VILNIAUS UNIVERSITETAS

Artūras Dubickas

XIV IR XV LIETUVOS KOMANDINĖS MATEMATIKOS OLIMPIADOS

Vilnius 2001

Apsvarstė ir rekomendavo spausdinti Vilniaus universiteto
Matematikos ir informatikos fakulteto taryba
(2001 m. birželio 19 d., protokolo Nr. 7)

Recenzavo: dr. Romualdas Kašuba

A. Dubickas. XIV ir XV Lietuvos komandinės matematikos olimpiados. Metodinė priemonė. – Vilnius, 2001.

Knygelėje pateiktos 1999 m. ir 2000 m. Lietuvos komandinių matematikos olimpiadų uždavinių sąlygos (lietuvių ir anglų kalbomis), jų sprendimai ir atsakymai. Be to, pateiktos ir tais metais vykusių tarptautinių komandinių matematikos olimpiadų uždavinių sąlygos. Skirta moksleiviams, matematikos mokytojams ir studentams matematikams.

2001 06 19. Apimtis 3,2 leidyb. apsk. l.
Vilniaus universitetas
Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedra,
Naugarduko g. 24, 2600 Vilnius.
Rinko ir maketavo *Vita Verikaitė.*
Tiražas 100 egz.

Turinys

XIV LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 1999 10 02

Olimpiados rėmėjai: INFO–TEC, BALTIC AMADEUS. Leidyklos ALMA LITTERA, AMŽIUS, TEV, TYTO ALBA.

Organizacinis komitetas: R. Kašuba (pirmininkas), A. Dubickas.

Vertinimo komisija: A. Dubickas (pirmininkas), V. Bagdonavičius, A. Bastys, R. Garunkštis, V. Gasiūnas, R. Jodelis, A. Juozapavičius, K. Karčiauskas, R. Kašuba, A. Krutovskis, V. Kazakevičius, R. Lapinskas, K. Liubinskas, A. Mačiulis, J. Mačys, E. Markšaitis, H. Markšaitis, A. Mažeika, A. Plikusas, V. Stakėnas, G. Stepanauskas, R. Zovė, S. Zubė.

REZULTATAI

Pirmoji vieta ir profesoriaus Jono Kubiliaus pereinamasis prizas – **Kauno technologijos universiteto gimnazijos pirmajai komandai**. Antroji vieta – **Vilniaus komandai**. Trečioji vieta – **Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjaus komandai**.

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum$	Vt.
VU MIF mat.	7	0	1	0	0	6	0	6	5	2	0	0	5	5	7	7	6	7	0	5	69	–
KTU gim. I	2	2	3	6	2	6	0	1	5	2	0	2	5	5	0	7	6	0	0	5	59	1
VU MIF inf.	7	2	0	1	0	6	0	1	5	2	0	0	5	5	3	0	6	0	0	5	48	–
Vilniaus	2	0	0	6	0	0	0	2	5	3	7	0	5	5	7	0	0	0	0	5	47	2
Vilniaus lic.	2	0	1	6	0	4	0	1	5	0	7	0	5	5	1	0	0	0	4	2	43	3
KTU gim. II	0	2	1	0	0	0	0	6	1	8	0	0	5	5	0	0	0	0	0	5	33	4
Klaipėdos	2	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	7	0	5	18	5-7
Panevėžio m.	2	0	0	1	0	0	0	2	1	1	0	2	0	4	0	0	0	0	0	5	18	5-7
Šiaulių	2	0	2	0	0	0	0	0	5	1	0	0	2	1	0	0	0	0	0	5	18	5-7
Mažeikių	0	0	0	0	0	0	0	6	1	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	12	8
Kauno „Saulė“	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1	0	0	0	0	0	0	9	9
Tauragės	0	0	1	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	8	10
Kretingos	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	7	11
Kupiškio	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	5	12
Raseinių	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	13

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto pirmakursių matematikų ir informatikų komandos dalyvavo be konkurso.

Išsamus kiekvieno uždavinio sprendimas buvo vertinamas 5 balais. Be to, uždavinį teisingai išsprendus tik vienai komandai jai buvo pridedami 3 balai, dviem komandoms – po 2 balus, trim komandoms – po 1 balą.

Uždavinių sąlygos

1. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x^3 + 48z = 4(3z^2 + 16), \\ y^3 + 48x = 4(3x^2 + 16), \\ z^3 + 48y = 4(3y^2 + 16). \end{cases}$$

2. Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti reiškinys

$$\frac{1+a^2}{15+b^2+c^2} + \frac{15+b^2+c^2}{1+a^2} + \frac{6+b^2}{10+a^2+c^2} + \\ + \frac{10+a^2+c^2}{6+b^2} + \frac{9+c^2}{7+a^2+b^2} + \frac{7+a^2+b^2}{9+c^2},$$

kai a, b ir c yra sveikieji skaičiai?

3. Raskite lygties

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x + 3 - \sqrt{9x^2 + 178x + 969}\right)\right) = 1$$

sveikąsias šaknis.

4. Raskite reiškinio

$$ab + bc + abcd - a - b - abc - bcd$$

didžiausią reikšmę, kai $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$, ir nurodykite visus ketvertus (a, b, c, d), su kuriais ji įgyjama.

5. Sveikųjų nenulinių skaičių trejetas (a, b, c) tenkina sąlygą

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3.$$

a) Įrodykite, kad abc yra sveikojo skaičiaus kubas.
b) Ar egzistuoja bent vienas toks trejetas (a, b, c), kur $a \neq b$?

6. Įrodykite, kad lygtis $a^{1999} + b^{1999} + c^{1999} = d^{2000}$ turi be galo daug natūraliųjų sprendinių.

7. Daugianaris $ax^4 + bx^3 + cx + 7$ neturi realiųjų šaknų. Įrodykite, kad

$$6a + 5 > |3b + c|.$$

8. Prie n-ženklio skaičiaus pridedamas skaičius, gaunamas iš jo užrašius jo skaitmenis atvirkštine tvarka. Ar visada gautoje sumoje bus bent vienas lyginis skaitmuo, kai
a) $n = 1999$?
b) $n = 2000$?
c) $n = 2001$?

9. Kvadrate, kurio kraštinė lygi 1, yra 101 taškas. Įrodykite, kad bent penkis iš jų galima uždengti skrituliu, kurio skersmuo 2/7.

10. Raskite visus natūraliuosius n, su kuriais egzistuoja n skaičių $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kiekvienas iš kurių lygus 1 arba -1, tenkinančių sąlygą

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0.$$

11. Įrodykite, kad n skirtingų natūraliųjų skaičių $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ bendras mažiausias kartotinis yra ne mažesnis už na_1.

12. Raskite reiškinio

$$a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6 + a_7a_8a_9$$

mažiausią reikšmę, kai $a_1, a_2, \ldots, a_9$ yra 9 skirtingi natūralieji skaičiai $1, 2, 3, \ldots, 9$.

13. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas kai $x \neq 0$, tenkinančias sąlygą

$$f(x) - 3f(1/x) = 3^x.$$

14. Lentoje parašyti keli nenuliniai skaičiai. Kiekvienas iš jų yra lygus trečdaliui likusiųjų skaičių sumos. Kiek lentoje yra skaičių?

15. Įrodykite, kad skaičių $\sqrt{2}$ galima užrašyti tokių devynių skaičių suma, kurių dešimtainėje išraiškoje tėra tik skaitmenys 0 ir 3.

16. Trikampio, kurio perimetras lygus 2, kraštinių ilgiai lygūs a, b ir c. Įrodykite, kad

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

17. Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 78$ ir $BC = 52$, o šoninės kraštinės $AB = 10$ ir $CD = 24$. Raskite apskritimo, einančio per taškus A ir B bei liečiančio kraštinės CD tęsinį, spindulį.

18. Styga AB remiasi į 120^0 apskritimo lanką. Taškas C yra tame lanke, o taškas D – stygoje AB. Žinoma, kad $AD = 2$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$. Raskite trikampio ABC plotą.

19. Ar galima plokštumoje taip išdėstyti skritulius, kurių skersmenys lygūs $1, 2, 3, \ldots$, kad bet kokia tos plokštumos tiesė turėtų bendrų taškų su ne daugiau kaip dviem skrituliais?

20. Ar egzistuoja trikampis, kurį galima padalyti į 1999 trikampius, kiekvienas iš kurių būtų panašus į duotąjį trikampį?

Komentarai, nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. *1 būdas.* Pertvarkome pirmąją lygtį

$$x^3 = 4(3z^2 - 12z + 16) = 4\big(3(z-2)^2 + 4\big).$$

Vadinasi, $x > 0$. Analogiškai, y ir z yra teigiami. Sudėję visas tris lygtis turime

$$\begin{aligned} &x^3 - 12x^2 + 48x - 64 + y^3 - 12y^2 + 48y - 64 \\ &+ z^3 - 12z^2 + 48z - 64 \\ &= (x-4)^3 + (y-4)^3 + (z-4)^3 = 0. \end{aligned}$$

Tarkime, kad $x > 4$. Tada iš pirmosios lygties gauname, kad $48z < 12z^2$, t. y. $z > 4$. Dabar iš trečiosios lygties gauname, kad $48y < 12y^2$, t. y. $y > 4$. Prieštara. Kita vertus, jei $x < 4$, tai iš pirmosios lygties išplaukia, kad $z < 4$, o tada iš trečiosios išplaukia, kad $y < 4$, vėl prieštara. Taigi $x = 4$. Iš antrosios lygties tada gauname, kad $y = 4$, o iš trečiosios – $z = 4$. Vadinasi, $(x, y, z) = (4, 4, 4)$ yra vienintelis sprendinys.

2 būdas. Tarkime, kad $x > y$ ir $y > z$. Iš pirmosios lygties išplaukia, kad

$$z^3 + 48z < 12z^2 + 64,$$

t. y. $(z-4)^3 < 0$, t. y. $z < 4$. Iš trečiosios lygties,

$$z^3 - 64 = 12(y-4)y,$$

išplaukia, kad $0 < y < 4$. Iš antrosios lygties,

$$y^3 - 64 = 12(x-4)x,$$

dabar turime $0 < x < 4$. Todėl

$$64 + 48z < 4(3z^2 + 16),$$

t. y. $z < 0$ arba $z > 4$. Kadangi $z < 4$, tai z yra neigiamas. Iš trečiosios lygties,

$$48y > 4(3y^2 + 16),$$

t. y. $3(y-2)^2+4 < 0$. Vadinasi, mūsų prielaida, kad tarp x, y ir z egzistuoja didžiausias skaičius, yra neteisinga. Todėl $x = y$, $y = z$ arba $x = z$. Įrašę į atitinkamą lygtį, gausime $x = y = z = 4$.

Atsakymas: $x = y = z = 4$.

2. *1 būdas.* Pažymėkime $x = 1 + a^2$, $y = 6 + b^2$, $z = 9 + c^2$. Turime reiškinį

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y+z}{x} + \frac{y}{x+z} + \frac{x+z}{y} + \frac{z}{x+y} + \frac{x+y}{z}.$$

Perrašome jį

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y+z}{4x} + \frac{y}{x+z} + \frac{x+z}{4y} + \frac{z}{x+y} + \frac{x+y}{4z}$$
$$+ \frac{3}{4}\Big(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y}\Big).$$

Kadangi,

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y+z}{4x}\geq 2\sqrt{\frac{1}{4}}=1,$$

$$\frac{y}{x+z}+\frac{x+z}{4y}\geq 1,$$

$$\frac{z}{x+y}+\frac{x+y}{4z}\geq 1,$$

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2,$$

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2,$$

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2,$$

tai reiškinys yra ne mažesnis už

$$1+1+1+\frac{3}{4}(2+2+2)=7,5.$$

Lygybė yra pasiekiama, kai $x=y=z$, t. y., pavyzdžiui, kai $a=3$, $b=2$, $c=1$.

