# 2010 m. MIF studentų Matematikos Olimpiados uždavinių sprendimai

2010 m. vasario 13d.

## 1 Jaunesniųjų grupė (I-III semestras)

1. Matrica $A$ turi savybę : yra natūralus skaičius $n$, kad matricos laipsnis $A^n = 4A^3 + 3A^2 + 2A + \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$-vienetinė matrica). Įrodykite, kad $A$ yra neišsigimusi matrica.

   *Sprendimas.* Pažymėkime matricą $B = A^{n-1} - 4A^2 - 3A - 2\mathbb{I}$. Pagal uždavinio sąlygą, $\mathbb{I} = A^n - 4A^3 - 3A^2 - 2A = A \cdot B$. Taigi $B$ yra atvirkštinė matricai $A$, todėl $A$ yra neišsigimusi. □

2. Tegul $a$, $b$, $c$, $d$ - teigiami realūs skaičiai, $a > b$. Įrodykite, kad funkcija $f(x) = ca^x - db^x$ bet kurią reikšmę $y \in \mathbb{R}$ įgyja ne daugiau kaip 2 kartus.

   *Sprendimas.* Tarkime priešingai: tegul lygtis $f(x) = y$ turi tris sprendinius $x = a$, $b$, ir $c$, kur $a < b < c$. Pagal Rolio teoremą, išvestinė $f'(x)$ įgyja reikšmę 0 intervaluose $(a, b)$ ir $(b, c)$. Bet $f'(x) = ca^x \ln a - db^x \ln b$ yra lygi nuliui vieninteliame taške $\xi = \ln(d \ln b / c \ln a) / \ln(a/b)$ arba iš vis nėra lygi 0, jeigu tik $a = 1$ arba $b = 1$. Taigi gavome prieštarą. □

3. Skaičius $N = p_1 p_2 \dots p_n$ yra lygus pirmų $n \geq 2$ pirminių skaičių $p_j, 1 \leq j \leq n$ sandaugai. Įrodykite, kad nei $N + 1$, nei $N - 1$ nėra natūralaus skaičiaus kvadratas.

   *Sprendimas.* Tarkime, kad $N + 1 = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Skaičius $N$ yra lyginis, todėl $k$ - nelyginis. Vadinasi, $N = (k + 1)(k - 1)$ dalijasi iš 4, nes $k - 1$ ir $k + 1$ abu yra lyginiai. Tačiau to būti negali pagal skaičiaus $N$ apibrėžimą. Toliau, tarkime, kad $N - 1 = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Pastebime, kad $N$ dalijasi iš trijų, todėl skaičiaus $k^2$ mažoji dalybos iš 3 liekana turėtų būti $-1$. Tai neįmanoma, nes sveikojo skaičiaus kvadrato dalybos iš trijų liekana gali būti tik 0 arba 1.

*Pastaba.* Jeigu $N = p_1 p_2 \dots p_n$ ir $n \le 3$, abu skaičiai $N+1$ ir $N-1$ yra pirminiai. Didesnėms $n$ reikšmėms tai jau nebėra teisinga: patikrinę $n = 4$ gauname $N - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 209 = 11 \cdot 19$, o jeigu $n = 6$, tai $N + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$. $\square$

4. Seka $a_n$ apibrėžta lygybe $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, be to, pirmi nariai $a_2 > a_1$ yra natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad $a_{2010} \ge 2^{2009}$.

