XXVII Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai, nurodymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. $(x, y) = (2, 3)$ ir $(-2, -3)$.

   Abiejų lygčių kairiosios pusės dalijasi iš $x+y$. Be to, jei $x+y=0$, tai pirmoje lygtyje turėtume $0=-5$. Taigi $x+y \neq 0$ ir tai leidžia suprastinti lygčių sumą: $3x^2+xy-2y^2 = (3x-2y)(x+y) = 0 \implies x = 2y/3$. Dabar eliminuojame x vienoje iš lygčių ir gauname kvadratinę lygtį su vienu nežinomuoju.

2. Ats. $x = (-11 \pm \sqrt{97})/6$.

   Apvertus duotas trupmenas arba padalijus jų vardiklius iš x ($x=0$ lygties netenkina), galima pastebėti tokį patį reiškinį $y = 3x+2/x$. Taigi įveskime naują kintamąjį y. Tada kairioji lygties pusė lygi
   $$\frac{2}{3x-1+2/x} - \frac{7}{3x+5+2/x} = \frac{2}{y-1} - \frac{7}{y+5}.$$
   Prilyginę gautą reiškinį 1 ir padauginę viską iš $(y-1)(y+5)$, gauname lygtį $y^2+9y-22=0$. Tada $3x+2/x=-11$ arba $3x+2/x=2$. Dauginame šias lygybes iš x ir sprendžiame dar dvi kvadratines lygtis.

3. Ats. A), B) $(2, 2, 2, 2, 2)$.

   Jei X yra didžiausias, o x yra mažiausias iš penkių sprendinio skaičių, tai $X^2 = x_i + x_j \leqslant 2X$ ir $x^2 = x_l + x_m \geqslant 2x \implies X \leqslant 2,\ x \geqslant 2$. Visi penki skaičiai yra tarp X ir x, taigi visi lygūs 2.

4. Jei $S = a+b+c,\ x = S+a,\ y = S+b,\ z = S+c$, tai $a/(2a+b+c) = a/(S+a) = 1-S/x$ ir kairė nelygybės pusė lygi $3-S(1/x+1/y+1/z)$. Įrašę šį reiškinį ir pertvarkę pradinę nelygybę, gauname ekvivalenčią nelygybę $4S(1/x+1y+1/z) \geqslant 9$. Tačiau $4S = x+y+z$ ir gautoji nelygybė ekvivalenti aritmetinio ir harmoninio vidurkių nelygybei $(x+y+z)/3 \geqslant 3/(1/x+1/y+1/z)$.

5. Aritmetinis ir geometrinis vidurkiai: $a^3+4=(a^3+1+1)+2 \geqslant \geqslant 3\sqrt[3]{a^3\cdot 1\cdot 1}+2=3a+2 \implies \frac{a}{a^3+4} \leqslant \frac{a}{3a+2}=\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{2}{3a+2})$. Taip įvertinę kitus tris duotos nelygybės kairės pusės narius, gauname, kad kairė pusė ne didesnė nei $\frac{4}{3}-\frac{2}{3}(\frac{1}{3a+2}+\frac{1}{3b+2}+\frac{1}{3c+2}+\frac{1}{3d+2})$.

   Harmoninis ir aritmetinis vidurkiai:
$$\frac{1}{3a+2}+\frac{1}{3b+2}+\frac{1}{3c+2}+\frac{1}{3d+2} \geqslant$$
$$\geqslant 4\cdot\frac{4}{(3a+2)+(3b+2)+(3c+2)+(3d+2)}=$$
$$=\frac{16}{3(a+b+c+d)+8}=\frac{4}{5}.$$
   Taigi kairė duotos nelygybės pusė ne didesnė nei $\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$.

6. Ats. A), B) 555555.

   B) Kadangi ieškomas skaičius dalijasi iš 5, tai jo paskutinis skaitmuo ir visi kiti skaitmenys lygūs 5, t. y. turime skaičių $5\cdot 11\ldots 1$. Iš anksto nežinodami skaičiaus $11\ldots 1$ ilgio, dalykime jį kampu iš 7, kol pasidalys. Taip gauname mažiausią tinkamą $5\cdot 7$ kartotinį 555555.

