8-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. $a+b^2 = a\cdot 1+b = a(a+b+c)+b^2 = (a^2+b^2)+a(b+c) \geqslant 2ab+a(b+c)$, todėl
$$\frac{a}{a+b^2} \leqslant \frac{a}{2ab+a(b+c)} = \frac{1}{3b+c}.$$
Tačiau
$$3b+c = \frac{b+b+b+c}{4}\cdot 4 \geqslant \frac{4}{b^{-1}+b^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}\cdot 4 = \frac{16}{3b^{-1}+c^{-1}}$$
(pritaikėme aritmetinio ir harmoninio vidurkių nelygybę)
$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{a+b^2} \leqslant \frac{1}{3b+c} \leqslant \frac{3b^{-1}+c^{-1}}{16}.$$
Analogiškos nelygybės galioja ir $\frac{b}{b+c^2}$ bei $\frac{c}{c+a^2}$, todėl kairioji duotos nelygybės pusė ne didesnė nei
$$\frac{3b^{-1}+c^{-1}}{16} + \frac{3c^{-1}+a^{-1}}{16} + \frac{3a^{-1}+b^{-1}}{16} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

2. Ats. Taip.

   Nagrinėkime 7 mokinius, laimėjusius pirmąsias varžybas. Kiekvienas kitas iš 43 varžybų laimėjo lygiai vienas iš jų. Pagal Dirichlė principą vienas iš šių 7 mokinių laimėjo bent 7 iš 43 varžybų (nes 43/7>6). Taigi yra $7+1=8$ varžybos, kuriose šis mokinys X laimėjo. Šiose varžybose laimėjusių mokinių aibes pažymėkime $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Pagal uždavinio sąlygą bet kurių dviejų aibių sankirtoje yra lygiai vienas mokinys – ir tai yra mokinys X.

   Dabar nagrinėkime bet kurias vienerias iš likusių 36 varžybų. Jas laimėjusių 7 mokinių aibę pažymėkime B. Kiekvienoje iš aibių A_1, A_2, $\ldots, A_8$ yra po lygiai vieną mokinį iš B. Pagal Dirichlė principą ($8/7 > 1$) vienas iš 7-ių aibės B mokinių priklauso dviem skirtingoms aibėms A_i ir A_j, todėl turi sutapti su jų vieninteliu bendru elementu X. Taigi $X \in B$, t. y. X laimėjo bet kurias iš 36 varžybų. Vadinasi, mokinys X laimėjo visas varžybas.

3. Pažymėkime $\angle BED = \angle CED = \alpha$. Turime $BF : BD = BE : BD = CE : CD$ (pusiaukampinės DE savybė) ir $\angle FBD = \angle ECD$ (trikampis ABC lygiašonis), todėl $\triangle BFD \sim \triangle CED$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Taigi $\angle BFD = \angle CED = \angle BED$, o ši kampų lygybė parodo, kad keturkampis $BDEF$ įbrėžtinis.

   Kita vertus,

$$AF = EC \Leftrightarrow BF = AE \text{ (nes } AB = AC) \Leftrightarrow BE = AE \Leftrightarrow$$
$$\angle BAE = \angle ABE \text{ (lygiašonis trikampis } ABE)$$

   Kadangi $\angle BAE + \angle ABE = \angle BEC = 2\alpha$ (priekampis), tai

$$\angle BAE = \angle ABE \Leftrightarrow \angle ABE = \alpha \Leftrightarrow \angle BED = \angle FBE \Leftrightarrow BD = EF$$

   (kadangi ketrurkampis $BDEF$ įbrėžtinis, tai kraštinės BD ir EF lygios tada ir tik tada, kai lygūs į jas besiremiantys įbrėžtiniai kampai). Taigi $AF = EC \Leftrightarrow BD = EF$.

4. Ats. Natūraliųjų skaičių n, tenkinančių sąlygą, nėra.

   Tarkime, kad $7^n - 1$ dalijasi iš $6^n - 1$. Kadangi $6^n - 1$ dalijasi iš $6 - 1 = 5$, tai ir $7^n - 1$ dalijasi iš 5. Jei $n = 4k + r$ (čia r yra n dalybos iš 4 liekana), tai $0 \equiv 7^n - 1 \equiv (7^4)^k \cdot 7^r - 1 \equiv 1^k \cdot 7^r - 1 \equiv 7^r - 1 \pmod 5$. Iš keturių reikšmių 0, 1, 2, 3 sąlygą $7^r \equiv 1 \pmod 5$ tenkina tik $r = 0$. Tačiau tada $6^n - 1 = 36^{2k} - 1$ dalijasi iš $36 - 1 = 5 \cdot 7$, o skaičius $7^n - 1$ dalijasi iš 7. Gavome prieštarą.