2 būdas. Reiškinys yra lygus

$$\begin{aligned}
7,5 &+ \left(\sqrt{\frac{1+a^2}{15+b^2+c^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15+b^2+c^2}{1+a^2}}\right)^2\\
&+ \left(\sqrt{\frac{6+b^2}{10+a^2+c^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+a^2+c^2}{6+b^2}}\right)^2\\
&+ \left(\sqrt{\frac{9+c^2}{7+a^2+b^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+a^2+b^2}{9+c^2}}\right)^2\\
&+ \frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{1+a^2}{6+b^2}}-\sqrt{\frac{6+b^2}{1+a^2}}\right)^2\\
&+ \frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{1+a^2}{9+c^2}}-\sqrt{\frac{9+c^2}{1+a^2}}\right)^2\\
&+ \frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{6+b^2}{9+c^2}}-\sqrt{\frac{9+c^2}{6+b^2}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Todėl jis yra didesnis arba lygus 7,5. Lygybę turime, kai $1 + a^2 = 6 + b^2 = 9 + c^2$, t. y. pvz., $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$.

Atsakymas: $7,5$.

3. Lygtis ekvivalenti lygčiai

$$3x + 3 - \sqrt{9x^2 + 178x + 969} = 16n,$$

kur n yra sveikasis skaičius.

1 būdas. Pažymėkime $x + 1 = y$. Iš lygties

$$\begin{aligned} 3y - 16n &= \sqrt{9y^2 + 160y + 800} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(9y + 80)^2 + 800} \end{aligned}$$

išplaukia, kad $y > 16n/3$ ir

$$\begin{aligned} 9(9y^2 - 96yn + 256n^2) &= (9y + 80)^2 + 800 \\ &= 81y^2 + 1440y + 7200. \end{aligned}$$

Todėl

$$y = \frac{8n^2 - 25}{3n + 5}.$$

Kadangi

$$\frac{8n^2 - 25}{3n + 5} = \frac{72n^2 - 225}{9(3n + 5)} = \frac{8(3n + 5)(3n - 5) - 25}{9(3n + 5)},$$

tai

$$9y(3n + 5) = 8(3n + 5)(3n - 5) - 25.$$

Vadinasi, 25 dalijasi iš $3n + 5$. Todėl $3n + 5 = \pm 1, \pm 5, \pm 25$. Gauname tris sveikąsias n reikšmes $n = -10, -2, 0$. Atitinkamai, $y = -31, -7, -5$. Sąlygą $y > 16n/3$ tenkina dvi reikšmės $y = -31$ ir $y = -7$. Vadinasi, $x = -32$ ir $x = -8$.

2 būdas. Kadangi

$$3(3y - 16n) = \sqrt{(9y + 80)^2 + 800},$$

tai

$$800 = \big(3(3y-16n)\big)^2 - (9y+80)^2 = 32(3n+5)(24n-9y-40),$$
$$25 = (3n+5)(24n-9y-40).$$

Nagrinėdami atvejus $25 = (-1)\cdot(-25) = (-5)\cdot(-5) = (-25)\cdot(-1) = 1\cdot 25 = 5\cdot 5 = 25\cdot 1$ gauname tris sprendinius $n=-10$, $y=-31$; $n=-2$, $y=-7$; $n=0$, $y=-5$. Trečiasis sprendinys netenkina pradinės lygties, o pirmieji du tenkina.

Atsakymas: $x=-32$ ir $x=-8$.

4. *1 būdas.* Turime

$$ab+bc+abcd-a-b-abc-bcd$$
$$(1-a)\Big(1-b\big(1-c(1-d)\big)\Big)-1\le 0.$$

Taigi didžiausia reikšmė yra lygi 0. Ji įgyjama, kai $a=0$ ir $b\big(1-c(1-d)\big)=0$. Pastaroji lygtis teisinga, kai $b=0$, c ir d – bet kokie, arba b – bet koks, o $c=1$, $d=0$.

2 būdas. Kadangi $abcd\le bcd$, $ab\le a$ ir $bc\le b$, tai

$$ab+bc+abcd\le a+b+bcd.$$

Vadinasi,

$$(ab+bc+abcd)-(a+b+bcd)-abc\le 0.$$

Todėl didžiausia reiškinio reikšmė neviršija 0. Pastebėkime, kad ji yra lygi 0, nes taip bus, kai $a=b=c=d=0$. Bendru atveju, reikšmė 0 yra pasiekiama, kai $abcd=bcd$, $ab=a$, $bc=b$ ir $abc=0$. Įrodysime, kad $a=0$. Iš tiesų, jei $a\ne 0$, tai $bc=0$. Tada ir $b=0$, iš kur išplaukia, kad $a=0$. Prieštara. Kai $a=0$, turime dvi lygtis $bcd=0$ ir $bc=b$. Dabar matome, kad jei $b=0$, tai c ir d gali būti bet kokie. Jei $b\ne 0$, tai $c=1$, o $d=0$. Kai $c=1$, $d=0$, tai tinka bet koks b.

Atsakymas: didžiausia reikšmė yra 0. Ji įgyjama, kai $a=b=0$, $0\le c$, $d\le 1$ arba $a=d=0$, $0\le b\le 1$, $c=1$.

5. a) Tegul (a,b,c) yra trejetas, tenkinantis uždavinio sąlygą. Galime laikyti, kad skaičių a, b ir c bendras didžiausias daliklis yra lygus

1. Priešingu atveju, galima nagrineti trejetą a/d, b/d, c/d, kur d – bendras didžiausias daliklis. Tegul p yra pirminis skaičius, dalijantis abc. Kadangi

$$a^2c + b^2a + c^2b = 3abc,$$

tai p dalija bent du skaičius iš a, b ir c. Tegul tai bus a ir b. Tarkime, kad $a = p^m a_1$, $b = p^n b_1$, kur $(a_1, p) = 1$ ir $(b_1, p) = 1$. Įrodysime, kad $n = 2m$. Iš tiesų, jei $n < 2m$, tai $n + 1 \leq 2m$. Skaičiai a^2c, b^2a ir $3abc$ dalijasi iš p^{n+1}, o skaičius c^2b iš p^{n+1} nesidalija. Prieštara. Jei $n > 2m$, tai $n \geq 2m + 1$. Tada b^2c, c^2b ir $3abc$ dalijasi iš p^{2m+1}, o a^2c nesidalija. Prieštara. Vadinasi, $n = 2m$, t. y. jei abc dalijasi iš p, tai $abc = p^{3m}a_1b_1c$, kur $(a_1b_1c, p) = 1$. Šis teiginys teisingas su visais pirminiais abc dalikliais. Vadinasi, abc yra sveikojo skaičiaus kubas.

b) Tokių trejetų yra be galo daug. Pvz., $(-3, 18, 4)$ arba $(t, -2t, 4t)$ su sveikuoju nenuliniu t.

Atsakymas: b) egzistuoja, pvz., $(a, b, c) = (1, -2, 4)$.

6. Duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\left(\frac{a}{d}\right)^{1999} + \left(\frac{b}{d}\right)^{1999} + \left(\frac{c}{d}\right)^{1999} = d.$$

Todėl galima paimti $d = m^{1999} + n^{1999} + p^{1999}$, $a = dm$, $b = dn$, $c = dp$, kur m, n ir p – bet kokie natūralieji skaičiai. Kai $m = p = 1$, turime begalinę seriją sprendinių

$$a = c = d = n^{1999} + 2,$$
$$b = n\big(n^{1999} + 2\big).$$

7. Čia pateikiami sprendimai taip pat yra autoriaus straipsnyje ,,Apie teigiamus daugianarius“ (Alfa plius Omega, 1999, Nr. 2(8), p. 81–83).
Daugianarį $P(x)$ vadinsime teigiamu, jei $P(x) > 0$ su visais realiaisiais x.

1 būdas. Pažymėkime

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 7.$$

Kadangi $P(0) = 7 > 0$ ir $P(x)$ neturi realiųjų šaknų, tai $P(x)$ yra teigiamas daugianaris. Todėl $a \geq 0$, nes priešingu atveju imdami pakankamai didelį x gautume neigiamą daugianario reikšmę $P(x)$. Sudėkime du teigiamus skaičius $P(1)$ ir $P(2)$:

$$P(1)+P(2) = a+b+c+7+16a+8b+2c+7 = 17a+9b+3c+14 > 0.$$

Gavome nelygybę $17a+14 > -9b-3c$. Analogiškai, sudėję $P(-1)$ ir $P(-2)$ gausime $17a+14 > 9b+3c$. Tai reiškia, kad $|9b+3c| = 3|3b+c| < 17a+14$. Aišku, kad $17a+14 < 18a+15 = 3(6a+5)$, nes $a \geq 0$. Todėl $3|3b+c| < 3(6a+5)$, ir padaliję iš 3 gauname reikiamą nelygybę.

2 būdas. Vėl pasinaudosime tuo, kad jei daugianaris $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 7$ yra teigiamas, tai $a \geq 0$. Kadangi

$$P(\sqrt{3}) = 9a + 3\sqrt{3}b + \sqrt{3}c + 7 > 0,$$

tai $9a + 7 > -\sqrt{3}(3b+c)$.
Analogiškai, iš nelygybės $P(-\sqrt{3}) > 0$ išplaukia, kad $9a + 7 > \sqrt{3}(3b+c)$. Vadinasi, $9a + 7 > \sqrt{3}|3b+c|$, todėl vėl gauname reikiamą nelygybę, nes $6 > 9/\sqrt{3}$, $5 > 7/\sqrt{3}$, taigi $(6a+5)\sqrt{3} > 9a+7$.
Pabandykite rasti dar vieną šio uždavinio sprendimą, naudodamiesi nelygybėmis

$$P(\sqrt[4]{42/5}) > 0, \quad P(-\sqrt[4]{42/5}) > 0.$$

8. a) Panagrinėkime skaičių

$$7070\ldots70606\ldots0606,$$

kuriame yra po 500 septynetų ir šešetų ir 999 nuliai. Sudėję jį su skaičiumi

$$6060\ldots60707\ldots0707,$$

gausime skaičių

$$1313\ldots131313\ldots1313,$$

kurį sudaro 1000 kartų užrašyta pora 13. Toks skaičius neturi nė vieno nelyginio skaitmens.

Žinoma, tai yra ne vienintelis toks skaičius. Pavyzdžiui, galima septynetus ir šešetus pakeisti atitinkamai į aštuonetus ir trejetus.

b) Šiuo atveju užtenka sudėti, pavyzdžiui, skaičių

$$22\ldots211\ldots1,$$

kurį sudaro po 1000 dvejetų ir vienetų, su skaičiumi

$$11\ldots122\ldots2.$$

Gausime skaičių, turintį 2000 trejetų, kuris aišku neturi nė vieno lyginio skaitmens.

c) Įrodysime, kad sudėję $4n+1$ skaitmenį turintį skaičių su skaičiumi, kurio skaitmenys užrašyti atvirkštine tvarka, visada gausime skaičių, turintį bent vieną lyginį skaitmenį. Kadangi 2001 yra lygus $4\times 500+1$, tai įrodys, kad šiuo atveju atsakymas yra teigiamas. Įrodinėsime indukcija pagal n. Kai $n=0$, teiginys akivaizdus: $x+x$ yra lyginis skaičius, todėl jo paskutinis skaitmuo – lyginis. Tarkim, kad skaičių

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{4n}a_{4n+1}}$$

ir

$$\overline{a_{4n+1}a_{4n}\ldots a_2a_1}$$

suma yra skaičius A, kuris neturi nė vieno lyginio skaitmens. Kadangi $a_{4n+1}+a_1$ paskutinis skaitmuo yra nelyginis, tai suma a_2+a_{4n} yra ne didesnė už 9. Todėl ir $a_{4n+1}+a_1\leq 9$. Taigi skaičius A turi $4n+1$ skaitmenį. Taip pat jo du pirmieji ir du paskutinieji skaitmenys yra nelyginiai. Vadinasi, skaičiaus $\overline{a_3a_4\ldots a_{4n-2}a_{4n-1}}$ ir skaičiaus $\overline{a_{4n-1}a_{4n-2}\ldots a_4a_3}$ suma irgi neturi nė vieno lyginio skaitmens. Pagal indukcijos prielaidą, gauname prieštarą.