7. Ats. $3\cdot 5^6$.

   Paskutinis skaitmuo kinta taip: iš 1 į 2, iš 2 į 4, iš 3 į 6, …, iš 8 į 6, iš 9 į 8. Didžiausią skaitmens sumažėjimą gauname, kai 6 pavirsta į 2, tada skaitmuo sumažėja 3 kartus. Su skaičiaus kitais 6 skaitmenimis įvyksta tas pats, tik dar gali tekti pridėti 1 (kurį daugindami turėjome mintyse). Taigi 1 virsta 2 arba 3, o 2 virsta 4 arba 5, ir t. t. Didžiausias santykis bus, kai iš 5 gausime 1 – bet kuris iš 6 skaitmenų sumažėja daugiausiai 5 kartus. Taigi sandauga sumažėja daugiausiai $3\cdot 5^6$ kartų. Šis pokytis pasiekiamas, imant skaičių 5555556.

8. Ats. Lygtis sprendinių neturi.

   Kairė lygybės pusė dalijasi iš $a=x-y$ (nes $(y-z)^3+(z-x)^3$ dalijasi iš $(y-z)+(z-x)$), taip pat ir iš $b=y-z$ bei $c=z-x$. Apskritai ji lygi $3(x-y)(y-z)(z-x)$. Taigi lygtį galima perrašyti kaip $abc=10$. Galima perrinkti visus skaičiaus 10 daliklius, taigi visus gautos lygties sprendinius. Tačiau dar galioja lygybė $a+b+c=0$, kurios nei vienas iš tų sprendinių netenkina.

9. Ats. $(2^{z-1}+1, 2^{z-2}+1, z), z \geqslant 4$;
$(2^{z-1}-1, 2^{z-2}-1, z), z \geqslant 5$; $(2^z-1, 2^z-2, z), z \geqslant 3$.

Dešinė lygybės pusė nelyginė, todėl $x = 2X+1, X \in \mathbb{N}$ $(x \neq 1)$, ir $y \cdot 2^z = 4X(X+1)$.

Jei skaičius X lyginis, tai $X+1$ dalija $y < x < 2X+2$. Taigi $y = X+1 \implies 2^z = 4X \implies z \geqslant 2$, $x = 2^{z-1}+1$, $y = 2^{z-2}+1 > z$. Paskutinė nelygybė galioja, tik jei $z \geqslant 4$ (galima įrodyti pagal indukciją).

Jei skaičius X nelyginis, tai X dalija $y \leqslant x-1 = 2X$, todėl $y = X$ arba $y = 2X$. Ir šiais dviem atvejais analogiškai gaunamos begalinės sprendinių klasės.

10. Ats. 21.

Aibės M elementus surašykime didėjimo tvarka: $a_1 < a_2 < \ldots$. Tarp bet kurių trijų skaičių a_n, a_{n+1}, a_{n+2} yra vienas, dalijantis kitą, todėl santykis tarp dviejų iš jų ne mažesnis už 2, ir tuo labiau didžiausias galimas santykis $a_{n+2}/a_n \geqslant 2$. Jei aibėje M yra elementas a_{22}, tai $a_2 \geqslant a_1+1 \geqslant 2$, $a_4 \geqslant 2a_2 \geqslant 4$, $a_6 \geqslant 2a_4 \geqslant 8, \ldots, a_{22} \geqslant 2^{11} > 2011$ – prieštara. Taigi aibėje M daugiausiai 21 elementas. Tiek jų ir yra aibėje $M = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{10}, 3, 3\cdot 2, 3\cdot 2^2, \ldots, 3\cdot 2^9\}$ (imant 3 elementus, du iš jų bus lygūs 2^i ir 2^j arba $3\cdot 2^i$ ir $3\cdot 2^j$).

