VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS FAKULTETAS

Vigirdas MACKEVIČIUS, Algirdas ZABULIONIS

1993 METŲ KOMANDINĖS MATEMATIKOS OLIMPIADOS

Vilnius, 1993 m. spalio 30 d.
Ryga, 1993 m. lapkričio 12–15 d.

Vilnius 1994

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS FAKULTETAS

Vigirdas MACKEVIČIUS, Algirdas ZABULIONIS

1993 METŲ KOMANDINĖS MATEMATIKOS OLIMPIADOS

Vilnius, 1993 m. spalio 30 d.
Ryga, 1993 m. lapkričio 12–15 d.

Vilniaus universiteto leidykla
1994

V. Mackevičius, A. Zabulionis
1993 metų komandinės matematikos olimpiados. Vilnius, 1994.

Knygelėje kartu su trumpa informacija pateiktos VIII komandinės Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados (dalyvavo dešimt komandų), vykusios Vilniaus universiteto Matematikos fakultete, ir IV Baltijos šalių komandinės jaunųjų matematikų olimpiados (dalyvavo Danijos, Estijos, Islandijos, Latvijos, Lenkijos, Lietuvos, Suomijos ir Švedijos komandos), vykusios Rygoje, užduotys su nurodymais ir sprendimais. Priede pateiktos uždavinių sąlygos anglų kalba.

Turinys

PRATARMĖ

1993 metų spalio ir lapkričio mėnesiais įvyko dvi jaunųjų matematikų komandinės olimpiados – VIII Lietuvos komandinė matematikų olimpiada Vilniaus universiteto Matematikos fakultete ir IV tarptautinė komandinė olimpiada „BALTIJOS KELIAS – 93“ Rygoje. Individualios jaunųjų matematikų olimpiados Lietuvoje turi gilias tradicijas – šiais mokslo metais vyks jau 43-ioji, o apie šiuos palyginti naujus moksleivių matematinius konkursus noretųsi papasakoti plačiau.

Komandinių olimpiadų taisyklės labai paprastos – komanda (5 vyresniųjų klasių moksleiviai) 4 valandas bando kartu spręsti 20 matematinių uždavinių. Galima kalbėtis, diskutuoti, spręsti uždavinius lentoje... Vienas šios olimpiados motyvų yra tai, kad dažnai matematines problemas sprendžia ne matematikai „individualistai“, bet mokslininkų grupės ar net kolektyvai, ir, be gilių individualių žinių bei gebėjimų, labai svarbus yra teisingas kolektyvinio darbo organizavimas, problemos sprendimo „taktika“. O ir rengiantis matematiniams konkursams mokyklos matematiniame būrelyje uždaviniai dažniausiai nagrinėjami grupės moksleivių – taip lengviau suprasti pagrindines uždavinio idėjas, sprendimo metodą.

Pirmoji komandinė moksleivių matematikos olimpiada Lietuvoje įvyko 1986 metais Vilniaus universiteto Matematikos fakulteto dėstytojų iniciatyva. Prof. J. Kubilius, 1951 metais organizavęs pirmąją Lietuvos individualiąją moksleivių olimpiadą, įsteigė pereinamąjį prizą geriausiai jaunųjų matematikų komandai. Nuo to laiko kiekvienų metų rudenį į VU Matematikos fakultetą renkasi mūsų jaunųjų matematikų komandos. 1989 metais į olimpiadą atvykę svečiai – Latvijos ir Estijos moksleiviai – nesunkiai „užsikrėtė“ kolektyvinio uždavinių sprendimo varžybų idėja. Visi gerai prisimename ir tų metų rugpjūčio „Baltijos kelią“ – tūkstančius žmonių, susiėmusių rankomis kelyje Vilnius – Ryga – Talinas. Tad kito Baltijos valstybes jungiančios olimpiados pavadinimo ir negalėjo būti. Šią idėją parėmė ir lėšas pereinamajam prizui įsteigti skyrė Lietuvos Sąjūdis, Latvijos ir Estijos Liaudies Frontai. Graži gintarinė taurė pirmuosius dvejus metus „gyveno“ Latvijoje. 1992 metais, kai „Baltijos kelio“ olimpiada vyko Vilniuje, į ją pasikvietėme ne tik tradicinius kaimynus, bet ir Lenkijos, Danijos, Islandijos, Švedijos, Sankt Peterburgo moksleivius. Tiesa, Islandija nėra labai arti Baltijos, bet jos pakvietimas išreiškė mūsų ypatingas simpatijas šaliai, pirmajai oficialiai pripažinusiai trijų Baltijos valstybių nepriklausomybę. Olimpiadoje stipriausi buvo Danijos jaunieji matematikai, mūsų komanda liko penkta. Tokia šių dviejų olimpiadų istorija.