Atsakymas: a) ne, b) ne, c) taip.

9. Kvadratą, kurio kraštinė yra lygi 1, sudaro 25 kvadratėliai, kurių kraštinės lygios 1/5. Bent viename iš kvadratėlių yra bent penki taškai (priešingu atveju, taškų yra ne daugiau kaip $25\times 4=100$). Tą kvadratėlį visada galima uždengti skritulio, kurio skersmuo $\sqrt{2}/5$. Tačiau $2/7>\sqrt{2}/5$, todėl ir didesniu skrituliu penkis taškus visada galima uždengti.

10. Pažymėkime $x_1x_2 = y_1, x_2x_3 = y_2, \ldots, x_{n-1}x_n = y_{n-1}, x_nx_1 = y_n$. Skaičiai $y_1, y_2, \ldots, y_n$ taip pat lygūs 1 arba -1. Jų suma lygi nuliui,

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0,$$

todėl n turi būti lyginis skaičius. Įrodysime, kad n dalijasi iš 4. Iš tiesų, tarkime, kad $n = 4k - 2$, kur k yra natūralusis skaičius. Iš lygybės

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{4k-2} = 0$$

matome, kad tarp $y_1, y_2, \ldots, y_{4k-2}$ yra $2k - 1$ vienetas ir $2k - 1$ minus vienetas. Taigi

$$y_1y_2 \ldots y_{4k-2} = -1.$$

Tačiau

$$y_1y_2 \ldots y_{4k-2} = (x_1x_2 \ldots x_{4k-2})^2,$$

prieštara.

Kai n dalijasi iš 4, tokie skaičiai egzistuoja, pvz.,

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = 1, 1, -1, -1, \ldots, 1, 1, -1, -1.$$

Tada atitinkamos sandaugos yra $1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1$, o jų suma lygi 0.

Atsakymas: kai n dalijasi iš 4.

11. Tarkime, kad skaičių $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ bendras mažiausias kartotinis lygus m. Tada skaičiai

$$\frac{m}{a_n} < \frac{m}{a_{n-1}} < \ldots < \frac{m}{a_2} < \frac{m}{a_1}$$

yra skirtingi natūralieji skaičiai. Vadinasi, $m/a_1 \geq n$, todėl $m \geq na_1$.

12. Pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę, gauname

$$\begin{aligned}
&a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6 + a_7a_8a_9 \\
&\geq 3\sqrt[3]{a_1a_2\ldots a_9} \\
&= 3\sqrt[3]{1 \times 2 \times 3 \ldots \times 9} = 3\sqrt[3]{70 \times 72^2} \\
&> 3 \times 71 = 213.
\end{aligned}$$

Vadinasi, ta mažiausioji reikšmė yra ne mažesnė už 214. Kita vertus,

$$2\times 5\times 7+1\times 8\times 9+3\times 4\times 6=214,$$

todėl mažiausioji reikšmė yra lygi 214.

Atsakymas: 214.

13. Pakeitę x į $1/x$, gauname, kad

$$f(1/x)-3f(x)=3^{1/x}.$$

Sudėję šią lygybę, padaugintą iš 3, su $f(x)-3f(1/x)=3^x$, gauname, kad

$$-8f(x)=3^x+3^{1+1/x}.$$

Vadinasi,

$$f(x)=-\frac{3^x+3^{1+1/x}}{8}.$$

Atsakymas: vienintelė tokia funkcija yra $-(3^x+3^{1+1/x})/8$.

14. Tegul

$$\begin{aligned}3a_1&=a_2+\ldots+a_n,\\3a_2&=a_1+a_3+\ldots+a_n,\\&\vdots\\3a_n&=a_1+\ldots+a_{n-1}.\end{aligned}$$

Jei $a_1+a_2+\ldots+a_n=s$, tai, sudėję visas lygybes, gauname

$$3s=(n-1)s.$$

Vadinasi, $(n-4)s=0$, todėl $n=4$, arba $s=0$. Tačiau, jei $s=0$, tai $3a_1=-a_1,\ldots,3a_n=-a_n$. Tai įmanoma, tik kai $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, kas prieštarauja uždavinio sąlygai.
Kai $n=4$, tinka, pavyzdžiui, skaičiai $1,1,1,1$.

Atsakymas: 4.

15. Bet kokį teigiamą skaičių galima užrašyti 9 skaičių, kurių dešimtainėse išraiškose tėra 0 ir 1, suma. Jei $x>0$, taip užrašykime

$$\frac{x}{3}=x_1+x_2+\ldots+x_9.$$

Tada

$$x = 3\left(\frac{x}{3}\right) = 3x_1 + 3x_2 + \ldots + 3x_9.$$

Skaičių $3x_1, 3x_2, \ldots, 3x_9$ dešimtainėse išraiškose yra tik 0 ir 3. Vadinasi, bet kokį teigiamą skaičių (taip pat ir $\sqrt{2}$) galima užrašyti 9 skaičių, kurių išraiškose yra tik 0 ir 3, suma.

16. Kadangi $a + b + c = 2$, tai $a, b, c < 1$ (priešingu atveju, viena trikampio kraštinė yra didesnė arba lygi už kitų dviejų sumą). Taigi

$$(1-a)(1-b)(1-c) > 0.$$

Kadangi

$$\begin{aligned}(1-a)(1-b)(1-c) &= 1 - a - b - c + ab + ac + bc - abc \\ &= -1 + ab + ac + bc - abc \\ &= -1 + \frac{(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2} - abc \\ &= 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2} - abc,\end{aligned}$$

tai

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} + abc < 1$$

ir

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

Galima įrodyti, kad reiškinio

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$$

maksimumas, kai a, b, c yra trikampio, kurio perimetras 2, kraštinės yra pasiekiamas, kai $a = b = c = 2/3$ ir lygus $52/27$.

17. Tegul E yra kraštinių AB ir DC tęsinių sankirtos taškas (1 pav.).

1 pav.

Kadangi

$$\frac{AE}{BE} = \frac{DE}{CD} = \frac{AD}{BC} = \frac{3}{2},$$

tai $2AE = 3(AE - 10)$, $AE = 30$. Taip pat iš $2DE = 3(DE - 24)$ išplaukia, kad $DE = 72$. Kadangi

$$30^2 + 72^2 = 78^2,$$

tai trikampis AED yra statusis.

Tegul F yra atkarpos AB vidurio taškas, o G – apskritimo lietimosi su DE taškas. Jei O – apskritimo centras, tai $OFEG$ yra stačiakampis. Vadinasi, apskritimo spindulys yra lygus

$$OG = FE = AE - \frac{1}{2}AB = 25.$$

Atsakymas: 25.

18. Tegul O yra apskritimo centras, o F – statmens, nuleisto iš O į atkarpą AB , pagrindas (2 pav.).

2 pav.

Jei E yra atkarpos CD tęsinio sankirtos taškas su apskritimu, tai iš

$$AD \times BD = CD \times DE$$

gauname, kad $DE = CD = \sqrt{2}$. Iš trikampio AOF gauname, kad $OA = \sqrt{3}$, $OF = \sqrt{3}/2$. Todėl $FD = 1/2$ ir $OD = 1$. Vadinasi, trikampis AOD yra statusis, taip pat $\widehat{ADO} = 60^0$, $\widehat{CDA} = 30^0$. Trikampio ABC plotas yra lygus

$$\frac{AB \times CD \cos 60^0}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Atsakymas: $3\sqrt{2}/4$.

19. Imame, pavyzdžiui, plokštumoje Oxy, pusę parabolės $y = x^2$ su $x \geq 0$ (3 pav.).

3 pav.

Pirmąjį skritulį, kurio skersmuo lygus 1, padedame, pavyzdžiui taip, kad jo centras būtų taške $(1, 1)$. Tarkime, kad ant tos pusės parabolės jau sudėjome n skritulių, kurių skersmenys $1, 2, \ldots, n$ taip, kad jie tenkina uždavinio sąlygą, o jų centrai yra ant parabolės. Aišku, kad bet kokia tiesė, turinti bendrų taškų su 2 skrituliais, gali būti užrašyta $y = kx + c$ su $k > 0$. Kadangi x^2 auga greičiau negu $kx + c$, tai visada (pakankamai aukštai) galima padėti ir $n + 1$-ąjį skritulį.

Atsakymas: galima.

20. *1 būdas.* Bet kokį trikampį galime vidurio linijomis padalyti į 4 panašius trikampius (4 pav.).

4 pav.

Vėl dalijant vieną į keturis ir t. t. matome, kad bet kokį trikampį galima padalyti į $1+3k$ panašius trikampius (5 pav.).

5 pav.

Kadangi $1{+}3{\times}666 = 1999$, tai galima padalyti ir į 1999 trikampius.

2 būdas. Trikampį, kurio kampai 90^0, 60^0 ir 30^0, išvesdami iš stačiojo kampo aukštinę, dalijame į du trikampius su kampais 90^0, 60^0 ir 30^0 (6 pav.).

6 pav.

Tęsiant taip pat, matome, kad tokį trikampį (7 pav.)

7 pav.

galima padalyti į bet kokį skaičių panašių trikampių.

Atsakymas: taip.

Organized by
VILNIUS UNIVERSITY
Sponsored by
INFO–TEC
BALTIC AMADEUS
Publishing house ALMA LITTERA
Publishing house AMŽIUS
Publishing house TEV
Publishing house TYTO ALBA

14 th LITHUANIAN TEAM CONTEST IN MATHEMATICS

Department of Mathematics and Informatics,
Vilnius University
1999 10 02

1. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^3 + 48z = 4(3z^2 + 16), \\ y^3 + 48x = 4(3x^2 + 16), \\ z^3 + 48y = 4(3y^2 + 16). \end{cases}$$

2. Find the minimal value of the expression

$$\frac{1 + a^2}{15 + b^2 + c^2} + \frac{15 + b^2 + c^2}{1 + a^2} + \frac{6 + b^2}{10 + a^2 + c^2} + \frac{10 + a^2 + c^2}{6 + b^2} + \frac{9 + c^2}{7 + a^2 + b^2} + \frac{7 + a^2 + b^2}{9 + c^2},$$

where a, b and c are integers.

3. Find the integer solutions of the equation

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x + 3 - \sqrt{9x^2 + 178x + 969}\right)\right) = 1.$$

4. Find the maximal value of the expression

$$ab + bc + abcd - a - b - abc - bcd$$

under assumption that

$$0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$$

and determine all such quadriples (a, b, c, d) for which this value is attained.

5. The triple (a, b, c) of some non–zero integers satisfies the condition

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3.$$

Show that abc is a cube of an integer.

6. Prove that the equation

$$a^{1999} + b^{1999} + c^{1999} = d^{2000}$$

has infinitely many solutions in positive integers.

7. All roots of the polynomial $ax^4 + bx^3 + cx + 7$ are non–real. Prove that

$$6a + 5 > |3b + c|.$$

8. To an n-digit number we add the number obtained by writting the digits of the initial number in reverse order. Determine whether this sum always has at least one odd digit in the case if
a) $n = 1999$?
b) $n = 2000$?
c) $n = 2001$?

9. 101 points belong to the square with the side equal to 1. Prove that at least 5 of the points can be covered with the circle of diameter 2/7.

10. Find all positive integers n for which it is possible to find n numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ each of them being equal to -1 or 1 satisfying the condition

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0.$$

11. Prove that the least common multiple of n different positive integers $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ is at least na_1 .

12. Find the minimal value of the expression

$$a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6 + a_7a_8a_9$$

if $\{a_1, a_2, \ldots, a_9\} = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$.

13. Determine all functions $f(x)$ which are defined for every real $x \neq 0$ satisfying the condition

$$f(x) - 3f(1/x) = 3^x.$$

14. Several non–zero numbers are written on the blackboard. Each of them is equal to one third of the sum of the remaining ones. How many numbers are written on the blackboard?

15. Prove that $\sqrt{2}$ can be represented as a sum of nine numbers whose decimal digits are either 0 or 3.

16. The sides of a triangle with perimeter 2 are equal to a , b and c . Prove that

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

17. The leqs AB and BC of trapezoid $ABCD$ are equal to 78 and 52, respectively. Find the radius of the circle passing through points A , B and tangent to the prolongation of the side CD .