11. Ats. 9.

Jei turime n partijų, tai jose yra mažiausiai $3n$ erelių. Kadangi kiekvienas iš 14 erelių įskaičiuojamas daugiausiai 2 kartus, tai *skirtingų* erelių turime mažiausiai $3n/2 \leqslant 14 \implies n \leqslant 9$. Lygiai 9 partijas galima suformuoti taip: (1, 2, 3); (4, 5, 6); (7, 8, 9); (10, 11, 12); (13, 14, 1); (2, 3, 4); (5, 6, 7); (8, 9, 10); (11, 12, 13).

12. Ats. Taip.

Skaičius galima perstatyti nurodytu būdu 503×503 lentelėje. Tam iš eilės sunumeruokime lentelės eilutes bei lentelės stulpelius, kiekvienam langeliui priskirdami koordinates $(i, j), 1 \leqslant i, j \leqslant 503$. Tada i-tosios eilutės, $1 \leqslant i \leqslant 503$, skaičius paslinkime į dešinę per i langelių (skaičius esančius eilutės gale keldami į jos pradžią). Po to tą patį padarykime su stulpeliais. Skaičius, buvęs langelyje (i, j), iš pradžių perkeliamas į langelį $(i, i+j)$, o tada į $(i+(i+j), i+j) = (2i+j, i+j)$ (jei koordinatės viršija 503, jas keičiame jų liekana moduliu 503). Jei turime to paties stulpelio langelius (i, j) ir (k, j), $i \neq k$, tai jų skaičiai atsiduria langeliuose $(2i+j, i+j)$ ir $(2k+j, k+j)$. Jei šie langeliai vienoje eilutėje, tai $2i + j \equiv 2k + j \pmod{503} \implies i = k$. Taip pat $i + j \equiv k + j \pmod{503} \implies i = k$. Taigi to paties stulpelio, o analogiškai ir tos pačios eilutės skaičiai išbarstomi po skirtingus stulpelius bei eilutes. (Šis įrodymas tinka $n \times n$ lentelėms, kai n yra nelyginis skaičius.)

Skaičius galima perstatyti nurodytu būdu 4×4 lentelėje. Jei eilutėse iš kairės į dešinę įrašyti skaičiai (a, b, c, d); (e, f, g, h); (i, j, k, l); (m, n, o, p), tai juos galima taip sukeisti vietomis: (a, f, o, l); (k, p, e, b); (n, i, d, g); (h, c, j, m).

Pagaliau 2012×2012 lentelę galima suskirstyti į 503×503 kvadratų, kurių matmenys yra 4×4. Lentelėje sukeiskime vietomis kvadratus (su juose esančiais skaičiais) pagal pirmąjį algoritmą, o kiekviename iš jų sumaišykime skaičius pagal algroritmą 4×4 lentelei.

13. Saliamonas kiekvienam vergui gali priskirti po dvejeto laipsnį: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Sunumeravęs butelius skaičiais nuo 1 iki 1000, karalius gali užrašyti kiekvieno skaičiaus dvejetainę išraišką ir taip tą skaičių išreikšti kaip skirtingų dvejeto laipsnių sumą (didesnio nei 512 neprireiks, nes $1024 > 1000$). Iš kiekvieno butelio turi atsigerti tie vergai, kurių skaičiai yra to butelio dvejeto laipsnių sumoje. Saliamonas gaus užnuodyto butelio numerį, sudėjęs mirusių vergų skaičius.

14. Turime 76 taškus, todėl pagal Dirichlė principą viena spalva (laikykime, kad juoda) nudažyti bent $76/3$, t. y. bent 26 taškai.

    Jei bent 7 tiesėse, lygiagrečiose su Oy, yra bent po 2 juodus taškus, tai dvi iš taškų porų turi tokias pačias y koordinates (taškų porai jas galima parinkti tik $C_4^2 = 6$ būdais) ir yra reikiamo stačiakampio viršūnės.

