Organizuoja

VILNIAUS UNIVERSITETAS

REMIA

UAB „AFFECTO LIETUVA“
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA
NACIONALINIS EGZAMINŲ CENTRAS
LEIDYKLA TYTO ALBA
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA

XXVII LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Konkurso dalyvius sveikina
Pasaulinės nacionalinių matematikos varžybų federacijos Prezidentas
Alexander SOIFER
Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas

2012 09 29

1. Raskite visus realiuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2x^2 + xy - y^2 = 5 \end{cases}$$

sprendinius.

2. Išspręskite lygtį $\dfrac{2x}{3x^2 - x + 2} - \dfrac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$.

3. Duota lygčių sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_4^2, \\ x_3 + x_4 = x_5^2, \\ x_4 + x_5 = x_1^2, \\ x_5 + x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

(A) Nurodykite kokį nors vieną teigiamą jos sprendinį $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5)$.
(B) Raskite visus teigiamus lygčių sistemos sprendinius.

4. Įrodykite, kad su visais teigiamais skaičiais *a, b* ir *c* galioja nelygybė

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \le \frac{3}{4}.$$

5. Neneigiamų skaičių a, b, c, d suma lygi 4. Įrodykite, jog galioja nelygybė

$$\frac{a}{a^3+4} + \frac{b}{b^3+4} + \frac{c}{c^3+4} + \frac{d}{d^3+4} \le \frac{4}{5}.$$

6. Nagrinėkime visų skaičiaus 35 teigiamų kartotinių aibę.
(A) Raskite tos aibės skaičių, kurio visi skaitmenys būtų vienodi.
(B) Raskite patį mažiausią tokį skaičių.

7. Paukščių pulkininkas Genys Balys baigęs pamainą labai mėgsta sausoje pušyje dar pakalinėti – sudėti ar sudauginti ką nors “stulpeliu”. Vakar jis pasiėmė 7-ženklį natūralųjį skaičių be nulių (nulių kaip skaitmenų pulkininkas Balys nepripažįsta), padvigubino jį ir nulių padvigubintame skaičiuje vėl negavo. Kiek daugiausiai kartų galėjo sumažėti dvigubinamojo 7-ženklio skaičiaus skaitmenų sandauga? (Kad sandauga *gali* sumažėti, pulkininkas žino dar nematęs pavyzdžio 6 666 668 ·2 = 13 333 336.)

8. Nustatykite, kiek sveikųjų sprendinių $(x; y; z)$ turi lygtis

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30.$$

9. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (x; y; z), tenkinančius lygtį $x^2 = y \cdot 2^z + 1$ ir sąlygą $x > y > z$.

10. Poaibis $M \subseteq \{1,2,...,2011\}$ tenkina sąlygą: kad ir kokius tris to poaibio M elementus beimtume, tarp jų visada rasis tokie du elementai a ir b, kad arba a dalija b, arba b dalija a. Kiek daugiausiai elementų gali būti tokiame poaibyje M?

11. Ereliaučiuje gyvena 14 erelių, susibūrusių į įvairias partijas. Pagal įstatymus partijoje negali būti mažiau negu 3 ereliai ir jokios dvi partijos negali susidėti iš visiškai tų pačių erelių. Be to, įstatymas numato, kad joks erelis negali priklausyti daugiau kaip dviems partijoms. Koks didžiausias partijų skaičius gali būti Ereliaučiuje?

12. Kiekviename 2012 x 2012 lentelės langelyje yra įrašyta po skirtingą skaičių. Ar galima taip perstatyti tos lentelės skaičius, kad bet kurie du skaičiai, kurie iki perstatymo buvo toje pačioje eilutėje arba stulpelyje, atsidurtų skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose?

13. Karalius Saliamonas turi rimtų problemų. Po trijų dienų jis rengia didžiulį pokylį ir tam yra paruošęs 1000 butelių vyno. Ką tik paaiškėjo, kad vienas iš tų butelių užnuodytas. Žmogus, išgėręs bent vieną to vyno lašą, miršta ne vėliau kaip po trijų dienų (bet tikslus mirties laikas nežinomas). Karalius Saliamonas turi nustatyti užnuodytą butelį. Atsirado 10 savanorių vergų, kuriems Saliamono garbė yra vertesnė už nuosavą gyvybę. Kaip turi elgtis Saliamonas, kad tiksliai nustatytų, kuriuo buteliu jis negali vaišinti svečių?

14. Pažymėkime visus plokštumos taškus (x; y) su sveikosiomis koordinatėmis x ir y, tenkinančiomis sąlygas $1 \le x \le 19$, $1 \le y \le 4$. Kiekvieną iš tų taškų nudažome viena iš spalvų – arba balta, arba pilka, arba juoda. Įrodykite, kad visada galima surasti tokį stačiakampį, kurio visos 4 viršūnės nudažytos viena spalva, o kraštinės lygiagrečios koordinačių ašims.

15. Varžybose teisėjauja 8 teisėjai, vertinantys sportininkus įverčiais “taip” ir “ne”.Yra žinoma, kad bet kuriems dviems sportininkams yra du teisėjai, abiem davę po įvertį “taip”, yra du teisėjai, davę pirmajam įvertį “taip”, o antrajam įvertį “ne”, yra du teisėjai, davę pirmajam įvertį “ne”, o antrajam “taip”, ir yra du teisėjai, abiem davę po įvertį “ne”. Koks yra didžiausias galimas varžybų dalyvių skaičius?

16. Trapecijos $ABCD$ vienos šoninės kraštinės CD ilgis yra lygus abiejų (lygiagrečių) jos pagrindų AD ir BC ilgių sumai, o kitos tos trapecijos šoninės kraštinės AB vidurio taškas yra M. Raskite kampą CMD.

17. Smailiojo trikampio ABC pusiaukraštinė AK, pusiaukampinė BL ir aukštinė CH susikerta taške M. Raskite trikampio ABC plotą, jei $|CM| = 5$, o $|MH| = 3$.

18. Atkarpoje AB, kurios ilgis yra 10, pažymėtas toks taškas C, kad $|AC| = 6$, $|CB| = 4$. Taškai X ir Y yra paimti vienoje tiesės AB pusėje taip, kad $|YB| = |YC| = 3$, $|XA| = 8$ ir $|XC| = 6$. Raskite atkarpos XY ilgį.

19. Per apskritimo ω išorės tašką P išvestos to apskritimo kirstinė ir liestinė. Kirstinė tą apskritimą kerta taškuose A ir B, o liestinė liečia jį taške C, esančiame toje pačioje apskritimo ω skersmens, išvesto per tašką P, pusėje. Taško C projekciją tame skersmenyje pažymėkime Q. Įrodykite, kad QC yra $\angle AQB$ pusiaukampinė.

20. Į trikampį ABC, kuriame $AB \neq AC$, įbrėžtas apskritimas kraštinę BC liečia taške D, o taškai O ir I yra atitinkamai to trikampio apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimų centrai. Kampo A pusiaukampinė antrą kartą kerta trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą taške M, o tiesė DM antrą kartą kerta tą apskritimą taške $P \neq M$. Įrodykite, kad kampas API yra statusis.