O šių metų rudenį aštuntą kartą vykusioje Lietuvos komandinėje matematikų olimpiadoje geriausi vėl (jau ketvirtą kartą!) buvo Kauno „Saulės“ gimnazijos matematikos mokytojos Birutės Vosylienės auklėtiniai. Be prof. J. Kubiliaus pereinamosios taurės ir VU MaF dekano R. Kudžmos „valgomojo“ prizo (didelės saldainių dežės), nugalėtojų laukė malonus siurprizas – olimpiada įgijo solidų rėmėją – firmą INFO–TEC. MaF absolventas, dabar INFO–TEC firmos direktorius, Kęstutis Naujokaitis visiems olimpiados nugalėtojams – kauniečiams, antraisiais buvusiems šiauliečiams bei trečiajai komandai iš Vilniaus Gamtos, tiksliųjų ir technikos mokslų licėjaus – įteikė puikius prizus. Pagal olimpiados rezultatus buvo sudaryta Lietuvos komanda dalyvauti IV tarptautinėje matematikų olimpiadoje „BALTIJOS KELIAS – 93“. Raminta Štuikytė, Andrius Bernotas, Paulius Čerka iš Kauno „Saulės“ gimnazijos bei du vicečempionai iš Šiaulių komandos – Evaldas Čepulis ir Darius Mašalas, lydimi kauniečio matematikos mokytojo Zenono Repčio, išvyko į Latviją.

Į Rygą atvyko komandos iš 8 šalių. Be pastovių šių olimpiadų dalyvių – Estijos, Latvijos ir Lietuvos komandų, vėl pamatėme Islandijos, Švedijos, Danijos, Lenkijos moksleivius bei debiutantus – Suomijos komandą. Olimpiados žiuri šiais metais buvo labai sunku – visos komandos labai gerai pasirengė konkursui. Lietuvos moksleivius nuo pereinamąją taurę iškovojusios Lenkijos komandos skyrė tik 9 taškai, bet ji – tik penkta. Antri, nuo nugalėtojų atsilikę tik dviem taškais, buvo latviai, toliau rikiavosi Estijos, Švedijos komandos. Po mūsų liko suomiai, islandai ir praeitosios olimpiados nugalėtoja – Danijos komanda. Tiesa, danai dėl to nelabai liūdėjo – tai buvo visai nauja ir labai jauna komanda, kurios nariai dar tik kaupia tarptautinių matematinių konkursų patirtį. Patirtis, įgyta Latvijoje, bus labai naudinga ir mūsų komandos moksleiviams. Jų dabar laukia individuali matematikų olimpiada, po kurios geriausieji įgis teisę kitą vasarą vykti į 35-ąją tarptautinę matematikų olimpiadą Hong Konge. Tikėkimės, kad Lietuvos jaunieji matematikai sėkmingai dalyvaus ir šioje tarptautineje matematikų olimpiadoje.

