9-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Nagrinėjant pirmuosius sekos narius $2 = \frac{4}{2}$, $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$, $\frac{14}{13} = \frac{28}{26}$, …, galima pastebėti, kad jie tenkina lygybę

$$a_n = \frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}-1}.$$

Kad ši lygybė teisinga visiems sekos nariams, galima įrodyti pagal indukciją. Jau žinome, kad lygybė teisinga, kai $n = 0$ (indukcijos bazė). Jei ji teisinga, kai $n = m$, tai kai $n = m+1$, turime

$$a_{m+1} = \frac{2a_m+1}{a_m+2} = 2 - \frac{3}{a_m+2} = 2 - \frac{3(3^{m+1}-1)}{3^{m+1}+1+2(3^{m+1}-1)} =$$
$$= 2 - \frac{3^{m+2}-3}{3^{m+2}-1} = \frac{3^{m+2}+1}{3^{m+2}-1},$$

t. y. lygybė ir vėl teisinga (indukcijos žingsnis).

Belieka įrodyti nelygybes

$$1 < \frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}-1} = 1 + \frac{2}{3^{n+1}-1} < 1 + \frac{1}{3^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Jos teisingos, nes

$$0 < \frac{2}{3^{n+1}-1} = \frac{2}{(3-1)(3^n+3^{n-1}+\ldots+1)} = \frac{1}{3^n+3^{n-1}+\ldots+1} < \frac{1}{3^n},$$

kai $n = 1, 2, 3, \ldots$

Įrodyta.

2. Ats. 112.

Pradinėje situacijoje kortas iš eilės nuo viršaus padalykime į 15 krūvelių po atitinkamai 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3 kortas. Gauname septynis kortų ketvertus. Jiems priklausančias kortas pažymėkime. Po kiekvieno ėjimo žymėtų bei nežymėtų kortų seka malkoje nepakinta ir lygiai vienas žymėtų kortų ketvertas apverčiamas priešinga puse. Be to, septyni ketvertai yra apverčiami iš eilės vienas po kito. Po 7 ėjimų visos žymėtos kortos bus apverstos, o dar po 7 – atvirs ta puse kaip pradžioje. Taigi žymėtos kortos gulės malkoje reikiamu būdu po 14, 28, 42, …

ėjimų. Analogiškai gauname, kad nežymėtos kortos, sudarančios 8 trejetus, gulės malkoje reikiamu būdu po 16, 32, 48, … ėjimų. Vadinasi, Tomas sustos po $\mathrm{MBK}(14, 16) = 112$ ėjimų.

3. Pažymėkime $\angle ACB = \alpha$ ir $\angle CBF = \beta$. Tada

$$AE : CF = 2AE : (2CF) = AD : AC = \sin\alpha = AB : BC$$

ir $AE : AB = CF : CB$. Be to, $\angle EAB = 90° - \angle ABD = \angle FCB$. Todėl $\triangle EAB \sim \triangle FCB$ (dvi kraštinės ir kampas tarp jų) ir $\angle ABE = \angle CBF = \beta$.

Kita vertus, $\angle EFB = \angle CBF = \beta$ ($EF||BC$ kaip $\triangle ACD$ vidurio linija; priešiniai kampai) ir $\angle BME = 2\angle EFB = 2\beta$ (centrinis ir atitinkamas įbrėžtinis kampai). Trikampis BME lygiašonis, todėl jo kampas prie pagrindo lygus $\angle EBM = (180° - \angle BME) : 2 = 90° - \beta$. Vadinasi, $\angle ABM = \angle EBM + \angle ABE = 90° - \beta + \beta = 90°$. Tada $AB \perp BM$ ir $AC||BM$.

4. Skaičiaus $n(n+3)$, kai $n \in \mathbb{N}$, skirtingų nelyginių pirminių daliklių skaičių žymėsime $d(n)$.

Imkime bet kokį $n \in \mathbb{N}$. Skaičiai $n(n+3)$ ir $(n+1)(n+4)$ neturi bendrų nelyginių pirminių daliklių (jei turėtų tokį daliklį p, tai jis dalytų vieną iš keturių skirtumų $(n+1)-n$, $(n+4)-n$, $(n+1)-(n+3)$, $(n+4)-(n+3)$). Todėl skaičius $n(n+1)(n+3)(n+4) = m(m+3)$, kur $m = n(n+4)$, turi $d(n(n+4)) = d(n) + d(n+1)$ skirtingų nelyginių pirminių daliklių.

Tarkime, kad uždavinio teiginys klaidingas. Tada egzistuoja toks $M \in \mathbb{N}$, kad $d(n)$ nesidalija iš 3, jei $n \in \mathbb{N}$ ir $n > M$. Tokiems n skaičiai $d(n)$ ir $d(n+1)$ nesidalija iš 3 ir visada dalijasi iš 3 su ta pačia liekana (jei liekanos būtų skirtingos, tai $d(n(n+4))$ dalytųsi iš 3). Tada visi skaičiai $d(M+1)$, $d(M+2)$, … dalijasi iš 3 su ta pačia nenuline liekana. Kai, pvz., $n = M+1$, tai moduliu 3 turime $d(n) \equiv d(n(n+4)) \equiv d(n) + d(n+1) \equiv 2d(n)$. Bet tada $d(n) \equiv 0 \pmod 3$, kai $n = M+1 > M$. Gavome prieštarą.

Vadinasi, uždavinio teiginys teisingas.