I LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA (1986)

1. Raskite lygčių sistemos
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz, \\ x^2 = 2(x+y+z) \end{cases}$$
natūraliuosius sprendinius.

2. Raskite lygties $(x-[x])^2 = x^2 - [x^2]$ sprendinių, priklausančių intervalui $]1, 1986[$, skaičių. Čia $[x]$ – sveikoji skaičiaus x dalis.

3. Išspręskite lygtį
$$x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2} = a^2, \qquad (a > 0).$$

4. Išspręskite nelygybę
$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}.$$

5. Raskite sumą
$$S = \sin^4 \alpha + \frac{1}{4}\sin^4 2\alpha + \ldots + \frac{1}{4^n}\sin^4 2^n\alpha.$$

6. Ar $\dfrac{600!}{7^{99}}$ yra sveikasis skaičius?

7. Įrodykite: jei dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma dalijasi iš 21, tai ji dalijasi ir iš 441.

8. Skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sudaryti pagal taisyklę:
$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n teisingos nelygybės $\frac{1}{5} < x_n \leq 2$.

9. Plokštumoje duota n taškų ($n \geq 4$). Bet kurio keturkampio su viršūnėmis duotuose taškuose plotas ne didesnis už 1. Įrodykite, kad galima rasti padengiantį visus taškus keturkampį, kurio plotas lygus 2.

10. Duotąjį trikampį dviejomis tiesėmis padalykite į tris dalis taip, kad iš jų būtų galima sudaryti stačiakampį.

11. Vienetiniame skritulyje su centru taške O stygos PQ ir MN lygiagretės spinduliui OR. (Tiesė MN yra tarp tiesių PQ ir OR.) Žinoma, kad $|MP| = |PQ| = |NR| = s$, $|MN| = d$. Kurios iš šių lygybių yra teisingos:

    1) $d - s = 1$,

    2) $d \cdot s = 1$,

    3) $d^2 - s^2 = \sqrt{5}$?

12. Kairiajame apatiniame šachmatų lentos kampe stovi šaškė. Du žaidėjai paeiliui perkelia šaškę į gretimą langelį viena iš trijų galimų krypčių: dešinėn, aukštyn arba „šiaurės rytų” kryptimi. Laimi tas žaidėjas, kuris savo ėjimu pastato šaškę į dešinįjį viršutinį lentos langelį. Ar gali pradedantysis žaidėjas visada laimėti nepriklausomai nuo antrojo žaidėjo ėjimų?

13. Duotas trikampis ABC. Vienu metu iš taško B kraštine BA ir iš taško A kraštine AC pradeda tolygiai judėti du taškai X ir Y. Taškai X ir Y pasieka atitinkamai taškus A ir C lygiai per 1 minutę. Raskite mažiausią atstumą tarp taškų X ir Y.

14. Skaičiai a_k, $k = 1, 2, 3, 4$, priklauso intervalui $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ir $\sum\limits_{k=1}^{4} \sin a_k = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{4} \cos 2a_k \geq \frac{10}{3}$. Įrodykite, kad $0 \leq a_k \leq \frac{\pi}{6}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

15. Tarp dviejų miestelių A ir C yra miestelis B, $|AB| = 2$ km, $|BC| = 3$ km. Miesteliuose A, B ir C gyvena atitinkamai 200, 100 ir 100 mokinių. Kurioje vietoje reikia statyti mokyklą, kad atstumų, kuriuos tektų nueiti visiems mokiniams iki mokyklos, suma būtų mažiausia?

16. Prie triženklio tiksliojo kvadrato prirašytas kitas triženklis tikslusis kvadratas. Gautasis šešiaženklis skaičius – taip pat tikslusis kvadratas. Raskite visus tokius skaičius.

17. Skritulys, kurio spindulys lygus 1, nudažytas trimis spalvomis. Įrodykite, kad yra bent du tokie vienos spalvos taškai, tarp kurių atstumas lygus 1.