Autoriai

VIII LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Olimpiados rėmėjas

(direktorius Kęstutis Naujokaitis)

Organizacinis komitetas

A. Zabulionis (pirmininkas), V. Mackevičius.

Vertinimo komisija

V. Mackevičius (pirmininkas), V. Bagdonavičius, G. Bakštys, M. Bloznelis, V. Čekanavičius, Ž. Gimbutas, K. Liubinskas, R. Kašuba, J. Mačys, E. Markšaitis, A. Plikusas, G. Murauskas, K. Karčiauskas, R. Krasauskas, S. Norvidas.

REZULTATAI

Pirmoji vieta ir prof. Jono Kubiliaus pereinamasis prizas – Kauno miesto pirmoji komanda – **Kauno „Saulės“ gimnazijos komanda:**

- Indrė Asauskaitė (11 kl.),
- Andrius Bernotas (12 kl.),
- Paulius Čerka (12 kl.),
- Raminta Štuikytė (12 kl.),
- Giedrius Trumpickas (12 kl.).

Komandą rengė Kauno „Saulės“ gimnazijos mokytoja Birutė Vosylienė.

Antroji vieta – Šiaulių miesto pirmoji komanda:

- Evaldas Čepulis (9-oji vid. m-kla),
- Paulius Damskis (5-oji vid. m-kla),
- Marius Dunda (3-oji vid. m-kla),
- Dalius Mašalas (9-oji vid. m-kla),
- Darius Zuokas (9-oji vid. m-kla).

Komandą olimpiadai rengė mokytoja Petrė Grebeničenkaitė.

Trečioji vieta – Vilniaus realinė gimnazija (Gamtos, tiksliųjų ir technikos mokslų licėjus):

- Rimantas Lazauskas (12 kl.),
- Ignas Krasuckis (11 kl.),
- Nerijus Kukuraitis (11 kl.),
- Vytautas Paškūnas (11 kl.),
- Vytenis Pažemys (11 kl.).

Komandą olimpiadai rengė mokytojai Pranas Gudynas ir Antanas Skūpas.

Rezultatų suvestinė

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Σ	Vieta
Kaunas I	-	0	7	-	-	5	0	3	-	5	1	5	1	3	2	7	5	-	5	3	52	**1**
VU FuX**	0	-	0	-	0	5	1	4	5	5	-	5	-	-	2	-	5	3	5	3	43	-
Šiauliai I	0	6	0	-	0	5	1	4	5	4	0	0	0	1	-	-	4	0	5	6	41	**2**
Vilnius I	0	-	-	-	-	5	0	5	5	0	-	5	8	-	2	-	5	-	1	3	39	**3**
Vilnius II	0	6	0	-	-	5	-	4	-	4	0	5	0	0	2	-	5	0	4	2	37	4
Panevėžys	0	0	0	0	-	2	0	2	5	5	-	0	-	8	2	-	5	0	5	1	35	5
Jonava I	0	-	-	0	-	5	2	1	5	1	-	5	0	0	0	-	5	1	5	3	33	6
MaF FuX*	-	6	-	-	-	-	-	1	5	1	1	3	1	-	2	-	5	2	-	5	32	-
Klaipėda	0	-	7	-	-	5	-	0	-	0	-	3	-	-	-	-	-	-	-	5	20	7
Kaunas II	-	-	-	0	-	-	-	-	1	5	-	4	-	-	2	-	-	1	5	-	18	8
Jonava II	-	-	0	0	-	5	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	4	-	9	9
Šiauliai II	-	-	0	-	-	-	0	1	0	-	-	0	-	0	0	-	0	1	-	-	2	10

* VU Matematikos fakulteto pirmakursiai (be konkurencijos).
** VU kitų fakultetų pirmakursiai (be konkurencijos).

IV TARPTAUTINĖ KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA „BALTIJOS KELIAS – 93“

Ryga, 1993 11 11–15

Lietuvos komanda IV tarptautinėje komandinėje matematikos olimpiadoje „Baltijos kelias – 93“:

- **Andrius Bernotas,** Kauno „Saulės“ gimnazija
- **Evaldas Čepulis,** Šiaulių 9-ji vid. mokykla
- **Paulius Čerka,** Kauno „Saulės“ gimnazija
- **Darius Mašalas,** Šiaulių 9-oji vid. mokykla
- **Raminta Štuikytė,** Kauno „Saulės“ gimnazija

Komandos vadovas

- Kauno „Saulės“ gimnazijos mokytojas **Zenonas Repčys**.

