XXVIII Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai, nurodymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. 6.

   Keliant kvadratu ir panaikinant šaknis, gaunama kvadratinė lygtis, kurios tik vienas sprendinys tinka. Gavus lygtį $7\sqrt{x-2} = 4x - 10$, paprasčiau ne naikinti šaknį, bet atlikti keitinį $\sqrt{x-2} = t,\ x = t^2 + 2$.

2. Ats. $(x, y, z) = (4, 3, 2)$ arba $(-6, -5, -4)$.

   Pažymėkime $x + 1 = a, y + 1 = b, z + 1 = c$. Prie pirmosios lygties abiejų pusių pridėjus 1, gaunama lygtis $(x + 1)(y + 1) = 20$. Panašiai pasielgę su kitomis lygtimis, gauname sistemą $ab = 20, bc = 12, ca = 15$. Sudauginame visas lygtis ir ištraukiame šaknį: $abc = 60$ arba -60. Pirmu atveju gautą lygybę dalydami iš lygybės $ab = 20$, randame c ir z. Analogiškai randame visų nežinomųjų reikšmes abiem atvejais.

3. Ats. Negali.

   Reiškinyje $A = x^3y^4 + y^3z^4 + z^3x^4 - x^4y^3 - y^4z^3 - z^4x^3$ grupuojant narius, galima iškelti reiškinį $x - y$, toliau $y - z$, $z - x$. Apskritai $2A = (x-y)(y-z)(z-x)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+(xy+yz+zx)^2)$. Jei $A = 0$ ir x, y, z yra skirtingi skaičiai, tai apskliausta neneigiama kvadratų suma lygi nuliui, todėl $xy = yz = zx = 0$ ir bent du iš skaičių x, y, z lygūs nuliui – prieštara.

4. Ats. $c^2 \in (7; 33)$.

   Nagrinėkime lygtyse pastebimus skaičius xy, yz, zx. Remiantis pradine sistema, lengva įrodyti, kad jie visi teigiami (bet kurių dviejų iš jų suma neneigiama; jų visų sandauga neneigiama; $x = 0$, $y = 0$ arba $z = 0$ netenkina sistemos).

   Sudedant ir atimant lygtis, lengva išreikšti xy per c: $xy = (33 - c^2)/2 > 0$. Galima gauti ir yz, zx išraiškas. Taip gauname, kad $c^2 < 33$ ir $c^2 > 7$. Sudauginę dvi iš trijų išraiškų, padalinę iš trečios, ištraukę šaknį, rasime x, y, z išraiškas, padedančias nustatyti, kad jei $c^2 \in (7; 33)$, tai lygčių sistema turi sprendinį

$$x = \sqrt{(33-c^2)(c^2+7)/(2c^2-14)}, \quad y = \sqrt{(33-c^2)(c^2-7)/(2c^2+14)},$$
$$z = \sqrt{(c^2+7)(c^2-7)/(66-2c^2)}.$$

5. Nelygybėje esančios išraiškos simetriškos x, y, z atžvilgiu, todėl galime laikyti, kad $x \geqslant y \geqslant z$.

1) Tegu $y \geqslant 1$. Nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$(x-y)^2 + (z-1)^2 + 2z(x-1)(y-1) \geqslant 0.$$

2) Tegu $y < 1$. Nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$(z-y)^2 + (x-1)^2 + 2x(1-y)(1-z) \geqslant 0.$$

6. Ats. a) 3969; b) 16.

$(6k+1) + (6k+2) + \ldots + (6k+6) = 21(2k+1) = n^2$. Nelyginis skaičius $2k+1$ turi dalytis iš 21, t. y. $n^2 = 21^2 m^2$, kur m yra nelyginis skaičius. Su kiekvienu tokiu m pavyks rasti 6 pradinius skaičius pagal $2k+1 = 21m^2$.

a) Tinka $m = 3$, tada $n^2 = 3969 = 63^2$. Kai $m = 1$ arba $m > 3$, gaunamas neketurženklis skaičius $(21^2 \cdot 5^2 > 100^2)$.

b) Reikia išspręsti nelygybes $100000 \leqslant 21^2 m^2 \leqslant 999999$. Kiek nelyginių natūraliųjų skaičių m jas tenkina?