    Jei bent po 2 juodus taškus yra daugiausiai 6 tokiose tiesėse, tai kitose 13 tiesių yra daugiausiai 13 juodų taškų. Todėl 6 tiesėse yra bent $26 - 13 = 13$ taškų ir pagal Dirichlė principą vienoje iš jų yra bent $13/6$, t. y. 3 arba 4 juodi taškai. Jei jų 4, tai kitoje iš tiesių yra bent 2 (pagal Dirichlė principą), tad vėl gauname reikiamą stačiakampį; taip pat jį iš karto gauname, jei dviejose tiesėse yra bent po 3 juodus taškus.

Belieka atvejis, kai vienoje iš 6 tiesių yra lygiai 3 juodi taškai, kitose 5-iose – daugiausiai po 2. Kadangi 5 tiesėse yra $13-3=10$ juodų taškų, tai jose turi būti po lygiai 2 juodus taškus. Dvi iš 5 porų turės tas pačias ordinates, arba, jei visoms 5 poroms jos skirtingos, tai viena iš jų turės tas pačias ordinates, kaip ir du iš 3 taškų pirmoje tiesėje. Vėlgi gauname reikiamą stačiakampį.

15. Ats. 7.

Kiekvienas iš 8 teisėjų tam tikra tvarka surikiuotus 7 dalyvius galėjo įvertinti taip: n, n, n, n, n, n, n; n, t, t, t, t, n, n; n, t, t, n, n, t, t; n, n, n, t, t, t, t; t, n, t, n, t, n, t; t, n, t, t, n, t, n; t, t, n, n, t, t, n; t, t, n, t, n, n, t.

Jei dalyvių yra bent 8, tai galima sudaryti 8×8 lentelę, kurios bet kuriuose dviejuose stulpeliuose kombinacijos t, t; t, n; n, t; n, n randamos po du kartus. Raidžių n lentelėje yra $64 : 2 = 32$. Raidžių n kiekius eilutėse pažymėkime $a_1, a_2, \ldots, a_8$ (jų suma lygi 32). Lentelės savybės nepakis, jei bet kurio dalyvio visus įvertinimus pakeisime priešingais, tad visus stulpelius galime pakeisti taip, kad $a_8 = 8$. Skaičiuokime kombinacijų n, n skaičių visoje lentelėje: skaičiuojant pagal stulpelių poras, kurių yra $C_8^2 = 28$, jų yra $28 \cdot 2 = 56$. Skaičiuojant pagal eilutes, jų yra $C_{a_1}^2 + C_{a_2}^2 + \ldots + C_{a_8}^2$. Tada $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 = 144$. Pažymėję $b_i = a_i - 4$, gauname, kad $b_1 + b_2 + \ldots + b_8 = 0$ ir $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_8^2 = 16$. Be to, $b_8 = 4$, tad $b_1 = b_2 = \ldots = b_7 = 0$ – prieštara, nes tada b_i suma nelygi 0.

16. Ats. 90°.

CM ir AD sankirtą pažymėkime N. Kadangi $AD || BC$, tai $\triangle MBC \sim \triangle MAN$ (lygūs priešiniai ir kryžminiai kampai). Dar daugiau, $MB = MA$ ir $\triangle MBC = \triangle MAN \implies AN = BC$ ir $DN = AN + AD = BC + AD = CD$. Taigi $\triangle CDN$ lygiašonis ir jo pusiaukraštinė DM ($MC = MN$) yra aukštinė. Todėl ieškomas kampas statusis.

17. Ats. 60.

Pagal pusiaukampinės savybę, $BH : BC = MH : MC = 3 : 5$. Pažymėkime $BH = 3x$, $BC = 5x$. Pagal Pitagoro teoremą, $25x^2 = BC^2 = BH^2 + CH^2 = 9x^2 + 64 \implies x = 2$, $BH = 6$.