Olimpiados žiuri narys

- Vilniaus universiteto docentas **Algirdas Zabulionis**.

Rezultatų suvestinė

Komanda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Σ	Vieta
Lenkija	5	5	5	5	5	5	3	0	5	4	2	0	0	0	5	1	0	5	0	5	60	**1**
Latvija	4	0	5	3	5	5	4	0	5	5	5	0	0	0	5	4	5	0	3	0	58	**2**
Estija	5	0	5	5	5	0	5	0	5	0	5	5	0	1	4	3	5	0	2	1	56	**3**
Švedija	4	5	5	5	5	2	3	2	2	0	4	4	0	2	5	4	0	0	1	1	54	4
Lietuva	5	5	5	5	3	2	3	3	5	0	1	0	0	1	5	0	0	5	2	1	51	5
Suomija	3	0	5	4	5	1	5	0	5	0	4	0	0	1	5	4	4	0	2	0	48	6
Islandija	5	5	5	4	5	0	3	0	5	0	2	0	0	1	5	0	2	0	0	0	42	7
Danija	4	0	5	5	5	0	0	3	5	1	5	0	0	1	5	0	0	0	2	0	41	8

VIII LIETUVOS KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Uždaviniai

1. Raskite skaičiaus $9999!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 9999$ tris paskutiniuosius skaitmenis.

2. Įrodykite, kad tarp skaičių $2^m + 2^k$, $3^m + 3^k$ yra be galo daug sveikųjų skaičių kvadratų ($m,\ k \in \mathbb{N},\ m \neq k$).

3. Į trikampį $\triangle ABC$ įbrėžtas apskritimas, liečiantis kraštines AB, BC, CA atitinkamai taškuose $C_1,\ A_1,\ B_1$. Žinoma, kad $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$. Įrodykite, kad trikampis yra lygiakraštis.

4. Ar gali natūraliojo skaičiaus kvadrato skaitmenų suma būti lygi 1993?

5. Įrodykite, kad su visais $a > 0,\ b > 0$

$$|e^{-a} - e^{-b}| \leq \frac{2|a-b|}{b}.$$

6. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n skaičius $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ yra sudėtinis.

7. Įrodykite, kad jei du apskritimai turi du bendrus taškus, tai jie yra vienoje sferoje arba plokštumoje.

8. Kertant kūną įvairiomis plokštumomis, pjūvyje visada gaunamas skritulys arba taškas. Įrodykite, kad tas kūnas yra rutulys.

9. Išskaidykite tiesiniais ir antrojo laipsnio dauginamaisiais reiškinį

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10}) - (1 + x + x^2 + \cdots + x^6)^2.$$

10. Išspręskite lygtį

$$32[x]^2 + 16x^2 - 32x[x] - 24x = 11.$$

Čia $[x]$ – sveikoji skaičiaus x dalis.

11. Įrodykite, kad jeigu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > m \qquad (n,\, m \in \mathbb{N}),$$

tai

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3n} > m + 1.$$

12. Ar egzistuoja tokie du iškilieji keturkampiai, kad vienas jų yra kito viduje ir vidinio keturkampio įstrižainių suma yra didesnė už išorinio keturkampio įstrižainių sumą?

13. Įrodykite, kad iš bet kokių skirtingų septynių taškų, priklausančių intervalui $(-1; 1)$, galima išrinkti tokius du taškus, sakykime, x ir y, kad

$$0 < x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}.$$

14. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais skaičiais $n > 1$ suma $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ nėra sveikasis skaičius.