18. The chord AB is adjacent to the arch of 120^0 of a circle. The point C belongs this arch, and the point D belongs to the chord AB . Suppose that $AD = 2$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$. Determine the area of the triangle ABC .

19. Is it possible to locate the circles with radii $1, 2, 3, \ldots$ in a plane in such a way that each line in this plane has common points with at most two circles?

20. Determine whether there exists a triangle such that it is possible to divide it into 1999 triangles each of them being similar to the initial triangle?

Tarptautinė komandinė matematikos olimpiada
Baltijos kelias 99

Reikjavikas (Islandija) 1999 11 06

1. Raskite visus realiuosius skaičius a, b, c ir d, tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1, \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9, \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 9, \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 9. \end{cases}$$

2. Raskite visus natūraliuosius skaičius, pasižyminčius savybe, kad trečiojo laipsnio šaknis iš jo gaunama nubraukus paskutinius tris jo dešimtainės išraiškos skaitmenis.

3. Raskite visus natūraliuosius skaičius $n \geqslant 3$, su kuriais nelygybė

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leqslant 0$$

yra teisinga visiems realiesiems skaičiams $a_1, \ldots, a_n$, kurių suma yra lygi nuliui $a_1 + \ldots + a_n = 0$.

4. Visoms teigiamų realiųjų skaičių poroms (x, y) apibrėžta funkcija

$$f(x, y) = \min\left(x, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

Įrodykite, kad atsiras tokia pora (x_0, y_0), kad $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ visoms teigiamų skaičių poroms (x, y). Raskite $f(x_0, y_0)$.

5. Taškas (a, b) priklauso apskritimui $x^2 + y^2 = 1$. Apskritimo liestinė, išvesta per tą tašką, turi vienintelį bendrą tašką su parabole $y = x^2 + 1$. Raskite visus tokius taškus (a, b).

6. Kiek mažiausiai ėjimų reikia padaryti šachmatų žirgui, kad jis patektų iš $n \times n$ $(n \geqslant 4)$ matmenų šachmatų lentos vieno kampinio langelio į kitame įstrižainės gale esantį kampinį langelį?

7. Du šachmatų lentos langelius vadinsime gretimais, jeigu jie turi bendrą kraštinę arba bendrą viršūnę. Ar gali karalius, pradėjęs maršrutą kuriame nors langelyje, pabuvoti visuose likusiuose langeliuose po vieną kartą, kad visi karaliaus ėjimai, išskyrus patį pirmąjį, yra atliekami į langelius, kurie yra gretimi lyginiam jau aplankytų langelių skaičiui?

8. Turime 1999 skirtingo svorio monetas bei įtaisą, kuris viena operacija nustato, kurios iš trijų paimtų monetų svoris yra vidurinis. Įrodykite, kad tūkstantoji pagal svorį moneta gali būti surasta atlikus ne daugiau kaip 1000000 tokių operacijų ir kad tai yra vienintelė moneta, kurios pagal svorį užimama vieta gali būti nustatyta tokiu įtaisu.

9. Kubą, kurio briauna lygi 1, padalijame į 27 vienetinius kubelius. Skaičiai 1,2,...,27 yra bet kaip išskirstomi po vieną į kiekvieną kubelį. Apskaičiuojame visas sumas iš trijų skaičių, paimtų kurios nors kubo briaunos kryptimi. Yra 27 tokios sumos (kiekvienoje iš 3 krypčių, lygiagrečių kubo briaunoms, galima sudaryti 9 tokias sumas). Kiek daugiausiai iš tų 27 sumų gali būti nelyginės?

10. Ar galima vienetinio skritulio taškus suskaidyti į tris poaibius taip, kad nė viename poaibyje nebūtų jokių dviejų taškų, atstumas tarp kurių lygus 1?

11. Bet kaip paimti 4 plokštumos taškai, iš kurių jokie trys nėra vienoje tiesėje. Įrodykite, jog atsiras toks per tris iš jų einantis apskritimas, kad ketvirtas taškas priklauso tam apskritimui arba yra jo viduje.

12. Trikampio ABC kraštinės tenkina lygybę $2AB = AC + BC$. Įrodykite, kad įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centrai bei kraštinių AC ir BC vidurio taškai priklauso vienam apskritimui.

13. Trikampio ABC kampų A ir B pusiaukampinės kerta kraštines BC ir CA atitinkamai taškuose D ir E. Raskite kampą C, jei $AB = AE + BD$.

14. Lygiašoniame trikampyje ABC turime $AB = AC$. Taškai D ir E priklauso atitinkamai kraštinėms AB ir AC. Tiesė, einanti per tašką B lygiagrečiai AC, kerta tiesę DE taške F, o tiesė, einanti per tašką C lygiagrečiai AB, kerta tiesę DE taške G. Įrodykite, kad keturkampių $DBCG$ ir $FBCE$ plotų santykis yra lygus AD ir AE ilgių santykiui.

15. Trikampio ABC kampas $\widehat{C} = 60^0$, o $AC < BC$. Kraštinės BC taškas D tenkina sąlygą $BC = AC$. Kraštinę AC pratęsiame iki tokio taško E, kad $AC = CE$. Įrodykite, kad $AB = DE$.

16. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių k, kurį galima užrašyti pavidalu $k = 19^n - 5^m$, kur m ir n − natūralieji skaičiai.

17. Ar egzistuoja tokia baigtinė sveikųjų skaičių $c_1, \ldots, c_n$ seka, kad visi skaičiai $a + c_1, \ldots, a + c_n$ būtų pirminiai su daugiau kaip vienu, bet ne su be galo daug skirtingų sveikųjų skaičių a?

18. m yra toks natūralusis skaičius, kad $m+2$ dalijasi iš 4. Įrodykite, kad egzistuoja ne daugiau kaip vienas toks skaidinys $m = ab$, kur a ir b yra natūralieji skaičiai, tenkinantys sąlygą

$$0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m + 1}}.$$

19. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug tokių lyginių natūraliųjų skaičių k, kad su kiekvienu pirminiu skaičiumi p skaičius $p^2 + k$ yra sudėtinis.

20. Pirminiai skaičiai a, b, c ir d tenkina sąlygą $a > 3b > 6c > 12d$, o $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Raskite visas galimas reiškinio $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ reikšmes.

XV LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, 2000 09 30

Olimpiados rėmėjai: INFO–TEC, BALTIC AMADEUS. Leidyklos ALMA LITTERA, AMŽIUS, TEV, TYTO ALBA.

Organizacinis komitetas: R. Kašuba (pirmininkas), A. Dubickas.

Vertinimo komisija: A. Dubickas (pirmininkas), G. Alkauskas, A. Birštunas, M. Bloznelis, V. Čekanavičius, P. Drungilas, M. Galvonas, R. Garunkštis, R. Grigutis, R. Jodelis, M. Juodis, R. Kašuba, V. Kazakevičius, A. Klivečka, R. Leipus, K. Liubinskas, V. Mackevičius, J. Mačys, H. Markšaitis, G. Murauskas, A. Plikusas, A. Posochovas, V. Stakėnas, E. Stankus, R. Zovė, S. Zubė.

REZULTATAI

Pirmoji vieta ir profesoriaus Jono Kubiliaus pereinamasis prizas – **Vilniaus tiksliųjų, gamtos ir technikos mokslų licėjaus pirmajai komandai**. Antroji vieta – **Kauno technologijos universiteto gimnazijos pirmajai komandai**. Trečioji vieta – **Visagino komandai**.

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$\sum$	Vt.
Vilniaus lic. I	2	0	5	5	4	2	7	1	8	3	5	0	6	5	5	5	5	5	7	0	80	1
KTU gim. I	0	1	1	5	7	5	7	1	0	0	0	5	6	5	5	5	5	5	0	0	63	2
Visagino	0	0	5	5	4	4	3	7	0	0	5	0	4	3	5	5	1	5	4	0	60	3
Panevėžio	0	2	5	5	4	5	0	0	0	0	5	5	6	5	1	5	5	5	0	0	58	4
Vilniaus	0	1	5	0	2	4	3	1	1	0	5	5	4	0	1	0	4	5	7	5	53	5
KTU gim. II	2	0	4	5	7	5	0	0	3	0	5	3	0	5	2	0	5	0	4	0	50	6
Kauno ,,Saulė“	0	1	5	3	0	5	0	1	4	0	0	5	1	0	2	5	5	5	0	5	47	7-9
Kretingos	0	0	5	5	1	5	2	0	0	0	5	0	0	5	2	5	5	2	0	5	47	7-9
Šiaulių	0	1	5	5	0	5	3	0	0	0	5	1	2	5	0	5	0	5	0	5	47	7-9
Mažeikių	0	0	5	5	4	4	0	0	0	0	5	4	0	0	1	3	5	5	0	1	42	10
Klaipėdos	0	0	0	0	0	5	0	7	0	0	5	1	0	0	5	5	1	5	0	5	39	11
VU Fizikos fak.	0	0	5	5	4	0	2	1	0	0	0	3	0	0	1	2	2	5	1	2	33	–
Tauragės	0	1	5	5	0	5	0	1	3	0	0	0	0	0	2	0	5	5	0	0	32	12
Vilniaus lic. II	0	1	5	5	0	4	3	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	5	27	13-14
Pasvalio	2	0	0	5	4	0	0	1	0	0	5	0	0	0	0	5	5	0	0	0	27	13-14
Palangos	0	1	5	3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	3	5	0	5	24	15
Kupiškio	0	0	5	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	3	0	0	0	18	16
Raseinių	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	5	0	0	9	17

Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto pirmakursių komanda dalyvavo be konkurso.

Išsamus kiekvieno uždavinio sprendimas buvo vertinamas 5 balais. Be to, uždavinį teisingai išsprendus tik vienai komandai jai buvo pridedami 3 balai, dviem komandoms – po 2 balus, trim komandoms – po 1 balą.

Uždavinių sąlygos

1. Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti reiškinys

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{1999}-x_{2000})^2+x_{2000}^2,$$

kai $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ yra realieji skaičiai?

2. Ar gali reiškinys

$$(1+\frac{1}{a_1^2})(1+\frac{1}{a_2^2})\ldots(1+\frac{1}{a_n^2})$$

įgyti sveikąją reikšmę, kai $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yra skirtingi, didesni už 1, natūralieji skaičiai?

3. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{-3x^2+18x+37}+\sqrt{-5x^2+30x-41}=\sqrt{x^2-6x+109}.$$

4. Įrodykite, kad

$$x^3+y^3+z^3=3xyz,$$

jei x, y, z yra realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $x+y+z=0$.

5. Raskite visas parametro a reikšmes, su kuriomis lygčių sistema

$$\begin{cases} ax^2+2y=a+2, \\ 2ax^2+(a+1)y=2a+4 \end{cases}$$

neturi sprendinių.

6. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 11, \\ r^2 - 2n^2 = 1 \end{cases}$$

neturi sveikųjų sprendinių.

7. Įrodykite, kad lygtis $m^n + m^r = m^{2000s}$
a) turi bent vieną natūralųjį sprendinį (m, n, r, s);
b) turi be galo daug natūraliųjų sprendinių;
c) raskite visus šios lygties natūraliuosius sprendinius.

8. Tegul $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2000} = 1.$$

Įrodykite, kad

$$(1998 + \frac{1}{x_1})(1998 + \frac{1}{x_2}) \ldots (1998 + \frac{1}{x_{2000}}) \geq 3998^{2000}.$$

9. Teigiamų realiųjų skaičių pora (x, y) tenkina sąlygas $y > x$, $x^3 + 1 = 3x$ ir $y^3 + 1 = 3y$. Įrodykite, kad $y = \sqrt{x+2}$.

10. Natūralųjį skaičių n vadiname *išskaidomu*, jei egzistuoja natūralieji skaičiai m ir d, tokie kad

$$n = \frac{m+1}{d+1} + \frac{m+2}{d+2}.$$

a) Raskite bent vieną neišskaidomą natūralųjį skaičių, didesnį už 1000.
b) Įrodykite, kad bent 1922 aibės $\{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$ skaičiai yra išskaidomi.

11. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis reiškinys $(5n^2 + 6)/(n+2)$ irgi įgyja natūraliąsias reikšmes.

12. Raskite visas natūraliąsias n reikšmes, su kuriomis abu skaičiai $n+1$ ir $16n+1$ yra sveikųjų skaičių kvadratai.

13. Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas, kai $x > 0$, tenkinančias sąlygą

$$f(x^{2000}) = 5f(x^{-2000}) + \sin x.$$

14. Du žaidėjai pakaitomis reiškinyje

$$(*)8^8 + (*)8^7 + (*)8^6 + (*)8^5 + (*)8^4 + (*)8^3 + (*)8^2 + (*)8$$

žvaigždutes pakeičia skaičiais 3 arba -3. Įrodykite, jog antrasis, kad ir ką bedarytų pirmasis žaidėjas, visada gali pasiekti to, kad (po 8 ėjimų) gautasis skaičius dalytųsi iš 13.

15. Ar egzistuoja realiųjų skaičių trejetas (a, b, c), toks kad lygybė

$$(x + a)^2 + (2x + b)^2 + (2x + c)^2 = (3x + 1)^2$$

būtų teisinga su bet kokiu realiuoju skaičiumi x?

16. Skritulio formos pica dviem statmenais pjūviais padalinama į keturias dalis. Jonas paėmė didžiausiąją ir mažiausiąją picos dalį, o Marytei atiteko dvi likusios. Ar gali Marytei atitekti daugiau picos negu Jonui?

17. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 13$, $BC = 15$ ir $AC = 14$. Tegul BH yra kampo B aukštinė, o BM - pusiaukampinė. Raskite trikampio BHM plotą.

18. Trikampio ABC pusiaukampinės AD ir CE kertasi taške F. Raskite kampo B dydį, jei taškai B, D, E, F sudaro keturkampį, apie kurį galima apibrėžti apskritimą.

19. Dviejų panašių trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ po dvi kraštines sutampa: $AB = A_1B_1$ ir $AC = A_1C_1$. Ar būtinai sutampa jų trečiosios kraštinės BC ir B_1C_1?

20. Ar galima kubą $1 \times 1 \times 1$ suvynioti į kvadratinį popieriaus lapą 3×3?

Komentarai, nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. Pažymėkime $1 - x_1 = y_1, x_1 - x_2 = y_2, \ldots, x_{n-2} - x_{n-1} = y_{n-1}$, $x_{n-1} = y_n$. Sudėję k pirmųjų lygybių gauname, kad

$$1 - x_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_k,$$

kai $k \leq n - 1$, ir

$$1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_n,$$

kai $k = n$. Vadinasi, $x_k = 1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_k$. Turime surasti mažiausią reiškinio

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

įgyjamą reikšmę, kai

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1.$$

Įrodysime, kad ji yra pasiekiama, kai $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1/n$ (t. y. $x_1 = (n-1)/n, x_2 = (n-2)/n, \ldots, x_{n-1} = 1/n$) ir todėl ji yra lygi $1/n$, t. y. $1/2001$, kai $n = 2001$.

1 būdas. Reiškinys

$$\sum\nolimits_{1 \le i < j \le n} (y_i - y_j)^2$$

yra lygus

$$(n-1)(y_1^2 + \ldots y_n^2) - 2\sum\nolimits_{1 \le i < j \le n} y_i y_j.$$

Kadangi

$$2\sum\nolimits_{1 \le i < j \le n} y_i y_j = (y_1 + \ldots + y_n)^2 - (y_1^2 + \ldots + y_n^2),$$

gauname tapatybę

$$n(y_1^2 + \ldots + y_n^2) - (y_1 + \ldots + y_n)^2 = \sum\nolimits_{1 \le i < j \le n} (y_1 - y_j)^2.$$

Jos dešinioji pusė yra neneigiamas skaičius, kuris lygus nuliui tada ir tik tada, kai $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$. Vadinasi,

$$y_1^2 + \ldots + y_n^2 \ge \frac{1}{n}(y_1 + \ldots + y_n)^2 = \frac{1}{n}.$$

Lygybę čia gauname tada ir tik tada, kai visi y_k yra lygūs. Kadangi jų suma lygi 1, tai visi y_k yra lygūs $1/n$.

2 būdas. Pirmasis būdas gali atrodyti labai formalus. Mažiausią reikšmę galima nesunkiai rasti priešingos prielaidos metodu. Tarkime, kad egzistuoja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tokie, kad jų suma yra lygi 1, o kvadratų suma pasiekia mažesnę už $1/n$ reikšmę, kai $y_k \ne y_s$. (Jei visi y_k būtų lygūs, tai kvadratų sumos reikšmė būtų lygi $1/n$.)

Pakeiskime y_k į $(y_k+y_s)/2$ ir y_s į $(y_k+y_s)/2$. Sumos $y_1+\ldots+y_n$ reikšmė nepakis: ji bus lygi 1. O kvadratų suma dar labiau sumažės, nes

$$y_k^2+y_s^2-2\Big(\frac{y_k+y_s}{2}\Big)^2=\frac{1}{2}(y_k-y_s)^2>0,$$

todėl

$$\Big(\frac{y_k+y_s}{2}\Big)^2+\Big(\frac{y_k+y_s}{2}\Big)^2<y_k^2+y_s^2.$$

Vadinasi, mažiausioje kvadratų sumoje (jei tokia egzistuoja!) visi y_k yra lygūs (jei bent du nelygūs, tai tik ką įrodėme, kad egzistuoja dar mažesnė reikšmė). Egzistavimą čia būtų galima įrodyti pereinant prie ribos, tačiau griežto įrodymo čia nepateiksime.

Atsakymas: $1/2001$.

2. Kadangi kiekvienas daugiklis reiškinyje yra didesnis už 1, tai ir pats reiškinys, kad kokie bebūtų teigiami $a_1,a_2,\ldots,a_n$, yra didesnis už 1. Kita vertus, reiškinys įgyja savo didžiausią reikšmę, kai $a_1,a_2,\ldots,a_n$ yra mažiausi skaičiai, tenkinantys uždavinio sąlygą. Todėl reiškinio reikšmė negali būti didesnė už

$$r_n=\Big(1+\frac{1}{2^2}\Big)\Big(1+\frac{1}{3^2}\Big)\ldots\Big(1+\frac{1}{(n+1)^2}\Big).$$

Įrodysime, kad su visais natūraliaisiais n ši reikšmė yra mažesnė už 2. Kadangi tarp 1 ir 2 nėra natūraliųjų skaičių, iš čia išplauktų, jog tas reiškinys sveikosios reikšmės įgyti negali.

1 būdas. Sumažindami vardiklius, reikšmę r_n padidinsime:

$$\begin{aligned}r_n&<\Big(1+\frac{1}{2^2-1}\Big)\Big(1+\frac{1}{3^2-1}\Big)\ldots\Big(1+\frac{1}{(n+1)^2-1}\Big)\\&=\frac{2^2}{2^2-1}\,\frac{3^2}{3^2-1}\ldots\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1}.\end{aligned}$$

Čia skaitiklis yra lygus $\big((n+1)!\big)^2$, o vardiklis –

$$(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\ldots(n+1-1)(n+1+1)=\frac{1}{2}n!(n+2)!$$

Skaitiklio ir vardiklio santykis yra lygus

$$\frac{2(n+1)!^2}{n!(n+2)!}=\frac{2(n+1)}{n+2}=2-\frac{2}{n+2}.$$

Jis yra mažesnis už 2, ką ir reikėjo įrodyti.

2 būdas. Logaritmuokime:

$$\log r_n = \log\Big(1+\frac{1}{2^2}\Big) + \log\Big(1+\frac{1}{3^2}\Big) + \ldots + \log\Big(1+\frac{1}{(n+1)^2}\Big).$$

Čia log arba ln (kaip dažnai žymima mokykloje) yra pagrindu e. Iš nelygybės $\log(1+x) < x$ (kurią galima įrodyti suskaičiavus pirmąją išvestinę) išplaukia, kad

$$\log r_n < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Neprarasdami bendrumo, laikykime, kad $n \geq 4$. Tada

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&< \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{97}{144}.
\end{aligned}$$

Vadinasi,

$$r_n < e^{97/144} = 1,96... < 2.$$

Sumą

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}$$

galima įvertinti iš viršaus begaline suma

$$\sum\nolimits_{k\geq 2} \frac{1}{k^2}.$$

Tokia suma pagal visus natūraliuosius $k \geq 1$ yra lygi Rymano dzeta funkcijos reikšmei $\zeta(2)$. Pastaroji yra lygi $\pi^2/6$. Taigi tikslus sumos įvertis būtų

$$r_n < e^{\pi^2/6-1} = 1,905\ldots .$$

Atsakymas: negali.

3. Pažymėkime $t = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. Tada

$$\begin{aligned} -3x^2 + 18x + 37 &= 64 - 3t, \\ -5x^2 + 30x - 41 &= 4 - 5t, \\ x^2 - 6x + 109 &= 100 + t. \end{aligned}$$

Turime lygtį

$$\sqrt{64-3t} + \sqrt{4-5t} = \sqrt{100+t},$$

kur $t = (x-3)^2 \geq 0$. Įrodysime, kad ją tenkina vienintelė reikšmė $t = 0$, kurią atitinka vienintelė x reikšmė $x = 3$.

1 būdas. Kadangi $t \geq 0$, tai $\sqrt{64-3t} \leq \sqrt{64} = 8$, $\sqrt{4-5t} \leq \sqrt{4} = 2$, todėl kairioji lygties pusė neviršija 10. Dešinioji pusė $\sqrt{100+t} \geq \sqrt{100} = 10$, todėl ji lygi kairiajai tada ir tik tada, kai $t = 0$.

2 būdas. Keldami kvadratu gauname, kad

$$\begin{aligned} &68 - 8t + \sqrt{(64-3t)(4-5t)} = 100 + t, \\ &2\sqrt{256 - 332t + 15t^2} = 32 - 9t, \\ &1024 - 1328t + 60t^2 = 1024 - 576t + 81t^2, \\ &752t + 21t^2 = 0. \end{aligned}$$

Ši lygtis turi tik vieną neneigiamą šaknį $t = 0$, kuri tenkina ir pradinę lygtį.

Atsakymas: $x = 3$.

4. *1 būdas.* Kadangi $z = -(x+y)$, turime

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 - (x+y)^3 = -3xy^2 - 3x^2y \\ &= -3xy(x+y) = 3xyz. \end{aligned}$$

2 būdas. Iš tapatybės

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

išplaukia, kad dešinioji pusė yra lygi 0, kai $x + y + z = 0$.

3 būdas. Keliame kubu:

$$\begin{aligned}0 &= (x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3xy(x+y)\\ &+3xz(x+z)+3yz(y+z)+6xyz = x^3+y^3+z^3-3xyz\\ &-3xyz-3xyz+6xyz = x^3+y^3+z^3-3xyz.\end{aligned}$$

4 būdas. Keliame kubu lygybę $z=-(x+y)$:

$$z^3 = -x^3-y^3-3xy(x+y) = -x^3-y^3+3xyz.$$

5. *1 būdas.* Iš pirmosios lygties gautą lygybę $y=(a+2-ax^2)/2$ įstatę į antrąją lygtį, gauname

$$2ax^2+\frac{a+1}{2}(a+2-ax^2) = 2a+4.$$

Dauginame abi puses iš 2. Tada

$$\begin{aligned}&4ax^2+(a+1)(a+2)-a(a+1)x^2 = 4a+8,\\ &(3a-a^2)x^2+a^2-a-6=0,\\ &a(3-a)x^2+(a+2)(a-3)=0,\\ &(3-a)(ax^2-a-2)=0.\end{aligned}$$

Jei $a=3$, tai imdami bet kokį x, o $y=(5-3x^2)/2$, gauname lygties sprendinį.