18. Duota šachmatų lenta. Leidžiama perdažinėti vienu metu priešinga spalva visus kokios nors vienos vertikalės arba horizontalės langelius. Ar galima šitaip gauti lentą, kurios:

    a) visi langeliai balti?

    b) tik vienas langelis juodas?

19. Duotos dvi lygiagretės tiesės. Vienoje tiesėje duoti du taškai A ir B. Naudodamiesi tik liniuote, padalinkite atkarpą AB pusiau (naudojantis liniuote, galima nubrėžti tiesę per bet kuriuos du taškus ir gauti jos susikirtimo tašką su bet kuria kita tiese).

20. Taškai M ir N priklauso kvadrato $ABCD$ kraštinėms CD ir AD. Atkarpos BN ir AM kertasi taške P, CN ir AM – taške Q, o CN ir BM – taške R. Įrodykite, kad keturkampio $BRQP$ plotas lygus trikampių APN, CMR ir keturkampio $NQMD$ plotų sumai.

II LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA (1987)

1. Raskite visus tokius triženklius skaičius $\overline{abc}$, kad

$$\sqrt{\overline{abc}} = \overline{ab} - \sqrt{c}.$$

2. Sakykime, kad $a, b, c > 0$. Įrodykite, kad

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{1}{3}(a+b+c).$$

3. Taškas P trikampio ABC išorėje yra toks, kad trikampių PAB, PBC, PCA lygūs ir plotai, ir perimetrai. Įrodykite, kad trikampis ABC yra status.

4. Įstrižainės dalija trapeciją į keturis trikampius. Pažymėkime vieno iš šoninių trikampių plotą S_1, visos trapecijos plotą – S. Įrodykite, kad $S \geq 4S_1$.

5. Ar lygūs du lygiašoniai trikampiai, jei lygios jų šoninės kraštinės ir įbrėžtųjų apskritimų spinduliai?

6. Raskite lygties
$$\frac{1}{[x]} - \frac{1}{[2x]} = x - [x]$$
sprendinių skaičių intervale $[1; 1987]$; čia $[x]$ – sveikoji skaičiaus $[x]$ dalis.

7. Suprastinkite
$$\frac{2244851485148514627}{1989108910891088891}.$$

8. Medinio stačiakampio gretasienio aukštinės ilgis yra $6n$ (n – natūralusis skaičius), o pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi n. Gretasienis nudažomas raudonai ir supjaustomas į vienodus kubelius, kurių kraštinės ilgis lygus 1. Su kokiomis n reikšmėmis iš šių kubelių galima sudėti tuščiavidurį kubą, kurio kraštinės būtų lygios $2n$ ir kurio visas išorinis paviršius būtų raudonas?

9. Raskite didžiausią natūralųjį n, kuriam egzistuoja iškilas n-kampis, sudarytas iš nesikertančių stačiųjų trikampių su kampais, lygiais $30°$ ir $60°$.

10. Su kokiais pirminiais skaičiais p skaičius $2p + 1$ yra natūraliojo skaičiaus kubas?

11. Išspręskite nelygybių sistemą *(x ir y atžvilgiu)*:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq ax + by, \\ |a - b + y - x| \leq a + b - x - y, \\ |x - y| \leq -x - y. \end{cases}$$

12. Išspręskite lygtį $|x^2 - 2| + \left[\dfrac{x^2 - 1}{2}\right] = 1$ (čia $[y]$ yra skaičiaus y sveikoji dalis).

13. Duotas natūralinis skaičius n. Raskite tokius $(2n+1)$-ą iš eilės einančius natūraliuosius skaičius, kad pirmųjų $(n+1)$-o skaičiaus kvadratų suma būtų lygi paskutiniųjų n skaičių kvadratų sumai.

14. Iš kubelių, kurių kraštinės ilgis lygus 1, reikia sulipdyti tuščiavidurį kubą (be centrinio kubelio), kurio kraštinė lygi 3. Ar galima tai padaryti, dėliojant kubelius iš eilės po vieną taip, kad kiekvienas kubelis (pradedant nuo antrojo) turėtų bendrą sieną su paskutiniu prieš jį padėtu kubeliu?