15. a) Nurodykite tokią funkciją f (nelygią tapatingai nuliui), kad $f(x+1) = 2f(x)$ su visais $x \in (-\infty, +\infty)$;
b) raskite visas tokias funkcijas.

16. Įrodykite, kad skaičius

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \ddots + \cfrac{1}{1992 + \sqrt{1993}}}}}}$$

yra kvadratinės lygties $ax^2 + bx + c = 0$ su sveikaisiais koeficientais šaknis.

17. Su kuriomis natūraliųjų parametrų m ir n reikšmėmis lygčių

$$x^2 - mx + n + 1 = 0 \qquad \text{ir} \qquad x^2 - (n+1)x + m = 0$$

šaknys yra natūralieji skaičiai, kartu su m ir n sudarantys aritmetinę progresiją su suma 21?

18. Ar gali
a) plokštumoje;
b) erdvėje
taisyklingojo šešiakampio visų viršūnių koordinatės būti sveikieji skaičiai?

19. Įrodykite, kad jeigu $x^5 - x^3 + x = p > 0$, tai $x^6 \geq 2p - 1$.

20. Išspręskite sveikaisiais skaičiais lygtį

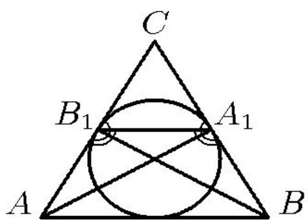
$$k^3 + 1000k^2n - 2kn^2 - 1993 = 0.$$

Nurodymai, sprendimai, atsakymai

1. Pažymėkime $a = 9999!!$ ir b – skaičių, sudarytą iš trijų paskutiniųjų skaičiaus a skaitmenų. Aišku, kad $a = 1000 \cdot k + b$ ($k \in \mathbb{N}$). Kadangi $1000 = 8 \cdot 125$, tai skaičių a ir b liekanos, dalijant iš 8 ir iš 9, sutampa. Kadangi a dalijasi iš $125 = 5^3$ ir b – nelyginis skaičius, tai b gali būti tik 125, 375, 625 arba 875. Kuris iš jų yra ieškomasis, sužinosime, radę skaičiaus a liekaną dalijant iš 8. Visus sandaugoje 9999!! esančius dauginamuosius galima sugrupuoti į 1250 sandaugų $(8n+1)(8n+3)(8n+5)(8n+7) = 8m+1\cdot3\cdot5\cdot7 = 8(m+13)+1$. Kaip matome, kiekvienos tokios grupės (taigi ir visos sandaugos) liekana dalijant iš 8 yra lygi 1. Tokią liekaną iš nurodytų keturių skaičių – galimų b reikšmių – turi tik 625. Ats.: 6, 2, 5.

2. Jei tarp pavidalo $a^m + a^k$ ($m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) skaičių yra bent vienas sveikojo skaičiaus kvadratas, tai jų yra be galo daug, nes $a^{m+2n} + a^{k+2n} = (a^m+a^k)\big(a^n\big)^2$. Atvejais $a = 2; 3$ turime, pavyzdžiui, $2^3+2^0 = 3^2$, $3^1 + 3^0 = 2^2$.

3. Įrodysime, kad, pavyzdžiui, $AC = BC$. Trikampiuose $\triangle AA_1B_1$ ir $\triangle BB_1A_1$ bendra kraštinė A_1B_1, $|AA_1| = |BB_1|$ ir $\angle AB_1A_1 = \angle BA_1B$ (nes $\angle CB_1A_1 = \angle CA_1B_1$ kaip kampai tarp liestinių ir stygos, jungiančios jų ir apskritimo lietimosi taškus). Taigi $\triangle AA_1B_1 = \triangle BB_1A_1 \Rightarrow AB_1 = BA_1 \Rightarrow AC = AB_1 + B_1C = BA_1 + A_1C = BC$.