Jei $a=0$, gauname lygybę $-6=0$, prieštara. Sistema sprendinių neturi.

Jei $a\neq 0$ ir $a\neq 3$, tai $x^2=1+2/a$. Ši lygtis turi sprendinį tada ir tik tada, kai $1+2/a\geq 0$. Tada ir sistema turi sprendinį, imant $y=(a+2-ax^2)/2$. Lygtis $x^2=1+2/a$ neturi sprendinių, jei $1+2/a<0$. Akivaizdu, kad nėra teigiamų a reikšmių, su kuriomis būtų teisinga ši nelygybė. Jei a neigiamas skaičius, dauginame abi nelygybės puses iš teigiamo skaičiaus $-a$. Gauname, kad $-a-2<0$, t. y. $a>-2$. Vadinasi, nelygybės $1+2/a<0$ sprendinių aibė yra intervalas $(-2,0)$.

Todėl, lygčių sistema neturi sprendinių tada ir tik tada, kai $-2<a<0$ arba $a=0$, t. y. kai a priklauso intervalui $(-2,0]$.

2 būdas. Iš antrosios lygties atimkime pirmąją, padaugintą iš 2. Gauname, kad

$$(a-3)y = 0,$$

Vadinasi, $a = 3$ arba $y = 0$.

Pirmuoju atveju, kai $a = 3$, lygčių sistema turi sprendinį, pavyzdžiui, $x = y = 1$.

Antruoju atveju, kai $y = 0$, lygčių sistema neturi sprendinių, kai lygtis $ax^2 = a + 2$ neturi sprendinių. Aišku, kad ši lygtis neturi sprendinių, kai $a = 0$. Jei $a \neq 0$, ji neturi sprendinių, kai $1+2/a < 0$. Ši nelygybė, kaip jau įrodėme pirmuoju būdu, yra teisinga, kai $-2 < a < 0$. Vadinasi, lygčių sistema neturi sprendinių, kai $-2 < a \leq 0$.

Atsakymas: $-2 < a \leq 0$.

6. *1 būdas.* Iš pirmosios lygties

$$11 = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$$

išplaukia, kad m ir n tenkina nors vieną iš keturių lygčių sistemų

$$(1) \qquad m - n = 1, \quad m + n = 11,$$
$$(2) \qquad m - n = 11, \quad m + n = 1,$$
$$(3) \qquad m - n = -1, \quad m + n = -11,$$
$$(4) \qquad m - n = -11, \quad m + n = -1.$$

Visos jos turi po vieną sprendinį: $m = 6$, $n = 5$; $m = 6$, $n = -5$; $m = -6$, $n = -5$; $m = -6$, $n = 5$. Visais atvejais, $n = 5$ arba $n = -5$, todėl $n^2 = 25$. Iš antrosios lygties gauname, kad $r^2 = 51$. Tokio sveikojo skaičiaus r nėra ($7^2 < 51$, o $8^2 > 51$), todėl lygčių sistema sprendinių neturi.

2 būdas. Kadangi r yra nelyginis skaičius, tai $r - 1$ ir $r + 1$ abu yra lyginiai. Todėl

$$2n^2 = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$$

dalijasi iš 4. Vadinasi, n – lyginis. Iš pirmosios lygties matome, kad tada m yra nelyginis skaičius. Todėl

$$\begin{aligned} 11 &= m^2 - n^2 = (2m_1 + 1)^2 - (2n_1)^2 \\ &= 4m_1^2 + 4m_1 - 4n_1^2 + 1 = 4k + 1, \end{aligned}$$

kur m_1 , n_1 ir k yra sveikieji skaičiai. Tačiau lygybė $10 = 4k$ yra negalima, nes k yra sveikasis skaičius. Prieštara.

Atsakymas: $\emptyset$.

7. *1 būdas.* Jei $m = 1$, tai kairioji lygties pusė yra lygi 2, o dešinioji – 1, prieštara. Vadinasi, $m \geq 2$. Kadangi n ir r įeina į lygtį simetriškai vienas kito atžvilgiu, neprarasdami bendrumo, galime laikyti, kad $n \leq r$. Turime

$$m^{2000s} = m^n + m^r \leq 2m^r \leq m^{r+1},$$

todėl $2000s \leq r + 1$. Lygybė čia galima tik tuo atveju, kai $n = r$ ir $m = 2$. Iš nelygybės $m^r < m^{2000s}$ išplaukia, kad $r < 2000s$. Kadangi s ir r yra natūralieji skaičiai, tai $r = 2000s - 1$. Lygties sprendiniai yra

$$(m, n, r, s) = (2, 2000t - 1, 2000t - 1, t),$$

kur t – natūralusis skaičius.

2 būdas. Vėl laikykime, kad $n \leq r$. Padaliję iš m^n , turime lygtį

$$m^{2000s-n} = 1 + m^{r-n},$$

$$m^{r-n}\left(m^{2000s-r} - 1\right) = 1.$$

Jei $m = 1$, lygtis sprendinių neturi, nes kairioji pus4 lygi nuliui. Jei $m \geq 2$, naudodamiesi nelygybe $r < 2000s$, gauname kad

$$m^{r-n} = m^{2000s-r} - 1 = 1.$$

Vadinasi, $r = n$ ir $2000s - r = 1$, iš kur lengvai gauname visų sprendinių aibę.

Atsakymas: $(m, n, r, s) = (2, 2000t - 1, 2000t - 1, t)$,
kur t – natūralusis skaičius.

8. Tegul $n = 2000$. Įrodysime nelygybę

$$\left(n - 2 + \frac{1}{x_1}\right)\left(n - 2 + \frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(n - 2 + \frac{1}{x_n}\right) \geq (2n - 2)^n,$$

kur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra teigiami realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1.$$

1 būdas. Į Minkovskio nelygybę

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1\ldots b_n},$$

kuri teisinga su visais neneigiamais skaičiais $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$, įstatykime

$$\begin{aligned} &a_1 = a_2 = \ldots = a_n = n-2, \\ &b_1 = \frac{1}{x_1}, \\ &\vdots \\ &b_n = \frac{1}{x_n}. \end{aligned}$$

Gausime nelygybę

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{\Big(n-2+\frac{1}{x_1}\Big)\ldots\Big(n-2+\frac{1}{x_n}\Big)} \\ &\geq \sqrt[n]{(n-2)^n} + \Big(\frac{1}{x_1\ldots x_n}\Big)^{1/n} = n-2+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}. \end{aligned}$$

Pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\ldots x_n},$$

gauname, kad $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n} \leq 1/n$. Todėl

$$n-2+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}} \geq n-2+n = 2n-2$$

ir keldami n-tuoju laipsniu turime

$$\Big(n-2+\frac{1}{x_1}\Big)\ldots\Big(n-2+\frac{1}{x_n}\Big) \geq (2n-2)^n.$$

2 būdas. Tegul $1 \leq k \leq n$. Rašome

$$\begin{aligned} &n-2+\frac{1}{x_k} = \frac{(n-2)x_k+1}{x_k} \\ &= \frac{x_1+\ldots+x_{k-1}+(n-1)x_k+x_{k+1}+\ldots+x_n}{x_k}. \end{aligned}$$

Kadangi $(n-1)x_k$ yra lygus $n-1$ elemento x_k sumai, tai, pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę, gauname, kad

$$\begin{aligned}&\frac{x_1+\ldots+x_{k-1}+(n-1)x_k+x_{k+1}+\ldots+x_n}{2n-2}\\&\geq \sqrt[2n-2]{x_1\ldots x_{k-1}x_k^{n-1}x_{k+1}\ldots x_n}.\end{aligned}$$

Todėl

$$\begin{aligned}&n-2+\frac{1}{x_k}\\&\geq (2n-2)\sqrt[2n-2]{x_1\ldots x_{k-1}x_k^{1-n}x_{k+1}\ldots x_n}.\end{aligned}$$

Sudauginę tokias nelygybes su $k=1,2,\ldots,n$ gausime, kad

$$\Bigl(n-2+\frac{1}{x_1}\Bigr)\ldots\Bigl(n-2+\frac{1}{x_n}\Bigr)\geq (2n-2)^n.$$

9. *1 būdas.* Pažymėkime $f(t)=t^3-3t+1$. Kadangi

$$\begin{aligned}&f(-2)=-1,\\&f(-1)=1,\\&f(0)=1,\\&f(1)=-1,\\&f(2)=3,\end{aligned}$$

tai lygtis $f(t)=0$ turi tris realiąsias šaknis intervaluose $(-2,-1)$, $(0,1)$ ir $(1,2)$. Pažymėkime jas atitinkamai z, x ir y. Pastebėkime, kad jei u yra lygties $f(t)=0$ šaknis, tai ir u^2-2 yra tos lygties šaknis. Iš tiesų,

$$\begin{aligned}f(u^2-2)&=(u^2-2)^3-3(u^2-2)+1=u^6-6u^4+9u^2-1\\&=(u^3-3u)^2-1=(u^3-3u-1)(u^3-3u+1)\\&=f(u)\bigl(f(u)+2\bigr),\end{aligned}$$

todėl iš $f(u)=0$ išplaukia, kad $f(u^2-2)=0$. Taigi aibės $\{x^2-2,y^2-2,z^2-2\}$ ir $\{x,y,z\}$ sutampa. Aišku, kad $y^2-2\neq y$, nes $0<y<1$. Taigi $y^2-2=z$ arba $y^2-2=x$. Pakanka įrodyti, kad pirmojo atvejo negali būti. Jei $y^2-2=z$, tai z^2-2 yra lygu y arba x. Jei $z^2-2=y$, tai $x^2-2=x$, kas neįmanoma, nes $x<1$. Taigi $z^2-2=x$, todėl $x^2-2=y$. Lygybė $x^2=2+y$ yra negalima, nes jos karioji pusė yra mažesnė už 1, o dešinioji didesnė už 3. Įrodėme, kad $y^2-2=x$, todėl $y=\sqrt{x+2}$.

2 būdas. Lygtį $x^3+1=3x$, kur $0<x<1$, perrašome tokiu pavidalu

$$1=(1-x)^2(x+2).$$

Todėl $1=(1-x)\sqrt{x+2}$, t. y.

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^3+1=3\sqrt{x+2}.$$

Taigi $\sqrt{x+2}$ tenkina lygtį ir yra teigiamas skaičius, didesnis už 1. Tarp lygties trijų šaknų, toks skaičius yra tik y. Todėl $\sqrt{x+2}=y$.

3 būdas. Įrodysime, kad lygties $t^3+1=3t$ šaknys yra $2\sin 10^0$, $2\sin 50^0$ ir $-2\sin 70^0$. Iš tiesų, kadangi

$$(\sin\alpha)^3=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4},$$

įrašę pirmąją reikšmę į lygtį, gauname

$$3t-t^3=6\sin 10^0-6\sin 10^0+2\sin 30^0=2\sin 30^0=1.$$

Įrašę antrąją reikšmę gauname

$$3t-t^3=6\sin 50^0-6\sin 50^0+2\sin 150^0=2\sin 30^0=1.$$

Įrašome trečiąją reikšmę:

$$3t-t^3=-6\sin 70^0+6\sin 70^0-2\sin 210^0=2\sin 30^0=1.$$

Kadangi $0<x<y$, tai $x=2\sin 10^0$, o $y=2\sin 50^0$. Tada

$$\begin{aligned}y^2-x&=4\sin^2 50^0-2\sin 10^0=2(1-\cos 100^0)-2\sin 10^0\\&=2+2\sin 10^0-2\sin 10^0=2\end{aligned}$$

ir $y=\sqrt{x+2}$.