15. Išspręskite nelygybę $\sin x > x - \dfrac{x^3}{4}$.

16. Keturios stačiakampio viršūnės yra atitinkamai keturiuose koncentriniuose apskritimuose. Trijų apskritimų spinduliai yra lygūs 1, 2 ir 3. Raskite ketvirtojo apskritimo spindulį.

17. Įrodykite nelygybę $\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}\right| \leq |b - c|$ su visais realiaisiais skaičiais a, b, c.

18. Ar egzistuoja tokios funkcijos f ir g, apibrėžtos realiųjų skaičių aibėje, kad su visais realiaisiais skaičiais x ir y būtų teisinga lygybė $f(x)g(y) = x + y + 1$?

19. Kokia didžiausia galima skaičiaus $|5a + 3b|$ reikšmė, jei žinoma, kad funkcijos $f(x) = |ax + b|$ reikšmės intervalo $[0, 1]$ taškuose ne didesnės už 1?

20. Raskite visus natūraliuosius skaičius n, su kuriais $2^n + 1$ nesidalija iš 3.

III LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA (1988)

1. Šimtas natūraliųjų skaičių $n_1, n_2, \ldots, n_{100}$ tenkina lygybę
$$\frac{1}{\sqrt{n_1}} + \frac{1}{\sqrt{n_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n_{100}}} = 20.$$
Įrodykite, kad bent du iš šių skaičių yra lygūs.

2. Išspręskite nelygybę $\quad \dfrac{1}{x} + ax > 1 \quad$ *(x atžvilgiu).*

3. Išspręskite lygtį $\quad [(x-1)^2] = [x] \quad$ (čia $[y]$ – sveikoji skaičiaus y dalis).

4. Sakykime, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Įrodykite, kad
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \le \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

5. Išreikškite skaičių $\underbrace{11\ldots11}_{1988}\underbrace{22\ldots22}_{1988}$ dviejų paeiliui einančių natūraliųjų skaičių sandauga.

6. Į apskritimą įbrėžto keturkampio įstrižainės statmenos. Įrodykite, kad atstumų nuo apskritimo centro iki keturkampio kraštinių suma lygi pusei keturkampio perimetro.

7. Pažymėkime $a_n = \operatorname{tg}^n 15° + \operatorname{ctg}^n 15°$. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju n
   a) a_n – natūralusis skaičius;
   b) trikampio su kraštinėmis $a_n - 1, a_n, a_n + 1$ plotas – natūralusis skaičius.

8. Plokštumoje yra n atkarpų ($n \ge 3$). Bet kurios trys atkarpos turi bendrą tašką. Įrodykite, kad visos atkarpos turi bendrą tašką.

9. Kiekviena iš trijų tiesių dalija iškiląjį daugiakampį į dvi lygiaplotes dalis. Įrodykite, kad tiesėmis apriboto trikampio plotas mažesnis už ketvirtadalį daugiakampio ploto.

10. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} x + y + z = 24, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 210, \\ x \cdot y \cdot z = 440. \end{cases}$$

11. Plokštumoje duoti trys taškai A, B, C, nesantys vienoje tiesėje. Kiek plokštumoje yra tiesių, vienodai nutolusių nuo taškų A, B, C?

12. Tarkime, kad skaičiai p ($p > 3$) ir $2p + 1$ yra pirminiai. Įrodykite, kad $4p + 1$ yra sudėtinis skaičius.

13. Įrodykite nelygybes
$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

14. Skaičiai a, b, c, d tenkina lygybes $\quad a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1, \quad ac + bd = 0$. Įrodykite, kad $ab + cd = 0$.

15. Viena iš keturių monetų – 1, 2, 3 ir 5 kapeikų vertės – yra netikra, t. y. sveria ne tiek, kiek turėtų. Kaip, naudojant tik svirtines svarstykles be svarelių, rasti netikrą monetą? (Pastaba. Tikros 1, 2, 3 ir 5 kapeikų vertės monetos sveria atitinkamai 1, 2, 3 ir 5 gramus.)