7. Ats. 25.

2 ir 3 yra vieninteliai $12^{12} = 2^{24} 3^{12}$ pirminiai dalikliai, todėl ir $k = 2^a 3^b$ (skaičiai a, b – sveikieji nenegiami). Turime $6^6 = 2^6 3^6, 8^8 = 2^{24}(\cdot 3^0)$. Didžiausias dvejeto laipsnis 2^{24}, iš kurio dalijasi mažiausias bendras kartotinis, lygus didžiausiam iš skaičių $2^a, 2^6, 2^{24}$. Analogiškai 3^{12} yra didžiausias iš skaičių $3^b, 3^6, 3^0$. Taigi $0 \leqslant a \leqslant 24$ ir $b = 12$.

8. Ats. b) $29999999999998\underbrace{999\ldots9}_{45 \text{ skaitm.}}$.

Jei skaičiaus $n+1$ gale yra $k \geqslant 0$ nulių, tai skaičiaus n gale yra k devynetų, o prieš juos paskutinis nenulinis $n+1$ skaitmuo sumažėja vienetu (kiti nepakinta). Skaičiaus $n+1$ skaitmenų sumą pažymėkime s. Tada n skaitmenų suma lygi $s + 9k - 1$. Taigi $9k - 1$ dalijasi iš 101 ir mažiausia galima k reikšmė yra 45 ($101 \cdot 4 = 9 \cdot 45 - 1$). Mažiausią $n+1$ reikšmę gausime, kai prieš 45 nulius parašysime mažiausią natūralųjį skaičių m, kurio skaitmenų suma s dalijasi iš 101. Skaičius m gaunamas imant mažiausią reikšmę $s = 101 = 2 + 9 \cdot 11$ ir didžiausius galimus skaitmenis (devynetus) kaupiant gale, kad, visų pirma, skaitmenų būtų kuo mažiau, o tada – kad pirmasis skaitmuo būtų kuo mažesnis. Taigi $m = 299999999999$ (nesibaigia nuliu, todėl išsaugota sąlyga $k = 45$).

9. Ats. a) 1, 3, 9; b) 1, 3, 9, 27, 37, 67.

   $10^{2013} - 1 = (10^3)^{671} - 1^{671}$ dalijasi iš $10^3 - 1 = 37 \cdot 27$, taigi iš 37 ir 27 (ir iš 1, 3, 9). Skaičiavimai moduliu 67 parodo, kad $10^{33} - 1$, todėl ir $10^{2013} - 1 = (10^{33})^{61} - 1^{61}$ dalijasi iš 67 (pvz., žinant $10^{16} \pmod{67}$ galima iš karto rasti $10^{32} \pmod{67}$). Jei ieškomas daliklis pats turėtų tik jau išvardytus pirminius daliklius 3, 37 ar 67, tai jis būtų lygus 67, 37, 74 arba būtų trejeto laipsnis 3, 9, 27, 81. Nenagrinėtos reikšmės 74 ir 81. Skaičius 74 netinka, nes $10^{2013} - 1$ nesidalija iš 2, o 81 netinka, nes $10^{2013} - 1 = 9 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{2013 \text{ skaitm.}}$ ir antrasis dauginamasis nesidalija iš 9 (dalumo požymis).

   Belieka įrodyti, kad $10^{2013} - 1$ neturi kitokių pirminių daliklių. Jei $10^{2013} - 1$ dalytųsi iš pirminio skaičiaus $p \neq 2, 5$, tai pagal Mažąją Ferma teoremą $10^{p-1} - 1$, todėl ir $10^{\mathrm{DBD}(p-1,2013)} - 1$ dalytųsi iš p. Kadangi $d = \mathrm{DBD}(p-1, 2013) < 99$ ir dalija 2013, tai $d = 1, 3, 11, 33$ arba 61. Skaičius d dalija $p - 1 < 99$.

   Jei $d = 61$, tai $p - 1 = 61$, ir $p = 62$ nėra pirminis skaičius.

   Jei $d = 33$, tai $p - 1 = 33$ arba 66, ir $p = 67$.

   Jei $d = 11$, tai $p - 1 = 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77$ arba 88, ir $p = 23, 67$ arba 89. Naudojant lyginius, lengvai suskaičiuojama, kad $10^{11} - 1$ iš 23 ar 89 nesidalija.

