6-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats.: $f(x) \equiv 0$ ir $f(x) \equiv x$.

   Tarkime, kad $f(x) = f(y) = a$ ir $x \neq y$. Tada $ax + a = xf(y) + f(x) = f(xy + f(x)) = f(yx + f(y)) = yf(x) + f(y) = ay + a \implies a(x - y) = 0 \implies a = 0$. Vadinasi, jei $f(x) = f(y)$, tai arba $x = y$, arba $f(x) = f(y) = 0$.

   Pradinėje lygtyje įrašę $x = 0$, gauname $f(a) = f(b)$, kur $a = f(0)$, $b = 0$. Tada arba $a = b$, arba $f(b) = 0$. Abiem atvejais $f(0) = 0$.

   Pradinėje lygtyje įrašę $y = 0$, gauname $f(f(x)) = f(x)$. Tada kiekvienam $x \in \mathbb{R}$ turime arba $f(x) = x$, arba $f(x) = 0$. Nagrinėkime du atvejus.

   1) Tarkime, lygybė $f(x) = 0$ galioja kokiam nors $x = x_0 \neq 0$. Kiekvienam $x \in \mathbb{R}$ turime $f(xx_0 + f(x)) = xf(x_0) + f(x) = f(x)$. Tada arba $xx_0 + f(x) = x$, arba $f(x) = 0$. Jei $f(x) \neq 0$ kokiam nors x, tai $f(x) = x$ ir $xx_0 + f(x) = x$, todėl $xx_0 = 0 \implies x = 0$ ir $f(x) = 0$, prieštara. Vadinasi, šiuo atveju $f(x) = 0$, kai $x \in \mathbb{R}$.

   2) Tarkime, $f(x) \neq 0$ visiems $x \neq 0$. Tada $f(x) = x$, kai $x \in \mathbb{R}$.

   Abi gautos funkcijos tenkina uždavinio sąlygą.

2. Kadangi $\angle PAB = \angle PBC$, tai trikampio ABP apibrėžtinis apskritimas liečia tiesę BC. Kadangi $\angle PBA = \angle ABC - \angle PBC = \angle BAC - \angle PAB = \angle PAC$, tai šis apskritimas analogiškai liečia ir tiesę AC. Tada tiesė PC yra trikampio ABP simediana iš viršūnės P (simedianos savybė, kartais vadinama „simedianos lema”). Tai reiškia, kad tiesė PC yra simetriška pusiaukraštinės tiesei PM trikampio ABP pusiaukampinės iš viršūnės P atžvilgiu. Tada kampas APM lygus simetriškam kampui tarp $\overrightarrow{CP}$ ir $\overrightarrow{PB}$. Pastarasis kampas ir $\angle BPC$ yra gretutiniai, todėl $\angle APM = 180^\circ - \angle BPC$. Įrodyta.

3. Ats.: $n = 4$.

   Lentelė 4×4 gali būti nudažyta taip: juodai nudažoma viena iš dviejų keturlangių įstrižainių I, trilangė įstrižainė, esanti vienoje pusėje nuo I, ir kampinis langelis kitoje pusėje.

   Įrodysime, kad $n < 5$. Tarkime, kad 5×5 lentelė tenkina uždavinio sąlygą. (Jei $n \times n$ lentelė tenkina sąlygą, tai ir jos mažesnė kvadratinė dalis tenkina sąlygą, todėl užtenka išnagrinėti atvejį $n = 5$.)

   Kiekvienoje lentelės eilutėje yra arba daugiau juodų, arba daugiau baltų langelių. Galime laikyti, kad pirmosios rūšies eilučių yra daugiau (priešingas atvejis analogiškas). Tada lentelėje yra trys eilutės, kuriose yra bent po tris juodus langelius, iš viso mažiausiai 9 juodi langeliai. Kitas dvi eilutes išbraukime ir nagrinėkime likusią 3×5 lentelę.

   Jei viename iš stulpelių yra trys juodi langeliai, tai likusiuose keturiuose stulpeliuose yra daugiausiai po vieną juodą langelį. Iš viso gauname daugiausiai $3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$ juodus langelius. Prieštara.

   Vadinasi, stulpeliuose yra daugiausiai po du juodus langelius. Jei keturiuose stulpeliuose būtų po du juodus langelius, tai dviejuose iš tų stulpelių juodi langeliai patektų į tas pačias dvi eilutes. Todėl yra daugiausiai trys stulpeliai su dviem juodais langeliais, o juodų langelių yra daugiausiai $2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$. Gavome prieštarą. Vadinasi, $n < 5$.

4. Ats.: $n = 75$.

   Didžiausią skaičiaus n daliklį $D(n) < n$ gausime padaliję n iš mažiausio **pirminio** daliklio p. Tada $n + D(n) = pD(n) + D(n) = (p+1)D(n)$ turi būti skaičiaus 10 laipsnis. Skaičius $(p + 1)D(n) = 10^k$ nesidalija iš 3, todėl $p \neq 2$ ir $p \neq 5$. Kadangi $p \neq 2$, tai n yra nelyginis skaičius. Tada $D(n)$ yra nelyginis skaičius, dalijantis 10^k, todėl jis yra skaičiaus 5 laipsnis. Jei $D(n) = 5^0 = 1$, tai skaičius $p = \frac{10^k}{D(n)} - 1 = 10^k - 1$ dalijasi iš 9 ir nėra pirminis. Vadinasi, $D(n)$ bei tuo labiau n dalijasi iš 5, o tada $p \leqslant 5$. Taigi, $p = 3$ ir $10^k = 4D(n)$. Kadangi 10^k dalijasi iš 4, bet ne iš 8, tai $k = 2$ ir $D(n) = 10^2 : 4 = 25$. Skaičius $n = pD(n) = 75$ tenkina uždavinio sąlygą.