10. *1 būdas.* Pastebėkime, kad

$$n-2=\frac{m-d}{d+1}+\frac{m-d}{d+2}=\frac{(m-d)(2d+3)}{(d+1)(d+2)}.$$

Skaičiai $2d+3$ ir $d+1$ yra tarpusavyje pirminiai. Jei s būtų jų bendras daliklis, tai s dalytų $2d+3-2(d+1)=1$, t. y. $s=1$. Analogiškai, $2d+3$ ir $d+2$ neturi bendrų daugiklių. Vadinasi $m-d$ dalijasi iš $(d+1)(d+2)$ be liekanos. Tai reiškia, kad egzistuoja sveikasis skaičius k toks, kad

$$m=d+k(d+1)(d+2).$$

Aišku, kad k yra neneigiamas, nes $m>0$. Jei $k=0$, tai $m=d$, skaičius $n=2$ yra išskaidomas. Tegul $k>0$. Tada

$$n-2=k(2d+3).$$

Skaičius $n>2$ yra išskaidomas tada ir tik tada, kai $n-2$ dalijasi iš nelyginio skaičiaus, didesnio arba lygaus 5. Vadinasi, skaičius n yra neišskaidomas, jei jis gali būti užrašytas kaip $2+2^r$ arba $2+3\cdot 2^r$, kur r yra neneigiamas sveikasis skaičius. Pavyzdžiui, skaičius

$$2+2^{10}=1026$$

yra neišskaidomas, kas atsako į a) dalį. Iš viso, tarp pirmųjų N skaičių (kai $N\geq 5$) yra $1+[\log_2(N-2)]$ skaičių, turinčių pavidalą $2+2^r$. Tarp jų yra $1+[\log_2(N-2)/3]$ skaičių, turinčių pavidalą $2+3\cdot 2^r$. Čia [...] žymi sveikają dalį. Viso turime

$$N-2-[\log_2(N-2)]-[\log_2(N-2)/3]$$

išskaidomų skaičių. Su reikšme $N=2000$ gauname

$$1998-[\log_2 1998]-[\log_2(1998/3)]=1998-10-9=1979.$$

Kadangi $1979>1922$, tai įrodo b) dalį.

2 būdas. Pažymėkime $m+1=u$, $d+1=v$. Tada

$$n=\frac{u}{v}+\frac{u+1}{v+1}.$$

Imdami $u = v^2 + 2v$ gauname $n = 2v + 3$. Todėl kiekvienas nelyginis skaičius, didesnis už 5, yra išskaidomas (čia $v \geq 2$). Tegul $n = 2l$ su natūraliuoju l. Iš lygties

$$2l = \frac{u}{v} + \frac{u+1}{v+1}$$

gauname, kad

$$u - v = \frac{2v(v+1)}{2v+1}(l-1).$$

Kadangi $2v(v+1)$ ir $2v+1$ neturi bendrų daugiklių, tai $l-1$ dalijasi iš $2v+1$ ($v \geq 2$). Tai bus neįmanoma, kai $l-1 = 2^r$ arba $l-1 = 3 \cdot 2^r$. Vadinasi, n yra neišskaidomas, kai $n = 2 + 2^{r+1}$ arba $n = 2 + 3 \cdot 2^{r+1}$. Norint surasti visus neišskaidomus skaičius, čia dar reikėtų patikrinti $n = 3$ ir $n = 5$.

Atsakymas: Skaičius 1026 yra neišskaidomas.
Iš viso 1979 neišskaidomi.

11. *1 būdas*. Pažymėkime $n + 2 = m \geq 3$. Turime

$$\frac{5(m-2)^2+6}{m} = \frac{5m^2-20m+26}{m} = 5m - 20 + \frac{26}{m}.$$

Todėl m dalija 26. Kadangi $m \geq 3$, galimi du atvejai $m = 13$ ir $m = 26$. Atitinkamai, $n = 11$ ir $n = 24$.

2 būdas. Dalindami $5n^2 + 6$ iš $n + 2$ „kampu“ gausime

$$5n^2 + 6 = (5n - 10)(n + 2) + 26.$$

Vadinasi, 26 dalijasi iš $n + 2$. Iš lygčių $n + 2 = 1$, $n + 2 = 13$, $n + 2 = 26$ gauname du *natūraliuosius* sprendinius $n = 11$ ir $n = 24$.

Atsakymas: $n = 11$ ir 24.

12. Tarkime, kad $n + 1 = m^2$ ir $16n + 1 = d^2$. Tada $16m^2 - d^2 = 15$.

1 būdas. Išskaidome $16m^2 - d^2$ kaip kvadratų skirtumą

$$(4m - d)(4m + d) = 15.$$

Čia $4m+d > 5$, nes $m, d > 1$. Galimas vienintelis atvejis $4m-d = 1$, $4m + d = 15$. Taigi $m = 2$, $d = 7$ ir $n = 3$.

2 būdas. Iš lygties $16m^2 - d^2 = 15$ aišku, kad $d < 4m$. Jei $d = 4m - 1$, tai $15 = 16m^2 - (4m-1)^2 = 8m - 1$, todėl $m = 2$ ir $n = 3$. Jei $d = 4m - 2$, tai lygtis

$$15 = 16m^2 - (4m-2)^2 = 16m - 4$$

sprendinių neturi. Jei $d \leq 4m - 3$, tai

$$d^2 + 15 \leq 16m^2 - 24m + 24 \leq 16m^2.$$

Lygybė galima tik kai $m = 1$. Tačiau tada $n = 0$ nėra natūralusis skaičius.

Atsakymas: $n = 3$.

13. Lygtyje $f\big(x^{2000}\big) = 5f\big(x^{-2000}\big) + \sin x$ pakeičiame $x \to 1/x$. Gausime

$$f\big(x^{-2000}\big) = 5f\big(x^{2000}\big) + \sin(1/x).$$

Pridedame prie pirmosios lygties antrąją, padaugintą iš 5:

$$f\big(x^{2000}\big) = \sin x + 25f\big(x^{2000}\big) + 5\sin(1/x).$$

Iš čia gauname, kad

$$f\big(x^{2000}\big) = -\frac{\sin x + 5\sin(1/x)}{24}.$$

Pakeitę x į $x^{1/2000}$, gausime

$$f(x) = -\frac{\sin\big(x^{1/2000}\big) + 5\sin\big(x^{-1/2000}\big)}{24}.$$

Atsakymas: Vienintelė funkcija $-\frac{1}{24}\Big(\sin\big(x^{1/2000}\big) + 5\sin\big(x^{-1/2000}\big)\Big)$.

14. *1 būdas.* Pastebėkime, kad skaičiai $8^8 - 8^4$, $8^7 - 8^3$, $8^6 - 8^2$, $8^5 - 8$ dalijasi iš 13. Suskirstome skaičius į 4 poras: $\{8^8, 8^4\}$, $\{8^7, 8^3\}$, $\{8^6, 8^2\}$, $\{8^5, 8\}$. Pirmajam žaidėjui įrašius kokioje nors poroje vienam skaičiui koeficientą 3 arba -3, antrasis kitam skaičiui toje pačioje poroje rašo atitinkamai -3 arba 3. Gautasis skaičius dalysis iš 13.

2 būdas. Kadangi 8^2+1 dalijasi iš 16, suskirstome į poras $\{8^8, 8^6\}$, $\{8^7, 8^5\}$, $\{8^4, 8^2\}$, $\{8^3, 8\}$. Dabar antrasis gali toje pačioje poroje įrašyti tokį pat ženklą. Kadangi po 8 ėjimų visų porų sumos $\pm3(8^8+8^6)$, $\pm3(8^7+8^5)$, $\pm3(8^4+8^2)$ ir $\pm3(8^3+8)$ dalijasi iš 13, tai ir gautasis skaičius dalijasi iš 13.

15. *1 būdas.* Tarkime, kad toks trejetas egzistuoja. Kadangi lygybė yra teisinga su visais realiaisiais x, tai ji teisinga ir su $x=-1/3$. Tačiau

$$\Big(-\frac{1}{3}+a\Big)^2+\Big(-\frac{2}{3}+b\Big)^2+\Big(-\frac{2}{3}+c\Big)^2=0$$

tada ir tik tada, kai $a=1/3$, $b=c=2/3$. Įrašius šį trejetą tikrai turime tapatybę

$$\begin{aligned}\Big(x+\frac{1}{3}\Big)^2+\Big(2x+\frac{2}{3}\Big)^2+\Big(2x+\frac{2}{3}\Big)^2&=\\=(1+4+4)\Big(x+\frac{1}{3}\Big)^2&=(3x+1)^2,\end{aligned}$$

todėl $(a,b,c)=(1/3,2/3,2/3)$ yra vienintelis ieškomas trejetas.

2 būdas. Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases}2a+\ 4b+\ 4c=6,\\ a^2+\ b^2+\ c^2=1.\end{cases}$$

Įrašę $a=3-2b-2c$ į antrąją lygtį, gauname

$$b^2+c^2=1-(3-2b-2c)^2=(4-2b-2c)(2b+2c-2).$$

Pažymėkime $d=b+c$. Tada

$$\begin{aligned}&d^2-2bc=(4-2d)(2d-2)=-4d^2+12d-8,\\&10d^2-24d+16=4bc,\\&(3d-4)^2+d^2-4bc=0.\end{aligned}$$

Tačiau $d^2=(b+c)^2\geq 4bc$, todėl lygybė galima tik tada, kai $3d=4$ ir $d^2=4bc$. Iš čia gauname sprendinį $a=1/3$, $b=c=2/3$. Tikrinti nereikia, nes sudarytos sistemos sprendiniai tenkina lygtį su visais realiaisiais x.

Atsakymas: $a=1/3$, $b=c=2/3$.

16. Įsivaizduokime dar du simetriškus pjūvius (8 pav.):

8 pav.

Keturios dalys yra x, $x+z$, $x+y$ ir $x+y+x+u$. Jonui atiteko

$$x + x + y + z + u = 2x + y + z + u,$$

o Marytei

$$x + z + x + y = 2x + y + z.$$

Kadangi čia visi skaičiai yra neneigiami, tai Jonui atiteko ne mažiau picos negu Marytei.

Atsakymas: negali.

17. Kadangi $AB < BC$, tai $AH < HC$. Todėl taškas M (9 pav.) yra atkarpoje HC.

9 pav.

1 būdas. Trikampio pusperimetris yra lygus

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21,$$

o plotas

$$S = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

Kita vertus, $S = AC \cdot BH/2$, todėl $BH = 12$. Naudojantis Pitagoro formule,

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Pagal pusiaukampinės savybę

$$\frac{13}{5 + HM} = \frac{15}{9 - HM},$$

todėl $HM = 1,5$. Trikampio BHM plotas yra

$$\frac{BH \cdot HM}{2} = \frac{12 \cdot 1,5}{2} = 9.$$

2 būdas. Pažymėkime $AM = x$. Kadangi

$$\frac{BC}{CM} = \frac{AB}{AM},$$

iš lygties

$$\frac{15}{14-x} = \frac{13}{x}$$

gauname $x = 6,5$. Tegul $AH = y$. Turime

$$BH^2 = 13^2 - y^2 = 15^2 - (14-y)^2,$$

todėl $y = 5$. Vadinasi $BH = 12$, o $HM = AM - AH = 6,5 - 5 = 1,5$. Trikampio BHM plotas yra lygus

$$\frac{BH \cdot HM}{2} = 9.$$

Atsakymas: 9.

18. *1 būdas.* Tegul $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{ACB} = \gamma$.

10 pav.

Kadangi

$$\beta + \widehat{AFC} = 180^0,$$

kur

$$\widehat{AFC} = 180^0 - \frac{\alpha+\gamma}{2} = 180^0 - \frac{180^0 - \beta}{2} = 90^0 + \frac{\beta}{2},$$

todėl

$$\frac{3\beta}{2} + 90^0 = 180^0.$$

Gauname, kad $\beta = 60^0$.

2 būdas. Kampai $\widehat{AEC} = 180^0 - \alpha - \gamma/2$ ir $\widehat{APB} = 180^0 - \beta - \alpha/2$ yra lygūs. Todėl $\alpha + \gamma/2 = \beta + \alpha/2$, t. y. $\alpha + \gamma = 2\beta$. Kadangi $\alpha + \beta + \gamma = 3\beta = 180^0$, tai $\beta = 60^0$.

Atsakymas: 60^0 .