16. Raskite visus daugianarius $P(x)$, kurie su visomis x reikšmėmis tenkina lygtį

$$(x-1)\cdot P(x+1)-(x+3)\cdot P(x-1)=0.$$

17. Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$. Raskite geometrinę vietą šio keturkampio vidaus taškų M, su kuriais keturkampių $ABCM$ ir $ADCM$ plotai yra lygūs.

18. Ar galima skaičių 198719881989 išreikšti dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma?

19. Duoti skaičiai 1, 2, 3, …, 1 000 001. Bet kurie du iš jų nubraukiami ir parašomas jų skirtumas. Šis veiksmas kartojamas tol, kol liks tik vienas skaičius. Ar gali šis skaičius būti lygus 0?

20. Raskite visus sveikuosius skaičius x, su kuriais skaičius x^3+9x+2 yra sveikojo skaičiaus kubas.

IV LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA (1989)

1. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} y^5+y^5x^2-2x=0, \\ x^5+x^5z^2-2z=0, \\ z^5+z^5y^2-2y=0. \end{cases}$$

2. Išspręskite lygtį
$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=3\cdot 16^{x^3}.$$

3. Raskite lygties $2^x+4=y^2$ natūraliuosius sprendinius.

4. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju n lygtis $2^nx^2+y^2=z^2$ turi be galo daug natūraliųjų sprendinių.

5. Išspręskite lygtį $x+\sqrt{a+\sqrt{x}}=a,\ \ a\in\mathbb{R}$.

6. Sakykime, x, y, a tokie realieji skaičiai, kad $x+y=2a-4$, $xy=a^2-3a+5$. Raskite reiškinio x^2+y^2 mažiausią reikšmę.

7. Sakykime, a, b, c – teigiami skaičiai. Įrodykite nelygybę
$$(1+abc)\cdot\left(\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\right)\geq 3.$$

8. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius n, kurių skaitmenų sandauga lygi $n^2-10n-22$.

9. Sakykime, A, B, C – trikampio kampai. Įrodykite nelygybę
$$\left(\sin\frac{A}{2}\right)^{-1}+\left(\sin\frac{B}{2}\right)^{-1}+\left(\sin\frac{C}{2}\right)^{-1}\geq 6.$$

10. Realieji skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_{1989}$ tenkina sąlygas
$$a_1=0;\qquad |a_2|=|a_1+1|;\qquad |a_3|=|a_2+1|;\qquad \ldots\qquad |a_{1989}|=|a_{1988}+1|.$$
Įrodykite nelygybę
$$a_1+a_2+\ldots+a_{1989}\geq -\frac{1989}{2}.$$

11. Komandinės jaunųjų matematikų olimpiados metu kiekvienas iš penkių komandos narių buvo du kartus užsnūdęs. Vėliau paaiškėjo, kad kiekviena komandos narių pora kažkuriuo metu miegojo kartu. Įrodykite, kad buvo toks laiko momentas, kada miegojo daugiau nei pusė komandos.

12. Ar teisingas teiginys „trumpiausioji pusiaukraštinė ne ilgesnė už ilgiausiąją kraštinę”?

13. Kvadrato, kurio kraštinė lygi 12, viduje yra 1989 taškai. Įrodykite, kad lygiakraščiu trikampiu, kurio kraštinė lygi 11, galima uždengti ne mažiau kaip 498 taškus.

14. Ar galima stačiakampyje 3×4 taip pažymėti 6 taškus, kad atstumas tarp bet kurių pažymėtų taškų būtų ne mažesnis už $13/6$?

15. Iškilojo penkiakampio įstrižainės dalija kiekvieną vidaus kampą į tris lygius kampus. Įrodykite, kad penkiakampis taisyklingas.

16. Į kokį mažiausią skaičių trikampių piramidžių galima suskaidyti kubą?

17. Duoti natūralieji skaičiai a, b, n. Žinoma, kad su kiekvienu natūraliuoju k ($k \neq b$) skaičius $k^n - a$ dalijasi iš $k - b$. Įrodykite, kad $a = b^n$.

