

57-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Panevėžys, 2008 03 18
9–10 klasės

1. Duota, kad

$$M = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d),$$

kur a , b , c ir d – sveikieji skaičiai.

a) Ar visada M dalijasi iš 12?

b) Ar visada M dalijasi iš 24?

2. Apie smailųjį trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Atkarpa BD yra to apskritimo skersmuo. Iš viršūnės A nubrėžta aukštinė kerta apskritimą taške E . Įrodykite, kad keturkampio $BECD$ plotas yra lygus trikampio ABC plotui.

3. Įrodykite, kad jeigu $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, tai

$$\frac{x}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{7 + z^3 + x^3} + \frac{z}{7 + x^3 + y^3} \leq \frac{1}{3}.$$

4. Atsitiktinai imamos 9 taisyklingojo dvidešimtkampio viršūnės. Įrodykite, kad tarp jų visada atsiras tokios trys, kurios yra lygiašonio trikampio viršūnės.

57-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Panevėžys, 2008 03 18

11–12 klasės

1. Duota, kad

$$M = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d),$$

kur a , b , c ir d – sveikieji skaičiai.

- a) Ar visada M dalijasi iš 12?
b) Ar visada M dalijasi iš 24?
2. Trikampio ABC pusiaukampinė AL lygi kraštinei AC . Toje pusiaukampinėje yra toks taškas K , kad $CK = BL$. Įrodykite, kad kampas CKL yra lygus kampui ABC .
3. Raskite visus natūraliuosius skaičius n , su kuriais $n^7 + n^2 + 1$ yra pirminis skaičius.
4. Lentoje užrašyti 1004 skaičiai: 2, 4, 6, ..., 2008. Du žaidėjai pakaitomis daro tokį ėjimą:

pasirenka kurį nors lentoje užrašytą skaičių, jį nutrina, o jo vietoje įrašo vienetu mažesnę skaičių, be to, jeigu lentoje atsiranda nulis, tai jį iš karto nutrina, o jeigu atsiranda du vienodi skaičiai, tai nutrina vieną iš jų.

Laimi tas žaidėjas, kurio varžovas nutrina paskutinį skaičių. Įrodykite, kad žaidimą pradedantis žaidėjas visada gali laimėti, kad ir kaip žaistų antras žaidėjas. Kaip pradedantis žaidėjas turi žaisti?