Bendrą aukštinę turinčių trikampių AMC ir AMH plotų santykis lygus $S_1 : S_2 = CM : MH = 5 : 3$. Analogiškai trikampių ABK ir AKC plotų santykis lygus $BK : CK = 1$; trikampių BMK ir CMK plotai taip pat lygūs. Tada lygiapločiai yra ir trikampiai ABM ir AMC (jų plotas yra S_1). ABM ir AMH plotų skirtumas $S_3 = S_1 - S_2 = 2S_1/5$. Taigi $S_2 : S_3 = 3 : 2$; kita vertus, $S_2 : S_3 = AH : BH \implies AH = 3BH/2 = 9$. Pagaliau $AB = 15$ ir ieškomas plotas yra $\frac{1}{2}CH \cdot AB = 60$.

18. Ats. $\sqrt{21}$.

    Statmenų iš C ir Y į AX pagrindus atitinkamai pažymėkime M ir F. Trikampiai ACX ir CYB yra lygiašoniai, jų kraštinių santykiai yra $4 : 3 : 3$, taigi jie panašūs. Tada $\angle YCB = \angle XAC$, taigi tiesės CY ir AX lygiagrečios, $YCMF$ yra stačiakampis, $MF = CY = 3$, $YF = CM$. Atkarpa CM yra ACX aukštinė ir pusiaukraštinė, todėl $AM = MX = 4$, $AC^2 = AM^2 + CM^2 \implies FY^2 = CM^2 = 20$. Be to, $FX = MX - MF = 1$. Pagal Pitagoro teoremą, $XY^2 = FY^2 + FX^2 = 21$.

19. Pažymėkime ω centrą O. Pakanka įrodyti, kad $\angle AQP = \angle BQO$. Nemažindami bendrumo laikykime, kad taškas B yra tarp P ir A.

    Bendrą kampą turintys statieji trikampiai PCO ir PQC panašūs, todėl $PC^2 = PQ \cdot PO$. Kita vertus, pagal liestinės ir kirstinės savybę $PC^2 = PA \cdot PB$. Tada bendrą kampą ir proporcingas kraštines turintys trikampiai APQ ir OPB panašūs $\implies \angle AQP = \angle PBO \implies \angle AQO = \angle ABO$ ir keturkampis $AOQB$ yra įbrėžtinis. Trikampis AOB lygiašonis (jo kraštinės yra ω spinduliai). Tada $\angle BQO = 180° - \angle OAB = 180° - \angle OBA = \angle PBO = \angle AQP$.

20. Tegu AE yra apibrėžtinio apskritimo skersmuo. Užtenka įrodyti, kad $\angle API$ remiasi į šį skersmenį, t. y. kad taškai P, I, E yra vienoje tiesėje $\impliedby \angle EPM = \angle IPM \impliedby \angle EAM = \angle IPM$.

    Trikampis AOM lygiašonis (OA ir OM yra spinduliai), todėl $\angle EAM = \angle OAM = \angle OMA$. Kadangi $\angle BAM = \angle CAM$, tai M yra lanko

BC vidurys ir OM yra stygos BC vidurio statmuo, $OM||ID$ (spindulys ID statmenas liestinei BC) ir $\angle OMA = \angle MID$. Taigi pakanka įrodyti, kad $\angle MID = \angle IPM \iff \triangle MDI \sim \triangle MIP$. Pastarieji trikampiai turi bendrą kampą M, taigi pakanka įrodyti lygybę $MI : MD = MP : MI$.

Trikampio ABC kampus A, B, C atitinkamai pažymėkime $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$. Įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į tą patį lanką, lygūs: $\angle MPC = \angle MAC = \alpha$, $\angle DCM = \angle BCM = \angle BAM = \alpha = \angle MPC$. Trikampiai PMC ir CMD turi po du tokius pačius kampus (kampas M bendras), todėl panašūs, ir $MC^2 = MD \cdot MP$. Panašiai randame $\angle AMC = 2\beta, \angle MCI = \alpha + \gamma, \angle MIC = \alpha + \gamma$. Taigi $\triangle IMC$ lygiašonis ir $MI^2 = MC^2 = MD \cdot MP \implies MI : MD = MP : MI$.