18. Apskaičiuokite $\max\limits_{x,y>0} \min\left(x; \dfrac{1}{y}; y + \dfrac{1}{x}\right)$.

19. Nurodykite tokį sudėtinį skaičių $n > 100$, kuris, užrašytas trejetainėje skaičiavimo sistemoje, lieka sudėtiniu, pakeitus bet kuriuos du jo skaitmenis.

20. Kvadratinio trinario $p(x) = ax^2 + bx + c$ su sveikaisiais koeficientais reikšmės $p(3)$ ir $p(6)$ yra nelyginiai skaičiai. Ar sveikasis skaičius gali būti šio trinario šaknis?

V LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA (1990)

1. Raskite visas parametro a reikšmes, su kuriomis lygties
$$x^2 - ax + 5a = 0$$
sprendiniai yra sveikieji skaičiai.

2. Trys natūralieji skaičiai m, n ir k tenkina nelygybę
$$S = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < 1.$$
Raskite didžiausią sumos reikšmę.

3. Stačiakampio $ABCD$ viduje pažymėtas toks taškas M, kad $\angle BMC + \angle AMD = 180°$. Raskite kampų BCM ir DAM sumą.

4. Įrodykite, kad kiekvieną kvadratą $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, $n \neq 7$) galima sudėti iš kvadratų 2×2, 3×3 ir 5×5.

5. Iškilojo daugiakampio viršūnių koordinatės yra sveikieji skaičiai, o kiekvienos kraštinės ilgis mažesnis už 5. Kiek daugiausiai viršūnių gali turėti toks daugiakampis?

6. Trys apskritimai liečia vienas kitą iš išorės. Įrodykite, kad trys liestinės, nubrėžtos per jų sąlyčio taškus, kertasi viename taške.

7. Raskite lygties $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{n}$ natūraliuosius sprendinius.

8. Įrodykite, kad iš bet kurių trijų trikampių galima sudėti (trikampiai negali persidengti) a) septynkampį; b) aštuonkampį; c) devynkampį.

9. Raskite lygties

$$x + y\sqrt{5} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$$

racionaliuosius sprendinius.

10. Sferos centras yra koordinačių pradžios taškas, o spindulys lygus 5. Visi sferos taškai su sveikosiomis koordinatėmis yra iškilojo briaunainio viršūnės. Kiek sienų turi briaunainis?

11. Su kuriomis realiosiomis x reikšmėmis skaičių seka

$$a_n = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2} \cdot \frac{1}{n+x}$$

griežtai didėja? Su kuriomis griežtai mažėja?

12. Sugalvokite tokius du iracionaliuosius skaičius α ir β, kad skaičius α^β būtų racionalusis.

13. Ar reiškinys $6x^2 + 17xy + 12y^2 + x + y \quad (x, y \in \mathbb{Z})$ gali būti lygus 100? Kokias reikšmes gali įgyti šis reiškinys?

14. Sekos a_n nariai susieti lygybe

$$(a_{n-1}^2 + a_n^2)(a_n^2 + a_{n+1}^2) = (a_{n-1}a_n + a_n a_{n+1})^2; \qquad a_1 = 2,\ a_2 = 3.$$

Raskite a_{1990}.

15. Raskite tokią funkciją $f = f(x)$, apibrėžtą realiųjų skaičių aibėje, kad $f(f(x)) = 2x + 1$ su visais realiaisiais x.

16. Kiekvienas iš trijų tarpusavyje besiliečiančių apskritimų liečia dvi lygiakraščio trikampio kraštines. Įrodykite, kad šių apskritimų plotų suma didesnė už įbrėžto į tą trikampį apskritimo plotą.

17. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{\sin x - \sqrt{\sin x + \cos x}} = \cos x.$$

18. Išspręskite lygtį

$$2x^x = \sqrt{2}.$$

19. Įrodykite nelygybę

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} < 12.$$

20. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičių

$$n \cdot 1, n \cdot 2, \ldots, n \cdot (n-1), n \cdot n$$

skaitmenų suma viena ir ta pati?

