7-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

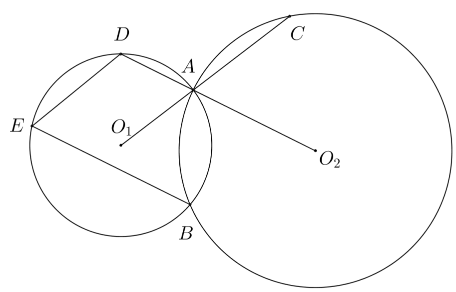
Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. $(x, y) = (0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   Kadangi $y - x^2 - xy \geqslant 0$, tai
   $$3xy \geqslant y^2 + y + \sqrt{y - x^2 - xy} \geqslant y^2 + x^2 + xy + \sqrt{y - x^2 - xy}$$
   ir
   $$0 \geqslant (x - y)^2 + \sqrt{y - x^2 - xy}.$$
   Taigi $x - y = 0$ ir $y - x^2 - xy = 0$. Tada $x = y$, $x = 2x^2 \implies x = y = 0$ arba $x = y = \frac{1}{2}$. Abu sprendiniai tenkina pradinę nelygybę.

2. Nagrinėkime situaciją, pavaizduotą brėžinyje.



   Lygiašonio trikampio ADO_1 kampus prie pagrindo pažymėkime α. Tiesės AO_1 ir AD kertasi kampu α, todėl taip pat kertasi ir joms atitinkamai lygiagrečios tiesės DE ir BE, t. y. $\angle BED = \alpha$. Apskritime ω_1 turime $\angle BAD = 180° - \angle BED = 180° - \alpha = 180° - \angle ADO_1$. Taigi $AB||DO_1$ ($\angle ADO_1$ ir $\angle BAD$ vienašaliai) $\implies O_1O_2 \perp AB \implies O_1O_2 \perp DO_1$.

   Kampai DAO_1 ir CAO_2 lygūs kaip kryžminiai. Lygiašonio trikampio ACO_2 kampai prie pagrindo taip pat lygūs α. Kadangi $\angle O_1DO_2 = = \alpha = \angle O_1CO_2$, tai taškai C, D, O_1, O_2 priklauso vienam apskritimui ir $\angle DCO_2 = 180° - \angle DO_1O_2 = 90°$. Tai ir reikėjo įrodyti.

   Pastaba. Galimos kitokios taškų padėtys brėžinyje. Pvz., taškai A, C, O_1 gali būti išsidėstę tiesėje kita tvarka. Įrodymas lieka analogiškas: reikšdami kampus BED, BAD, CAO_2, ACO_2 per α, gauname, kad $AB||DO_1$ ir taškai C, D, O_1, O_2 priklauso apskritimui.

3. Tarkime, kad n-tojoje eilutėje yra a_n skirtingų skaičių, o n-tajame stulpelyje yra b_n skirtingų skaičių, $n = 1, 2, \ldots, 17$. Tarkime, kad skaičius n priklauso c_n eilučių ir d_n stulpelių, $n = 1, 2, \ldots, 17$. Visų skaičių a_n ir b_n sumą pažymėkime S. Sumoje po vieną kartą įskaičiuotas kiekvienas bet kurio skaičiaus priklausymo konkrečiai eilutei ar stulpeliui atvejis, todėl ji taip pat lygi visų skaičių c_n ir d_n sumai. Skaičius n gali būti tik vienos iš c_n eilučių ir vieno iš d_n stulpelių sankirtoje. Tokių sankirtų yra $c_n d_n$, o skaičius įrašytas 17 kartų. Todėl $c_n d_n \geqslant 17 \implies c_n + d_n \geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{c_n d_n} \geqslant 2\sqrt{17} > 8$, kai $n = 1, 2, \ldots, 17 \implies S > 17 \cdot 8 = 34 \cdot 4$. Pagal Dirichlė principą vienas iš 34 skaičių a_n ir b_n didesnis už 4. Tai ir reikėjo įrodyti.

4. Ats. a) Taip; b) 30.

   a) Kadangi $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, tai verta nagrinėti išraiškas $a = 5x$, $b = 13y$ ir $c = 31z$. Tarkime, kad x, y, z yra natūralieji skaičiai, x nesidalija nei iš 13, nei iš 31, y nei iš 5, nei iš 31, o z nei iš 5, nei iš 13, ir tegu $a + b + c = 2015$. Tada $\text{DBD}(a, b, c)$ dalija $a + b + c =$ $= 2015$, bet nesidalija nei iš 5 (nes $b = 13y$ nesidalija iš 5), nei iš 13 ar 31. Todėl $\text{DBD}(a, b, c) = 1$. Be to, $\text{DBD}(a, b + c) =\text{DBD}(a, a + b +$ $+ c) =\text{DBD}(5x, 2015) = 5 > 1$, panašiai tenkinamos ir kitos dvi nelygybės. Nagrinėdami lygybę $5x + 13y + 31z = 5 \cdot 13 \cdot 31$, pastebėkime, kad $5x + 13y$ dalijasi iš 31. Belieka pasirinkti $x = 1, y = 2$ (nes tada $5x + 13y = 31$) ir rasti $z = (65 \cdot 31 - 31)/31 = 64$. Žinoma, sprendime pakaktų užrašyti sprendinį $(a, b, c) = (5, 26, 31 \cdot 64)$ ir patikrinti, kad jis tenkina uždavinio sąlygą. Šis sprendinys ne vienintelis.

   b) Pažymėkime $d_1 =\text{DBD}(a, b+c)$, $d_2 =\text{DBD}(b, c+a)$, $d_3 =\text{DBD}(c, a+$ $+ b)$. Tada $\text{DBD}(d_1, d_2)$ dalija skaičius a, b, $c + a$, todėl ir $c = a + c - a$ bei $\text{DBD}(a, b, c) = 1$. Taigi $\text{DBD}(d_1, d_2) = 1$. Analogiškai d_1 ir d_3 bei d_2 ir d_3 yra tarpusavyje pirminiai. Taigi skaičiai d_1, d_2, $d_3 > 1$ turi po skirtingą pirminį daliklį p_1, p_2, p_3. $a + b + c$ dalijasi iš d_1, d_2 ir d_3, todėl iš $p_1 p_2 p_3 \geqslant 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Vadinasi, $a + b + c \geqslant 30$.

   $a + b + c = 30$, kai $(a, b, c) = (2, 3, 25)$.

   Pastaba. $a + b + c$ gali įgyti visas natūraliąsias reikšmes n, turinčias bent tris skirtingus pirminius daliklius p_1, p_2, p_3. Tegu $p_1 > p_3$, o x yra mažiausias natūralusis skaičius, su kuriuo $p_1 + p_2 x$ dalijasi iš p_3. Tada galima pasirinkti $a = p_1, b = p_2 x$ bei $c = n - a - b$.