   *Sprendimas.* Seka $a_n$ yra sveikų skaičių seka. Kai $n = 1, 2$, gauname $a_1 \ge 1 = 2^0$, $a_2 \ge 2 = 2^1$, nes $a_2 > a_1$. Tegul nelygybė teisinga, kai $n = k$. Dviejų gretimų sekos narių skirtumas

$$a_{n+1} - a_n = (3a_n - 2a_{n-1}) - a_n = 2(a_{n+1} - a_n).$$

   Keisdami $n$ į $n - 1$, gauname

$$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) = \cdots = 2^{n-1}(a_2 - a_1).$$

   Iš čia $a_{n+1} = a_n + 2^n(a_2 - a_1)$. Kadangi $a_2 - a_1 \ge 1$, $a_k \ge 2^{k-1}$, tai $a_{n+1} \ge 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$. Vadinasi, $a_{n+1} \ge 2^n$ visiems $n \in \mathbb{N}$. $\square$

5. Funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vadinsime *pakankamai baisia*, jeigu kiekviename taške $x \in \mathbb{R}$ ji įgyja baigtinę realią reikšmę $y = f(x)$, tačiau bet kuriame realių skaičių tiesės atvirame intervale funkcija įgyja neaprėžtai dideles reikšmes. Sukonstruokite pakankamai baisios funkcijos pavyzdį.

   *Sprendimas.* Kiekvieną racionalų skaičių $x$ galime vienareikšmiškai užrašyti pavidalu $x = m/n$, kur $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $DBD(m, n) = 1$. Dabar apibrėžkime funkciją

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \text{ yra iracionalus} \\ n, & \text{jei } x = m/n \text{ yra racionalus.} \end{cases}$$

   Akivaizdu, kad kiekviename taške $x \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x)$ įgyja baigtinę realią reikšmę. Iš kitos pusės, bet kuriame baigtiniame atvirame intervale $(a, b)$, $a < b$ funkcija įgyja kiek norima dideles natūralias reikšmes $n$. Iš tikro, intervale $(a, b)$ yra be galo daug racionalių skaičių, bet iš jų tokių racionalių skaičių, kurių vardiklis $n$ yra aprėžtas, yra tik baigtinis skaičius. $\square$

## 2 Vyresniųjų grupė (IV-VIII semestras)

1. Žavioji studentė Monika norėtų sužinoti, ar konverguoja eilutė

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

   Ar kas nors galėtų padėti studentei Monikai?

   *Sprendimas.* Skaičių eilutės $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \ln n)$ nariai $a_n = 1/(n \ln n)$ yra teigiami ir monotoniškai mažėjantys. Pritaikysime integralinį eilučių konvergavimo kriterijų. Netiesioginis integralas

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A \to +\infty} \int_2^{A} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{A \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} (\ln \ln A - \ln \ln 2) = +\infty$$

   diverguoja, todėl nagrinėjama eilutė taip pat diverguoja. □

2. Matricos $A$ ir $B$ yra panašios, jei egzistuoja neišsigimusi matrica $T$, tokia kad $B = TAT^{-1}$. Nustatykite, ar matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   yra panašios.

   *Sprendimas.* Panašių matricų pėdsakai (pagrindinės įstrižainės elementų suma) yra lygūs. $\mathrm{Tr}\ (A) = a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2$, $\mathrm{Tr}\ (B) = b_{11} + b_{22} = 1 + (-1) = 0$. Gauname $\mathrm{Tr}\ (A) \neq \mathrm{Tr}\ (B)$, taigi $A$ ir $B$ nėra panašios. □

3. Raskite visas natūralių skaičių poras $(m, n)$, kurios tenkina nelygybę

$$\left| \sqrt{2} - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^3}.$$

   *Sprendimas.* Padauginę pradinę nelygybę iš skaičiaus $n^2(n\sqrt{2} + m)$, gauname

$$n|2n^2 - m^2| < \sqrt{2} + \frac{m}{n}.$$

Po modulio ženklu esantis sveikas skaičius nėra lygus nuliui (nes priešingu atveju gautume kad $\sqrt{2} = m/n$ yra racionalus). Vadinasi, $|2n^2 - m^2| \geq 1$, todėl

$$n < \sqrt{2} + \frac{m}{n}.$$

Iš kitos pusės, iš pradinės uždavinio nelygybės gauname

$$\sqrt{2} - \frac{1}{n^3} < \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{n^3}, \tag{1}$$

