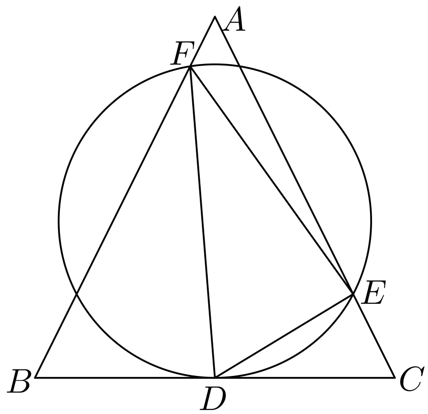
5-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Pažymėkime $f(x) = ax + b$ ir $g(x) = cx + d$, čia $a, c > 0$. Kadangi $f(-\frac{b}{a}) = 0$ ir $f(\frac{1-b}{a}) = 1$ yra sveikieji skaičiai, tai ir $g(-\frac{b}{a})$ bei $g(\frac{1-b}{a})$ yra sveikieji skaičiai. Tada skirtumas $g(\frac{1-b}{a}) - g(-\frac{b}{a}) = \frac{c}{a}$ taip pat yra sveikasis skaičius. Kadangi $\frac{c}{a} > 0$, tai $\frac{c}{a} \geqslant 1$. Analogiškai (sukeitus f ir g vietomis) įrodoma, kad $\frac{a}{c} \geqslant 1$. Taigi, $a \geqslant c$, $c \geqslant a$, ir gauname, kad $a = c$. Tada kiekvienam $x \in \mathbb{R}$ skirtumas $f(x) - g(x) = b - d = f(-\frac{b}{a}) - g(-\frac{b}{a})$ yra sveikasis skaičius.

2. Tiesė BC liečia apskritimą EDF tada ir tik tada, kai įbrėžtiniam kampui DFE lygus kampas CDE (kaip ribinis įbrėžtinio kampo, besiremiančio į tą patį lanką, atvejis).



Pažymėkime $\alpha = \angle ABC = \angle ACB = \angle EDF$, $\beta = \angle CDE$. Tada $\angle BDF = 180° - \angle EDF - \angle CDE = 180° - \alpha - \beta$ ir $\angle BFD = 180° - \angle DBF - \angle BDF = 180° - \alpha - (180° - \alpha - \beta) = \beta$. Vadinasi, trikampiai BDF ir CED panašūs (lygūs kampai $\angle FBD = \angle DCE = \alpha$ ir $\angle DFB = \angle EDC = \beta$) ir $\frac{BD}{CE} = \frac{DF}{ED}$. Tada

$$BD = CD \Leftrightarrow \frac{BD}{CE} = \frac{CD}{CE} \Leftrightarrow \frac{DF}{ED} = \frac{CD}{CE}.$$

Jei $BD = CD$, tai $\frac{DF}{ED} = \frac{CD}{EC}$ ir $\angle EDF = \angle ECD$. Tada $\triangle EDF \sim \triangle ECD$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų) $\Longrightarrow$ $\angle DFE = \angle CDE \Longrightarrow BC$ liečia apskritimą EDF.

Jei BC liečia apskritimą EDF, tai $\angle DFE = \angle CDE = \beta$ ir $\angle EDF = = \angle ECD = \alpha \implies \triangle EDF \sim \triangle ECD$ (pagal lygius kampus) ir $\frac{DF}{ED} = \frac{CD}{EC} \implies BD = CD$.

Įrodyta.

3. Ats.: pergalės strategiją turi žaidėjas A.

Jei lentoje užrašytas vienas iš skaičių 1, 2, ..., 9, tai jis ėjimą darančiam žaidėjui laimingas – žaidėjas gali iš karto laimėti, užrašęs konkurentui nelaimingą skaičių 0. Skaičius 10 nelaimingas, nes žaidėjas turi užrašyti skaičių $10 - 1 = 9$, kuris laimingas jo konkurentui. Skaičiai 11, 12, ..., 19 laimingi, nes žaidėjas gali gauti konkurentui nelaimingą skaičių 10. Toliau panašiai iš eilės imant skaičius, galima nustatyti kiekvieno natūraliojo skaičiaus n laimingumą: jei bent vienas mažesnis skaičius, kuriuo galima pakeisti n, nelaimingas, tai pats skaičius n laimingas, o jei visi mažesni skaičiai, kuriais galima pakeisti n, laimingi, tai n nelaimingas. Reikia nustatyti skaičiaus $n_0 = 1234567890$ laimingumą. Bet kurio natūraliojo skaičiaus n skaitmenų sumą žymėsime $s(n)$.