   Jei $d = 1$ arba 3, tiesiogiai patikriname $10^d - 1$ pirminius daliklius.

10. Galima laikyti, nemažinant bendrumo, kad $\mathrm{DBD}(a, b, c) = 1$ (pamąstykite kodėl). Imkime bet kurį pirminį skaičiaus abc daliklį p. Pakanka įrodyti, kad didžiausias p laipsnis, iš kurio dalijasi abc, yra $p^{3n}, n \in \mathbb{N}$. Laikykime (vėl nemažindami bendrumo), kad p nedalija c, bet dalija a arba b. Lygybė $5abc = ab^2 + bc^2 + ca^2$ parodo, kad bet kuriuo atveju p dalija ir a, ir b.

Tegu didžiausi p laipsniai, iš kurių dalijasi a ir b, atitinkamai lygūs p^α ir p^β. Skaičius $bc^2 + ca^2 = 5abc - ab^2$ dalijasi iš ab, taigi iš $p^{\beta+1}$. Tačiau sumos $bc^2 + ca^2$ pirmasis dėmuo dalijasi tik iš p^β. Jei antrasis dėmuo ca^2 nesidalija iš p^β, tai ir visa suma nesidalija – prieštara. O jei jis dalijasi iš didesnio laipsnio nei p^β, tai suma dalijasi tik iš p^β – vėl prieštara. Todėl ca^2 dalijasi tiksliai iš p^β ir $2\alpha = \beta$. Vadinasi, abc dalijasi iš $p^{\alpha+\beta} = p^{3\alpha}$, bet ne didesnio laipsnio. Tai ir reikėjo įrodyti.

Kitas būdas. Jei $\mathrm{DBD}(a, b, c) = d$, tai pažymėkime $\mathrm{DBD}(a, b)/d = d_3$, $\mathrm{DBD}(b, c)/d = d_1$, $\mathrm{DBD}(c, a)/d = d_2$. Tada $a = dd_2d_3x, b = dd_3d_1y, c = = dd_1d_2z, x, y, z \in \mathbb{Z}$. Įrašius šias išraiškas į lygybę, galima įrodyti, kad x dalija d_2 ir d_2 dalija x. Todėl $x = \pm d_2$, analogiškai $y = \pm d_3, z = \pm d_1$. Tada $abc = (\pm dd_1d_2d_3)^3$.

11. Ats. -178.

Nagrinėkime pirmus du stulpelius (iš kairės) ir jiems priklausančius 2×2 kvadratus bei 1×2 stačiakampius. Persidengiančiuose kvadratuose skaičių sumos lygios, todėl jos lygios ir 1×2 stačiakampiuose su tokiais skaičiais: $(1, ?), (3, ?), \ldots, (99, ?)$. Vietoj pirmojo klaustuko reikia rašyti $20-0-1-1 = 18$, todėl antrojo stulpelio apačioje bus $1+18-99 = -80$.

Dabar nagrinėkime 2-ąjį, 4-ąjį, …, 100-ąjį stulpelius. Juose tame pačiame aukštyje esančių 2×1 stačiakampių skaičių sumos vėlgi lygios. Todėl jei pirmoje eilutėje ir šiuose stulpeliuose 50 skaičių iš kairės į dešinę sudaro aritmetinę progresiją su skirtumu 2: 1, 3, …, 99, tai antroje eilutėje bus aritmetinė progresija su skirtumu -2, trečioje vėl su skirtumu 2 ir t. t. Paskutinėje eilutėje skirtumas bus -2: $-80, -82, \ldots, -80 + (-2)\cdot(50-1) = -178$.

12. Ats. Ne.

Skaičiais nuo 1 iki 13 iš eilės sunumeruokime tiek eilutes, tiek stulpelius. Langelyje (i, j) įrašykime skaičiaus $i + j$ dalybos iš 5 liekaną: 0, 1, 2, 3, 4. Langeliai išskaidomi į 5 nelygias aibes: pvz., nulių yra 34, o vienetų – tik 33. Kiekvienu ėjimu pakeičiama lygiai vieno langelio su nuliu ir lygiai vieno langelio su vienetu spalva. Pradžioje juodų langelių, pažymėtų tiek nuliu, tiek vienetu, yra 0 – lyginis skaičius. Taigi po pirmojo ėjimo abiejų rūšių juodų langelių skaičiai abu taps nelyginiai, tada abu lyginiai, ir t. t. Niekada negausime skirtingo lyginumo skaičių 34 ir 33. Taigi visų langelių juodai nenudažysime.

