienas nudažytas langelis. Kiek mažiausiai langelių nudažyta?

Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
2008 m.

XI klasė

1. Skaičius x, y ir z sieja lygybės

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}.$$

Įrodykite, kad $x = y = z$ arba $(xyz)^2 = 1$.

2. Piramidės pagrindas yra taisyklingasis n-kampis. Pagrindo viršūnėse pažymėti realieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o piramidės viršūnėje – skaičius x. Kiekvienos šoninės sienos viršūnių skaičių suma lygi 2007, o visų pagrindo viršūnių skaičių suma yra 2008. Su kokia mažiausia nelygine n reikšme skaičiai $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ gali būti natūralieji? Raskite visus tokius skaičių rinkinius *(atitinkančius rastąją n reikšmę)*.

3. Trikampio viduje pažymėtas taškas, o per jį išvestos trys tiesės, lygiagrečios su trikampio kraštinėmis. Šių tiesių dalys, esančios trikampio viduje, yra to paties ilgio x atkarpos. Raskite x, jei trikampio kraštinių ilgiai yra a, b ir c.

4. Duota kvadratinė lentelė, sudaryta iš 6×6 vienetinių langelių. Kai kurie langeliai nudažyti taip, kad vienu metu išbraukus bet kurias tris eilutes ir bet kuriuos tris stulpelius, gautoje 3×3 lentelėje lieka bent vienas nudažytas langelis. Kiek mažiausiai langelių nudažyta?

Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
2008 m.

XII klasė

1. Trijų natūraliųjų skaičių suma lygi 2003. Daugiausiai keliais nuliais gali baigtis šių trijų skaičių sandauga?

2. Trikampio viduje pažymėtas taškas, o per jį išvestos trys tiesės, lygiagrečios su trikampio kraštinėmis. Šių tiesių dalys, esančios trikampio viduje, yra to paties ilgio x atkarpos. Raskite x, jei trikampio kraštinių ilgiai yra a, b ir c.

3. Tegu x yra dešimties iš eilės einančių natūraliųjų skaičių suma, o y – tų pačių dešimties skaičių kubų suma. Įrodykite, kad $y^2 - x^2$ dalijasi iš 300.

4. Duota kvadratinė lentelė, sudaryta iš $2n \times 2n$ vienetinių langelių. Kai kurie langeliai nudažyti taip, kad vienu metu išbraukus bet kurias n eilučių ir bet kuriuos n stulpelių, gautoje $n \times n$ lentelėje lieka bent vienas nudažytas langelis. Kiek mažiausiai langelių nudažyta?

Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
2009 m.

IX klasė

1. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių, užrašomų vien nuliais ir vienetais bei mažesnių už 1001001.

2. Lygiašonės trapecijos įstrižainė dalija ją į du lygiašonius trikampius. Raskite šios trapecijos kampus.

3. Duota lygtis

$$\frac{x+6}{y}+\frac{13}{xy}=\frac{4-y}{x}.$$

a) Raskite bent vieną realųjį šios lygties sprendinį (x, y).
b) Raskite visus realiuosius šios lygties sprendinius.

4.

a) Raskite bent vieną tokį natūralųjį skaičių, kuris turėtų lygiai keturis natūraliuosius daliklius, o tų daliklių aritmetinis vidurkis būtų lygus 10.
b) Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius, kurie turėtų lygiai keturis natūraliuosius daliklius, o tų daliklių aritmetinis vidurkis būtų lygus 10.

Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
2009 m.

X klasė

1. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių, užrašomų vien nuliais ir vienetais bei mažesnių už 1001001001.

2. Ant lentos užrašytas reiškinys

$$*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3 * 1.$$

Vienu ėjimu leidžiama pakeisti vieną iš žvaigždučių ženklu „+" arba ženklu „–". Marytė ir Onutė ėjimus atlieka pakaitomis. Jei Marytė daro ėjimą pirmoji, ar visada pavyks Onutei pasiekti, kad gautojo reiškinio reikšmė dalytųsi iš 7?

3. Iškilojo penkiakampio $ABCDE$ kraštinės tenkina sąlygą

$$BC = CD = AE = AB + DE = 1,$$

o jo kampai B ir D yra statieji. Raskite penkiakampio $ABCDE$ plotą.

4. Tegu a – bet kuris realusis skaičius. Didžiausias sveikasis skaičius, ne didesnis nei a, yra vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$. Dydis $a - [a]$ yra vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 100{,}9, \\ \{x\} + y + [z] = 125{,}3, \\ [x] + \{y\} + z = 200{,}9. \end{cases}$$

Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
2009 m.

XI klasė

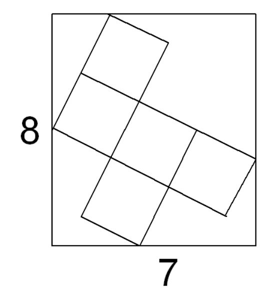
1. Močiutė nusipirko ir apelsinų, ir obuolių. Grįžusi namo ji išdalino juos savo anūkams. Visi anūkai gavo po lygiai vaisių. Vienas iš anūkų, Petriukas, gavo penktadalį visų obuolių ir septintadalį visų apelsinų. Kiek anūkų turi močiutė?

2. p_1, p_2, p_3, p_4 yra keturi skirtingi pirminiai skaičiai, tenkinantys lygybes

$$2p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7p_4 = 162,$$
$$11p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 = 162.$$

Raskite visas įmanomas sandaugos $p_1p_2p_3p_4$ reikšmes.

3. Figūra, sudaryta iš penkių vienodų kvadratų, patalpinta 7×8 dydžio stačiakampyje, kaip parodyta paveikslėlyje. Raskite figūrą sudarančių kvadratų kraštinės ilgį.



4. Tegu a – bet kuris realusis skaičius. Didžiausias sveikasis skaičius, ne didesnis nei a, yra vadinamas skaičiaus a sveikąja dalimi ir žymimas $[a]$. Dydis $a - [a]$ yra vadinamas skaičiaus a trupmenine dalimi ir žymimas $\{a\}$.

Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 100{,}9, \\ \{x\} + y + [z] = 125{,}3, \\ [x] + \{y\} + z = 200{,}9. \end{cases}$$

Vilniaus miesto mokinių matematikos olimpiada
2009 m.

XII klasė

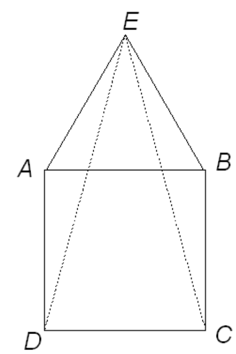
1. Nustatykite, kiek yra natūraliųjų skaičių, užrašomų vien nuliais, vienetais ir dvejetais bei mažesnių už 1002002001.

2. p_1, p_2, p_3, p_4 yra keturi skirtingi pirminiai skaičiai, tenkinantys lygybes

$$2p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7p_4 = 162,$$
$$11p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 = 162.$$

Raskite visas įmanomas sandaugos $p_1p_2p_3p_4$ reikšmes.

3. $ABCD$ yra kvadratas, o ABE – lygiakraštis trikampis, esantis kvadrato išorėje ir turintis su juo bendrą kraštinę AB. Kam lygus trikampio CDE apibrėžtinio apskritimo spindulys, jei kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 1?



4. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, c), kad a, b ir c būtų stačiojo trikampio, kurio plotas lygus $a + b + c$, kraštinių ilgiai.