VI LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA (1991)

1. Raskite skaičių 123456789 ir 987654321 didžiausią bendrąjį daliklį.

2. Raskite lygties
$$3^x + 1 = 5^y + 7^z$$
sveikuosius sprendinius.

3. Raskite visus pirminius skaičius p, su kuriais skaičius $2^p + p^2$ taip pat pirminis.

4. Ar galima skaičius 1981, ..., 1990 surašyti greta vienas kito taip, kad gautasis vienas skaičius būtų pirminis?

5. Dešimt realiųjų skaičių sudaro didėjančią aritmetinę progresiją. Ar gali a) keturi; b) penki iš jų būti geometrinės progresijos nariais?

6. Raskite visus sveikuosius skaičius n, su kuriais skaičius $n^3 + 5n^2 + 8n + 5$ yra sveikojo skaičiaus kubas.

7. Lentoje parašyti skaičiai $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{12}$. Ar galima tarp jų parašyti sudėties ir atimties ženklus taip, kad gautojo reiškinio reikšmė būtų lygi 0?

8. Pavadinkime natūraliųjų skaičių poaibį „idealiu", jei bet kurių dviejų jo elementų santykis nelygus dviem. Kiek daugiausiai narių gali turėti pirmųjų 100 natūraliųjų skaičių „idealus" poaibis?

9. Stačiojo trikampio statiniai lygūs 3 ir 4. Kiek tiesių dalija trikampio ir plotą, ir perimetrą pusiau?

10. Vienetinio kvadrato $ABCD$ įstrižainė BD kerta atkarpą, jungiančią viršūnę C su kraštinės AB vidurio tašku, taške M. Raskite trikampio BMC plotą.

11. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas toks taškas D, kad $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$. Įrodykite, kad trikampis yra bukas.

12. Taškas D trikampio ABC kraštinę CB dalija santykiu $1 : 2$. Įrodykite, kad atkarpa AD dalija vieną iš pusiaukraštinių pusiau.

13. Visos tetraedro briaunos lygios 1. Jį kertame plokštuma taip, kad pjūvyje – keturkampis. Koks gali būti mažiausias to keturkampio perimetras?

14. Išspręskite nelygybių sistemą
$$\begin{cases} |\sin x| \geq |\cos y|, \\ |\cos x| \geq |\sin y|. \end{cases}$$

15. Tarkime, x, y, z priklauso intervalui $[0; 1]$. Raskite reiškinio
$$S = \frac{x}{1 + yz} + \frac{y}{1 + zx} + \frac{z}{1 + xy}$$
didžiausiąją reikšmę.

16. Tarkime, $a \in \mathbb{R}$. Išspręskite lygtį
$$\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = 1.$$

17. Kvadratas $n \times n$ padalytas į n^2 vienetinių kvadratėlių. Raskite trumpiausios uždaros laužtės, jungiančios visų kvadratėlių visas viršūnes, ilgį.

18. Įrodykite nelygybę

$$|a+b+c|+|a|+|b|+|c| \geq |a+b|+|b+c|+|c+a|.$$

19. Su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis

$$a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{x}}}}=x$$

turi vienintelį sprendinį?

20. Su kuriomis parametro a reikšmėmis lygtis

$$x^2=|a-x|$$

turi tris skirtingus sprendinius?

VII LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ KOMANDINĖ OLIMPIADA (1992)

1. Taisyklingojo trikampio ABC kraštinėje BC paimtas taškas D. Tiesė, lygiagreti AD ir einanti per tašką C, kerta tiesę AB taške E. Įrodykite, kad $\dfrac{CE}{CD} \geq 2\sqrt{3}$.

2. n plokštumos taškų (x_k, y_k), $k=1,2,\ldots,n$, parinkti taip, kad $x_1x_2\ldots x_n = y_1y_2\ldots y_n = 1$. Įrodykite, kad jų tarpe yra bent vienas taškas, nutolęs nuo koordinačių pradžios ne mažiau kaip $\sqrt{2}$.