13. Ats. a) Taip; b) ne.

a) $(1, 12, 21), (3, 14, 23), (5, 16, 25), (7, 18, 27), (9, 20, 29),$
$(2, 11, 22), (4, 13, 24), (6, 15, 26), (8, 17, 28), (10, 19, 30).$

b) Tarkime, kad skaičius įmanoma suskirstyti. Nagrinėkime taisyklingąjį daugiakampį su 33 viršūnėmis, jas iš eilės sunumeruokime. Kiekvieną skaičių trejetą atitinka trikampis su atitinkamomis viršūnėmis. Pastebėkime, kad visi tokie trikampiai lygūs (sujungtų viršūnių poras visada skiria 11, 10 ir 9 daugiakampio viršūnės). Nagrinėkime bet kurį trikampį ir jo ilgiausią kraštinę. Nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad kraštinės galai yra viršūnės 1 ir 13 (pakeitus viršūnių numeraciją, trikampius atitinkantys skaičių trejetai vis tiek tenkintų sąlygą).

Viršūnė 2 turi būti sujungta su viena iš viršūnių 12, 13 ir 14. Viršūnė 13 jau užimta. Jei tai būtų viršūnė 14, tai 3 beliktų jungti su 15, tada 4 su 16, …, 12 su 24. Tačiau taip gauname net 12 skirtingų trikampių! Taigi 2 turime jungti su 12. Kita vertus, tiek 2, tiek 12 turime jungti su 23 arba 24, ir tiek 1, tiek 13 – taip pat su 23 arba 24. Yra dvi galimybės, bet abiem atvejais turime trikampių porą: vieno iš jų ilgiausia kraštinė lygiagreti su kito trumpiausia ir atvirkščiai.

Tokiu būdu visi trikampiai suskirstomi į poras, bet tada jų turėtų būti lyginis skaičius, o ne 11.

14. Ats. 42.

Sąlygą tenkina akmenų krūvos, kuriose yra 42, 41, 40, 38, 37, 36, 35, 34, 33 akmenys.

Tarkime, akmenų krūvose yra $x_1 < x_2 < \ldots < x_9$. Kad mažiausią krūvą sumetus į likusias, akmenų skaičiai krūvose būtų lygūs, prie x_8 akmenų reikės pridėti bent vieną, prie x_7 – bent 2, …, prie x_2 – bent 7. Taigi $x_1 \geqslant 1+2+\ldots+7 = 28$ ir $x_1+x_2+\ldots+x_9 \geqslant 28+29+\ldots+36 = 288$. Kadangi akmenis galima po lygiai sudėti į 8 ir į 7 krūvas, tai jų bendras skaičius dalijasi iš 56 ir $x_1 + x_2 + \ldots + x_9 \geqslant 336$. Jei $n \leqslant 41$, tai $x_1 + x_2 + \ldots + x_9 \leqslant 41 + 40 + \ldots + 33 < 336$. Taigi $n \geqslant 42$.

15. Ats. 233625.

Įprastu būdu langeliams priskirkime koordinates $(i, j), 1 \leqslant i, j \leqslant$ $\leqslant 2013$. Atsakymas gaunamas pažymėjus šiuos langelius:

$$(19k, 19l + 1), (19k, 19l + 2), k = 1, 2, \ldots, 105, l = 0, 1, \ldots, 105;$$

$$(m, 19n), n = 1, 2, \ldots, 105, m = 1, 2, \ldots, 2013.$$

Indukcijos metodas padeda įrodyti tokį teiginį: uždavinio sąlygą tenkinančioje $(19k-1)\times(19k-1)$ lentelėje pažymėtų langelių yra mažiausiai $(k-1)(21k-1)$. Tai įrodo, kad mažiau nei 233625 langelius pažymėti nepavyks.