taigi $n < 2\sqrt{2} + 1/n^3$, arba kitaip

$$n - \frac{1}{n^3} < 2\sqrt{2}.$$

Pastaroji nelygybė teisinga su $n = 1$ ir $n = 2$, o kai $n \geq 3$, jos kairė pusė viršija dešinę. Lieka surasti visus sveikus skaičius $m$, kurie tenkiną nelygybę (1). Tam tikslui padauginame nelygybę (1) iš $n$, įsistatome galimas $n$ reikšmes $n = 1, 2$ ir randame sveikus skaičius $m$, kurie tenkina $n\sqrt{2} - 1/n^2 < m < n\sqrt{2} + 1/n^2$. Iš viso randame tris poras $(m, n) = (1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$. $\square$

4. Funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vadinsime *pakankamai baisia*, jeigu kiekviename taške $x \in \mathbb{R}$ ji įgyja baigtinę realią reikšmę $y = f(x)$, tačiau bet kuriame realių skaičių tiesės atvirame intervale funkcija įgyja neaprėžtai dideles reikšmes. Sukonstruokite pakankamai baisios funkcijos pavyzdį.

   *Sprendimas.* Žr. Jaunesnių studentų grupės 4 uždavinio sprendimą. $\square$

5. Legendinis katinas super-matematikas Micius aibių rinkinį

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

vadina *mielu širdžiai*, jei kiekviena iš tų aibių turi po 3 elementus ir bet kurios dvi iš jų, sakykim, $A_i$ ir $A_j$, $i \neq j$ turi lygiai vieną bendrą elementą.

   a) Raskite tokį rinkinį iš $n = 7$ aibių, kuriame $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_7 = \varnothing$.
   b) Micius mano, kad visuose mieluose širdžiai rinkiniuose iš $n \geq 8$ aibių visada egzistuoja elementas, kuris priklauso visoms aibėms $A_k, 1 \leq k \leq n$. Ar Micius teisus? Įrodykite.

*Sprendimas. a)* Vienas iš mielų širdžiai rinkinių yra toks:

$$A_1 = \{1, 2, 3\}, \quad A_2 = \{1, 4, 5\}, \quad A_3 = \{1, 6, 7\},$$

$$A_4 = \{2, 4, 6\}, \quad A_5 = \{2, 5, 7\}, \quad A_6 = \{3, 4, 7\},$$

$$A_7 = \{3, 5, 6\}.$$

*b)* Tarkime, kad joks elementas nepriklauso aibėms

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \quad A_5, \quad A_6, \quad A_7, \quad A_8$$

vienu metu. Pažymėkime $A_1 = \{a, b, c\}$. Likusias Aibes $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, $A_7$ suskirstykime į tris klases: klasei $K_a$ tegul priklauso aibės, kurių bendras elementas su $A_1$ yra $a$, klasei $K_b$ - aibės, kurių bendras elementas yra $b$, klasei $K_c$ - aibės, kurių bendras elementas yra $c$. Tegul didžiausia klasė yra $K_a$. Tada ji turi bent 3 aibes, sakykime, $A_2$, $A_3$, $A_4$. Pagal uždavinio sąlygą, viena iš aibių $A_j$ nepakliūna į $K_a$. Tegul tai aibė $A_5$. Be to tarkime, kad $A_5 = \{b, u, v\}$, kur $u$ yra bendras aibės $A_5$ ir $A_2$ elementas, o $v$ yra bendras $A_5$ ir $A_3$ elementas. Tuomet $A_4$ ir $A_5$ bendras elementas yra $b$, $u$ arba $v$. Bet tai neįmanoma, nes $A_4$ turėtų du bendrus elementus su viena iš aibių $A_1$, $A_2$, $A_3$. Gavome prieštarą. Taigi, visos aibės $A_j, 1 \leq j \leq 8$ turi vieną bendrą elementą. $\square$