


LIV LIETUVOS MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Visaginas, 2005 03 31

IX–X klasės

1. Su kokiomis n reikšmėmis ($n > 3$) skaičių rinkinį $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ galima suskirstyti į tris grupes su vienoda suma?
2. Kvadratinės lentos 8×8 kiekvienas vienetinis langelis nuspalvintas arba juodai, arba baltai. Vienu ėjimu lentoje galima pasirinkti bet kaip pasuktą trijų langelių „kampuką“  ir kiekvieną jo langelį perdažyti (juodą – baltai, o baltą – juodai). Ar galima po baigtinio skaičiaus ėjimų visus langelius nuspalvinti baltai?
3. Stačiojo trikampio ABC statiniai $AC = 3, BC = 4$. Atkarpa CD yra trikampio aukštinė. Kampų ABC ir ACD pusiau kampinės kertasi taške M , o kampų BAC ir BCD pusiau kampinės kertasi taške N . Raskite atkarpos MN ilgį.
4. Ar yra tokių natūraliųjų skaičių a, b ir c , kad

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 4242 ?$$


XI–XII klasės

1. Duoti 2005 skaičiai

$$1^2 \ 2^2 \ 3^2 \ \dots \ 2005^2$$

Prieš kiekvieną iš jų galima parašyti + arba – . Kokį mažiausią neneigiamą skaičių galima gauti atlikus aritmetinius veiksmus?

2. Kvadratinės lentos 8×8 kiekvienas vienetinis langelis nuspalvintas arba juodai, arba baltai. Vienu ėjimu lentoje galima pasirinkti bet kaip pasuktą trijų langelių

„kampuką“  ir kiekvieną jo langelį perdažyti (juodą – baltai, o baltą –

juodai). Ar galima po baigtinio skaičiaus ėjimų visus langelius nuspalvinti baltai?

3. Apie trikampį ABC apibrėžtas apskritimas. Taškas M yra lanko AC (kuriam nepriklauso viršūnė B) vidurio taškas, o N yra lanko AB (kuriam nepriklauso viršūnė C) vidurio taškas. Atkarpos MN ir AB kertasi taške K . Įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras yra O . Įrodykite, kad KO yra lygiagreti kraštinei AC .

4. Skaičių seka a_0, a_1, a_2, \dots apibrėžiama sąlygomis

$$a_0 = 1$$

ir

$$a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n}, \text{ kai } n \geq 0.$$

Įrodykite, kad tokia seka yra vienintelė ir raskite a_n priklausomybę nuo n .