16. Jei trikampio ABC kraštinės lygios a, b, c, o plotas lygus S, tai jo aukštinės lygios $a_1 = 2S/a,\quad b_1 = 2S/b,\quad c_1 = 2S/c$. Jei trikampio $A_1B_1C_1$ plotas lygus S_1, tai jo aukštinės lygios $a_2 = 2S_1/a_1 = a \cdot S_1/S,\quad b_2 =$ $= 2S_1/b_1 = b \cdot S_1/S,\quad c_2 = 2S_1/c_1 = c \cdot S_1/S$. Taigi ABC ir $A_2B_2C_2$ kraštinės proporcingos: $\frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b} = \frac{c_2}{c} = \frac{S_1}{S}$; trikampiai panašūs.

17. Duota, kad $AB+BC+CA = AB+AD+BD$ ir $CD+BC+BD = CD+$ $+AD+AC$. Iš šių lygybių išplaukia, kad $AC = BD$ ir $BC = AD$. Tada trikampiai ABC ir BAD lygūs pagal tris lygias kraštines ir $\angle ABD =$ $= \angle BAC$. Tada trikampis AOB lygiašonis, $OA = OB$. Analogiškai $OC = OD$, tad $AD + OA + OD = BC + OB + OC$.

18. Ats. $3 : 5$.

Kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime a, kraštinės CD vidurio tašką – E, tiesės l sankirtą su AD – F, su BC – G, statmens iš G į AD pagrindą – H, atkarpos AE vidurio tašką, per kurį statmenai AE dėl simetrijos eina tiesė l, – K. Bendrą kampą turintys statieji trikampiai ADE ir AKF panašūs, analogiškai $\triangle AKF \sim \triangle GHF$. Tada $\triangle ADE$ ir $\triangle GHF$ net lygūs ($AD = GH = a$). Taigi $FH = DE = a/2$, $AF/AK = AE/AD \implies$ $AF = AK \cdot AE/AD = AE^2/(2AD) = (AD^2 + DE^2)/(2a) = 5a/8$, $GB = AH = AF - FH = a/8$.

Nagrinėjami keturkampiai yra stačiosios trapecijos, taigi $ABGF$ plotas lygus $\frac{1}{2}AB(AF + BG) = 3a^2/8$, analogiškai $CDFG$ plotas lygus $5a^2/8$. Ieškomas santykis lygus $3 : 5$.

19. Pažymėjus trikampio ABC kampus A, B, C atitinkamai α, β, γ ir ω centrą – O, lengva gauti $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$ (įbrėžtinis ir centrinis kampai), $\angle OCB = (180° - \angle BOC)/2 = 90° - \alpha$ ($\triangle BOC$ lygiašonis), $\angle AA_1B_1 = \angle B_1BA = 90° - \alpha$ (keturkampis ABA_1B_1 įbrėžtinis), $\angle B_1A_1C = 90° - \angle AA_1B_1 = \alpha$. Taigi kampas tarp OC ir A_1B_1 lygus $180° - \angle B_1A_1C - \angle OCB = 90°$. Vadinasi, OC statmena A_2B_2. Tačiau statmuo iš O į A_2B_2 eina per šios stygos vidurį, taigi ir per lygiašonio trikampio $A_2B_2C_1$ aukštinę ($A_2C_1 = B_2C_1$ kaip liestinių iš to paties taško atkarpos). Todėl O, C, C_1 priklauso šiam statmeniui.

20. Įrodysime, kad ADE aukštinė iš taško E eina per BC vidurio tašką M (aukštinei iš D įrodymas analogiškas). Tiksliau, įrodysime, kad tiesės EM ir AB statmenos.

    $\triangle BPC$ lygiašonis ($PB = PC$ kaip liestinių atkarpos), tad atkarpos MP ir BC statmenos. Tada $\angle CMP + \angle PEC = 180°$, keturkampis $CEPM$ įbrėžtinis ir $\angle PEM = \angle PCM = \angle BAC$ (paskutinė lygybė – dėl to, kad PC liečia ω trikampio ABC viršūnėje). Pagaliau kampas tarp EM ir AB lygus $180° - \angle MEA - \angle BAC = 180° - (90° - \angle MEP) - \angle BAC = 90°$.