3. Tarkime, kad su realiuoju skaičiumi α galima rasti tris aritmetinės progresijos

$$\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2,\ \ldots,\ \alpha+n,\ \ldots$$

narius, sudarančius geometrinę progresiją. Įrodykite, kad α yra racionalusis skaičius.

4. Seka $\{a_n\}$ apibrėžta taip:

$$a_1=1, \qquad a_{n+1}=\frac{n\cdot a_n+2(n+1)^2}{n+2}.$$

Įrodykite, kad visi sekos nariai yra sveikieji skaičiai.

5. Raskite penkiaženklį skaičių N su skirtingais, nelygiais 0 skaitmenimis, kuris lygus sumai visų triženklių skaičių, sudarytų iš skaičiaus N (skirtingų) skaitmenų.

6. Sakysime, kad tiesė taisyklingai kerta kubą, jei ji eina per vidinį kubo tašką. Padalykime kubą $3\times3\times3$ į 27 lygius kubelius. Kokį didžiausią skaičių šių kubelių gali taisyklingai kirsti viena tiesė?

7. Išspręskite lygtį

$$\operatorname{tg} 7x - \sin 6x = \cos 4x - \operatorname{ctg} 7x.$$

8. Ant kiekvienos nepersišviečiančio kubo sienos parašytas natūralusis skaičius. Jei kelias (vieną, dvi, tris) kubo sienas galima matyti vienu metu, tai užrašome skaičių, esančių ant šių sienų, sumą. Kiek daugiausia skirtingų skaičių galima gauti tokiu būdu?

9. Įrodykite, kad lygtis
$$x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0$$
turi be galo daug natūraliųjų sprendinių.

10. x ir y yra tarpusavyje pirminiai skaičiai, ir $xy > 1$. Įrodykite, kad su bet kokiu natūraliuoju skaičiumi n skaičius $x^{2n} + y^{2n}$ nesidalija iš $x + y$.

11. Natūraliųjų skaičių seka $\{a_n\}$ sudaroma pagal taisyklę: skaičius a_{n+1} yra lygus skaičiaus a_n skaitmenų sandaugai (pavyzdžiui, jei $a_1 = 24378$, tai $a_2 = 1344$, $a_3 = 48$, $a_4 = 32$, $a_5 = 6$, $a_6 = a_7 = \ldots = 6$). Įrodykite, kad jei $a_n = 1$ su kokiu nors n, tai skaičiaus a_1 visi skaitmenys yra lygūs 1.

12. Trikampio ABC kraštinėse AC ir AB pažymėti atitinkamai taškai D ir E. Raskite kampą CED, jei $\angle ACE = 20°$, $\angle BCE = 60°$, $\angle ABD = 30°$, $\angle CBD = 50°$.

13. Į taisyklingąjį šešiakampį taip įbrėžtas kvadratas, kad jo dvi kraštinės yra lygiagrečios šešiakampio kraštinėms. Raskite kvadrato ir šešiakampio plotų santykį.

14. Išspręskite natūraliaisiais skaičiais lygtį
$$2n! = m!(m! + 2).$$

15. Įrodykite, kad jei $a, b, c > 0$, tai bent viena iš nelygybių
$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1-c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}$$
nėra išpildyta.

16. Trys pirminiai skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas yra lygus 20. Raskite visus tokius pirminių skaičių trejetus.

17. Raskite $a^4 + b^4 + c^4$, jei
$$a + b + c = 3, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 9, \qquad a^3 + b^3 + c^3 = 24.$$

18. Įrodykite, kad su kiekvienu sveikųjų skaičių rinkiniu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suma
$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$$
yra lyginis skaičius.

19. Įrodykite, kad jei a, b, c, d, e, f – tetraedro briaunos, tai jo paviršiaus plotas
$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).$$

20. Kokią didžiausią liekaną galima gauti dalijant dviženklį skaičių iš jo skaitmenų sumos?