4. Tirkime bendresnį uždavinį: kokie natūralieji skaičiai gali būti lygūs natūraliojo skaičiaus kvadrato skaitmenų sumai. Pažymėkime $S(n)$ natūraliojo skaičiaus n skaitmenų sumą. Skaičių n ir $S(n)$ liekanos dalijant iš 9 sutampa. Kadangi $(9k + l)^2 = 9(9k^2 + 2kl) + l^2 = 9m + l^2$, tai, norint rasti galimas liekanas, pakanka peržiūrėti skaičius l^2, $l = 1, 2, \ldots, 9$. Tai 0, 1, 4, 7. Taigi natūraliojo skaičiaus kvadrato skaitmenų sumos liekanos dalijant iš 9 gali būti tik 0,1,4,7 (arba dalijant iš 3 – 0 arba 1). Beje, $1993 = 9 \cdot 221 + 4$. Pasirodo, teisingas ir atvirkščias teiginys: bet kuris natūralusis skaičius, kurio liekana dalijant iš 9 lygi 0,1,4 arba 7, yra natūraliojo skaičiaus kvadrato skaitmenų suma. Iš tikrųjų

$$\begin{aligned}
S\big((10^n-1)^2\big) &= S(10^{2n}-2\cdot 10^n+1)\\
&= S(\underbrace{9\ldots9}_{n-1}8\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1) = 9n;\\
S\big((2\cdot 10^n-1)^2\big) &= S(4\cdot 10^{2n}-4\cdot 10^n+1)\\
&= S(3\underbrace{9\ldots9}_{n-1}6\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1) = 9n+1;\\
S\big((3\cdot 10^n-1)^2\big) &= S(9\cdot 10^{2n}-6\cdot 10^n+1)\\
&= S(8\underbrace{9\ldots9}_{n-1}4\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1) = 9n+4;\\
S\big((5\cdot 10^{n+1}-1)^2\big) &= S(25\cdot 10^{2n+2}-10^{n+2}+1)\\
&= S(24\underbrace{9\ldots9}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n+1}1) = 9n+7.
\end{aligned}$$

Atskiru atveju $1993 = S(8\underbrace{9\ldots9}_{220}4\underbrace{0\ldots0}_{220}1) = S\big((3\cdot 10^{221}-1)^2\big)$.

5. Naudosimės elementariomis nelygybėmis $0 \le 1-e^{-x} \le x,\ e^x > x$, kai $x \ge 0$ (funkcijos $f(x) = x + e^{-x} - 1$ ir $g(x) = e^x - x$ yra didėjančios intervale $[0,\infty)$; be to, $f(0) = 0$, $g(0) = 1$). Išskirsime 3 atvejus.

a) $0 < b \le a \Rightarrow |e^{-a} - e^{-b}| = e^{-b}\big|e^{-(b-a)} - 1\big| \le \dfrac{a-b}{b} \le \dfrac{2|a-b|}{b}$;

b) $0 < a \le b \le 2a \Rightarrow |e^{-a} - e^{-b}| \le \dfrac{b-a}{a} \le \dfrac{2|a-b|}{b}$;

c) $0 < 2a < b \Rightarrow |e^{-a} - e^{-b}| = e^{-a}\big(1 - e^{-(b-a)}\big) \le 1 - e^{-(b-a)} \le 1$ $\le \dfrac{2(b-a)}{b} = \dfrac{2|a-b|}{b}$.

6. $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4 - n^4 = \big((n+1)^2 + n^2\big)\big((n+1)^2 - n^2\big)$ $= (2n^2 + 2n + 1)(2n + 1)$.

7. Per apskritimų bendrosios stygos AB vidurio tašką E išveskime plokštumą, statmeną stygai AB. Ši plokštuma eina per apskritimų centrus

O_1 ir O_2 ir yra statmena abiejų apskritimų plokštumoms. Todėl statmenys, iškelti iš centrų O_1 ir O_2 į atitinkamų apskritimų plokštumas, yra išvestoje plokštumoje. Jei jie nesikerta, tai apskritimai yra vienoje plokštumoje. Jei šie stamenys kertasi, tai nesunku suvokti, kad jų susikirtimo taškas C yra sferos, kuriai priklauso abu apskritimai, centras (sferos spindulys lygus $|CA| = |CB|$).