19. Trikampių, kurių kraštinės yra 1 , a , a^2 ir a , a^2 , a^3 po dvi kraštines sutampa ir jie yra panašūs. Tačiau tų trikampių trečiosios kraštinės 1 ir a^3 nėra lygios, kai $a > 1$. Pakanka įrodyti, kad egzistuoja $a > 1$ toks, kad egzistuoja trikampiai, kurių kraštinės 1 , a , a^2 ir a , a^2 , a^3 . Taip bus, jei $a^2 < 1 + a$, t. y. jei $1 < a < (1 + \sqrt{5})/2$.

Atsakymas: nebūtinai.

20. Suvynioti negalima, nes kelio $ABCDA$ ilgis yra lygus

11 pav.

$$1 + \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2},$$

o ilgiausios popieriaus lapo vietos, t. y. jo įstrižainės ilgis yra $3\sqrt{2}$, mažiau už $2 + 2\sqrt{2}$.

Atsakymas: negalima.

Organized by
VILNIUS UNIVERSITY
Sponsored by
INFO–TEC
BALTIC AMADEUS
Publishing house ALMA LITTERA
Publishing house AMŽIUS
Publishing house TEV
Publishing house TYTO ALBA

15 th LITHUANIAN TEAM CONTEST IN MATHEMATICS

Department of Mathematics and Informatics,
Vilnius University
2000 09 30

1. Find the smallest value of the expression

$$(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{1999}-x_{2000})^2+x_{2000}^2,$$

if $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ are some real numbers.

2. Can the expression

$$(1+\frac{1}{a_1^2})(1+\frac{1}{a_2^2})\ldots(1+\frac{1}{a_n^2})$$

take an integer value for some distinct greater than 1 positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$?

3. Solve the equation

$$\sqrt{-3x^2+18x+37}+\sqrt{-5x^2+30x-41}=\sqrt{x^2-6x+109}.$$

4. Prove that

$$x^3+y^3+z^3=3xyz,$$

where x, y, z are some real numbers satisfying the condition $x+y+z=0$.

5. Determine all values of the parameter a such that the system of equations

$$\begin{cases} ax^2+2y=a+2, \\ 2ax^2+(a+1)y=2a+4 \end{cases}$$

has no solutions in (x, y).

6. Prove that the system of equations

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 11, \\ r^2 - 2n^2 = 1 \end{cases}$$

has no solution in integers.

7. Prove that the equation $m^n + m^r = m^{2000s}$
a) has at least one solution in positive integers (m, n, r, s);
b) has infinitely many solutions in positive integers.
c) Find all solutions of the equation in positive integers.

8. Positive real numbers $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ satisfy the condition

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2000} = 1.$$

Prove that

$$(1998 + \frac{1}{x_1})(1998 + \frac{1}{x_2}) \ldots (1998 + \frac{1}{x_{2000}}) \geq 3998^{2000}.$$

9. Positive numbers x and y satisfy the following conditions: $y > x$, $x^3 + 1 = 3x$, $y^3 + 1 = 3y$. Prove that $y = \sqrt{x + 2}$.

10. A positive integer n is said to be *reducible* if there exist positive integers m and d such that

$$n = \frac{m+1}{d+1} + \frac{m+2}{d+2}.$$

a) Find at least one non–reducible positive integer greater than 1000.
b) Prove that at least 1922 numbers of the set $\{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$ are reducible.

11. Determine all positive integers n such that the value of the expression $(5n^2 + 6)/(n + 2)$ is a positive integer.

12. Determine all positive integers n such that both numbers $n + 1$ and $16n + 1$ are perfect squares of integers.

13. Find all functions $f(x)$ which are defined for $x > 0$ satisfying the condition

$$f(x^{2000}) = 5f(x^{-2000}) + \sin x.$$

14. Two players one after another in the expression

$$(*)8^8 + (*)8^7 + (*)8^6 + (*)8^5 + (*)8^4 + (*)8^3 + (*)8^2 + (*)8$$

replace asterisks by the numbers 3 or -3. Prove that, no matter what the first player does, the second player can always achieve that the final number (after 8 moves) will be divisible by 13.

15. Determine whether there exists a triplet of real numbers (a, b, c) such that the equality

$$(x + a)^2 + (2x + b)^2 + (2x + c)^2 = (3x + 1)^2$$

holds for all real x?

16. A pica of the form of circle is divided by two perpendicular cuts into four parts. John takes the biggest and the smallest parts and Mary takes two remaining parts. Can Mary get more than John?

17. The lengths of the sides of the triangle ABC are given as follows: $AB = 13$, $BC = 15$, $AC = 14$. Let BH be an altitude though B and BM – bisector. Find the area of the triangle BHM.

18. The bisectors AD and CE of the triangle ABC intersect at the point F. Determine the value of the angle B if the points B, D, E and F all belong to one circle.

19. Two pairs of sides of two similar triangles ABC and $A_1B_1C_1$ are equal: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Are their third sides always equal?

20. Is it possible to “dress” the unit cube $1\times1\times1$ using only the square sheet of the size 3×3?

Tarptautinė komandinė matematikos olimpiada
Baltijos kelias 2000

Oslas (Norvegija) 2000 11 05

1. Taškas K yra trikampio ABC viduje. Taškas M yra toks, kad M ir K yra skirtingose tiesės AB pusėse, o taškas N yra toks, kad N ir K yra skirtingose BC pusėse. Be to,

$$\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = \widehat{NBC} = \widehat{NCB} = \widehat{KAC} = \widehat{KCA}.$$

Įrodykite, kad keturkampis $MBNK$ yra lygiagretainis.

2. Stačiojo lygiašonio trikampio ABC kampas $\widehat{A} = 90^0$, o M yra atkarpos AB vidurio taškas. Tiesė, einanti per tašką A statmenai CM, kerta kraštinę BC taške P. Įrodykite, kad

$$\widehat{AMC} = \widehat{BMP}.$$

3. Trikampio ABC kampas $\widehat{A} = 90^0$, o $AB \neq AC$. Taškai D, E ir F atitinkamai yra tokie kraštinių BC, CA ir AB taškai, kad keturkampis $AFDE$ yra kvadratas. Įrodykite, kad tiesės BC, FE ir tiesė, einanti per A ir liečianti apie trikampį ABC apibrėžtą apskritimą, kertasi viename taške.

4. Trikampio ABC kampas $\widehat{A} = 120^0$. Taškai K ir L atitinkamai priklauso kraštinėms AB ir AC. Trikampio ABC išorėje nubrėžti lygiakraščiai trikampiai BKP ir CLQ. Įrodykite, kad

$$PQ \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + AC).$$

5. Trikampio ABC kraštinės AB, BC ir CA tenkina sąlygą

$$\frac{BC}{AB - BC} = \frac{AB + BC}{AC}.$$

Raskite kampų $\widehat{A}$ ir $\widehat{C}$ santykį.

6. Fredis kalnuose atidarė nuosavą viešbutį. Jis tvirtina, jog kad ir koks skaičius $n \geqslant 3$ svečių atvyktų į viešbutį, visada bus galima rasti du viešbučio gyventojus, kurie pažinotų po tiek pat likusių

viešbučio gyventojų ir turėtų arba bendrą pažįstamą, arba bendrą nepažįstamą. Kurioms n reikšmėms Fredis yra teisus?
(Jei A pažįsta B, tai ir B pažįsta A.)

7. Kiekvienas 40×50 matmenų kontrolinių mygtukų sistemos mygtukas gali būti dviejų būsenų – įjungtas arba išjungtas. Palietus bet kurį mygtuką, jo būsena ir visų mygtukų, esančių su juo toje pačioje eilutėje, bei visų mygtukų, esančių tame pačiame stulpelyje, būsenos keičiasi priešingomis. Įrodykite, kad vieną po kito paliečiant kai kuriuos mygtukus kontrolinių mygtukų sistemos būsena, kai visi mygtukai yra išjungti, gali būti pakeista būsena, kai visi mygtukai yra įjungti. Raskite mažiausią galimą tokių palietimų skaičių.

8. Pobūvyje susitiko 14 draugų. Vienas iš jų, vardu Fredis, norėjo atsigulti anksčiau. Jis atsisveikino su 10 savo draugų ir, pamiršęs atsisveikinti su trimis likusiais, išėjo. Po valandėlės jis sugrįžo į pobūvį, atsisveikino su dešimčia savo draugų (nebūtinai su tais pačiais kaip anksčiau) ir vėl išėjo. Po to Fredis dar ne kartą grįždavo į pobūvį, kiekvieną kartą atsisveikindamas su dešimčia savo draugų. Kai Fredis jau buvo atsisveikinęs su kiekvienu iš savo draugų mažiausiai po vieną kartą, jis daugiau nebegrįžo. Ryte paaiškėjo, kad jis su kiekvienu iš savo trylikos draugų buvo atsisveikinęs skirtingą skaičių kartų. Koks yra mažiausiai galimas Fredžio sugrįžimų į pobūvį skaičius?

9. Varlė šokinėja iš vienetinių kvadratėlių sudarytoje $2k \times 2k$ matmenų šachmatų lentoje. Varlės šuolių ilgis yra $\sqrt{1+k^2}$ ir kiekvienu šuoliu varlė peršoka iš vieno langelio centro į kito langelio centrą. Lentoje m langelių yra paženklinta ženklu x, o langeliai, į kuriuos varlė gali nušokti iš ženklu x pažymėtų langelių (nesvarbu, ar jie ženklu x paženklinti, ar ne), yra paženklinami ženklu o. Iš viso yra n ženklu o paženklintų langelių. Įrodykite, kad $n \geqslant m$.

10. Lentoje buvo parašyti du teigiami sveikieji skaičiai: vienas iš jų lygus 2000, o kitas mažesnis kaip 2000. Leidžiama atlikinėti tokią operaciją: jeigu dviejų skaičių aritmetinis vidurkis m yra sveikasis skaičius, tai bet kurį vieną iš jų galima ištrinti ir pakeisti skaičiumi m. Įrodykite, kad ši operacija negali būti atlikta daugiau kaip 10 kartų. Nurodykite pavyzdį, kai ši operacija gali būti atlikta 10 kartų.

11. Natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_2, \ldots$ su visais m ir n turi tokią savybę: jei m yra skaičiaus n daliklis ir $m < n$, tai a_m yra skaičiaus a_n daliklis ir $a_m < a_n$. Raskite mažiausią galimą skaičiaus a_{2000} reikšmę.

12. Natūralieji skaičiai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra tokie, kad nė vienas iš jų nėra kito skaičiaus pradžia (pavyzdžiui, 12 yra skaičių 12, 125 ir 12405 pradžia). Įrodykite, kad

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} < 3.$$

13. Aritmetinės progresijos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nariai yra sveikieji skaičiai ir a_i dalijasi iš i su kiekvienu $i = 1, 2, \ldots, n-1$, bet a_n nesidalija iš n. Įrodykite, kad n yra pirminio skaičiaus laipsnis (gal ir pirmasis).

14. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius n, kurie yra 100 kartų didesni už visų savo natūraliųjų daliklių skaičių.

15. Natūralusis skaičius n nesidalija nei iš 2, nei iš 3. Įrodykite, kad su visais sveikaisiais skaičiais k skaičius $(k+1)^n - k^n - 1$ dalijasi iš $k^2 + k + 1$.

16. Įrodykite, kad su visais teigiamais realiaisiais skaičiais a, b ir c yra teisinga nelygybė

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

17. Raskite visus realiuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5, \\ xy + yz + zt + tz = 4, \\ xyz + yzt + ztx + txy = 3, \\ xyzt = -1. \end{cases}$$

spendinius.

18. Raskite visas teigiamų realiųjų skaičių x ir y poras, tenkinančias lygtį

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right).$$

19. Tarkime, kad $t \geqslant 1/2$ yra realusis, o n – natūralusis skaičius. Įrodykite nelygybę

$$t^{2n} \geqslant (t-1)^{2n} + (2t-1)^n.$$

20. Tegul n – natūralusis skaičius, o

$$x_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n-1)(4n+1)}{(2n)(2n+2)\ldots(4n-2)(4n)}.$$

Įrodykite, kad $1/(4n) < x_n - \sqrt{2} < 2/n$.