Jei skaičius n, nedalus iš 10, nelaimingas, tai $n > 19$, skaičius $n - 1$ laimingas ir $s(n-1) = s(n) - 1$. Tada kažkoks skaičius $n - 1 - k$, kuriuo galima pakeisti $n - 1$, nelaimingas. Čia $k \leqslant s(n-1) = s(n) - 1$. Tokiu atveju $k + 1 \leqslant s(n)$, ir jau skaičių n galima pakeisti nelaimingu skaičiumi $n - 1 - k$. Bet tada skaičius n laimingas. Vadinasi, bet kuris natūralusis skaičius, nedalus iš 10, laimingas.

Jei skaičius n_0 nelaimingas, tai skaičius $n_1 = n_0 - 10 = 1234567880$, kuriuo jį galima pakeisti, laimingas. Tada vienas iš skaičių $n_1 - 1$, $n_1 - 2$, ..., $n_1 - s(n_1) = n_1 - 44$ turi būti nelaimingas. Nelaimingas skaičius dalijasi iš 10, todėl tai gali būti tik $n_1 - 10$, $n_1 - 20$, $n_1 - 30$ arba $n_2 = n_1 - 40$. Pirmais trimis atvejais nelaimingas skaičius būtų toks, kuriuo galima pakeisti ir skaičių n_0, todėl skaičius n_0 būtų laimingas. Vadinasi, jei skaičius n_0 nelaimingas, tai ir skaičius $n_2 = 1234567840$ nelaimingas.

Analogiškai, jei skaičius n_2 nelaimingas, tai skaičius $n_3 = n_2 - 10$ laimingas, o vienas iš skaičių $n_3 - 1$, $n_3 - 2$, ..., $n_3 - s(n_3) = n_3 - 39$ nelaimingas. Tai gali būti tik vienas iš skaičių $n_3 - 10$, $n_3 - 20$ arba $n_3 - 30$. Bet kurį iš šių trijų skaičių galima parašyti vos nutrynus n_2, todėl jei bent vienas iš jų nelaimingas, tai skaičius n_2 laimingas.

Vadinasi, skaičius n_2, o todėl ir skaičius n_0 laimingi. Tai reiškia, kad žaidėjas A gali laimėti, nepriklausomai nuo to, kaip žais B.

4. Ats.: $n = 2^k - 2,\ k = 2, 3, \ldots$

Jei skaičius n ypatingas, tai skaičius $\binom{n}{i} + \binom{n}{0} - i - 0 = \binom{n}{i} + 1 - i$ lyginis. Tada skaičių i bei $\binom{n}{i}$ lyginumas skiriasi. Kita vertus, jei taip yra kiekvienam $i = 0, 1, \ldots, n$, tai skaičiai $\binom{n}{i} - i$ ir $\binom{n}{j} - j$ nelyginiai, o jų suma $\binom{n}{i} + \binom{n}{j} - i - j$ lyginė. Vadinasi, kad skaičius n būtų ypatingas, būtina ir pakanka, kad binomo koeficientų sekoje $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ lyginis būtų kas antras skaičius. Remiantis Paskalio taisykle $\binom{m}{i} + \binom{m}{i+1} = \binom{m+1}{i+1}$ ir lygybe $\binom{m}{0} = 1$, taip bus tada ir tik tada, kai sekoje $\binom{n+1}{0}, \binom{n+1}{1}, \ldots, \binom{n+1}{n+1}$ visi skaičiai nelyginiai. Remiantis lygybėmis $\binom{n+1}{i+1} = \binom{n+1}{i} \cdot \frac{n+1-i}{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, n$, ir $\binom{n+1}{0} = 1$, taip bus tada ir tik tada, kai kiekvienos iš trupmenų $\frac{n+1-i}{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, n$, skaitiklis dalijasi iš to paties didžiausio galimo dvejeto laipsnio, kaip ir vardiklis.

Jei $n + 2 = 2^k$ yra dvejeto laipsnis, tai $i + 1 < 2^k$, todėl skaitiklis $n + 1 - i = 2^k - (i + 1)$ visada dalijasi iš to paties dvejeto laipsnio, kaip ir vardiklis $i + 1$. Vadinasi, skaičiai $n = 2^k - 2$, kai $k = 2, 3, \ldots$, yra ypatingi.

Jei $n+2$ nėra dvejeto laipsnis, tai didžiausią dvejeto laipsnį, ne didesnį už $n + 1$, pažymėkime 2^k. Tada $n + 1 < 2^{k+1}$. Pasirinkus $i = 2^k - 1$, vardiklis $i + 1$ dalijasi iš 2^k, o skaitiklis $n + 1 - i = n + 2 - 2^k$ nesidalija, nes $n + 2 \neq 2^k, 2^{k+1}$ ir $n + 2 < 3 \cdot 2^k$. Vadinasi, šiuo atveju skaičius n negali būti ypatingas.