8. Išveskime visas galimas plokštumas per du tolimiausius kūno taškus. Visuose pjūviuose gausime vienodo (didžiausio) skersmens skritulius.

9. Pateiktas reiškinys lygus

$$\begin{aligned}\frac{x^3-1}{x-1}\cdot\frac{x^{11}-1}{x-1}-\frac{(x^7-1)^2}{(x-1)^2} &= \frac{x^7-x^3+x^7-x^{11}}{(x-1)^2} = -\frac{x^3(x^4-1)^2}{(x-1)^2}\\ &= -x^3(x+1)^2(x^2+1)^2.\end{aligned}$$

10. Pažymėję $[x] = y \in \mathbb{Z}$, $z = x - y \in [0,1)$ ir įrašę į lygtį, paprastais pertvarkiais gauname

$$(4y-3)^2 + (4z-3)^2 = 29.$$

Kadangi $(4y-3)^2 \le 29$, tai sveikasis skaičius y gali būti lygus tik 0, 1 arba 2. Pirmosios dvi reikšmės netinka, nes tada atitinkamos z reikšmės yra už intervalo $[0,1)$ ribų. Atveju $y = 2$ gauname $z = \frac{1}{4}$ ir $z = \frac{5}{4}$ (antroji reikšmė netinka). Taigi $x = y + z = 2,25$.

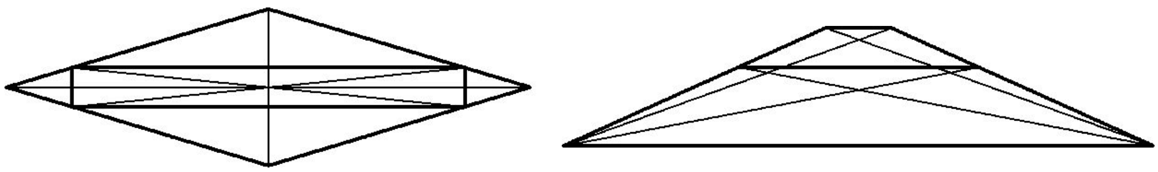
11. Pažymėkime $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$, $n \in \mathbb{N}$. Seka $\{a_n\}$ yra didėjanti, nes

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1}\\ &> \frac{3}{3n+3} - \frac{1}{n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Kadangi $a_5 = \frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{15} > 1$ (patikriname tiesiogiai arba kalkuliatoriumi – jais naudotis komandinėse olimpiadose leidžiama), tai $a_n > 1$ su visais $n \ge 5$. Tai įrodo teiginį su visais natūraliaisiais $n \ge 5$. Deja,

$a_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{12} < 1$, ir todėl likusiais atvejais (kai $n \leq 4$) teiginį reikia patikrinti atskirai. Kadangi $m \geq 1$, tai $n \geq 2$. Jei $n = 2$ arba $n = 3$, tai $m = 1$, ir reikia patikrinti, kad $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} > 2$. Ši nelygybė teisinga (nelygybė $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9} > 2$ juo labiau teisinga). Jei $n = 4$, tai $m \leq 2$, ir reikia patikrinti, kad $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{12} > 3$. Ši nelygybė taip pat teisinga.

12. Gali. Pavyzdžiai lengvai matomi iš pateikiamų brėžinių eskizų.



13. Tarkime, kad x_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$, yra skirtingi intervalo $(-1; 1)$ taškai. Tada $z_i = \arcsin x_i$, $i = 1, 2, \ldots, 7$, yra skirtingi intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ taškai. Tarp jų atsiras du tokie taškai z' ir z'', kad $0 < z' - z'' < \frac{\pi}{6}$ (Dirichlė principas!). Pažymėkime $x = \sin z'$, $y = \sin z''$. Tada

$$\begin{aligned} 0 = \sin 0 < \sin(z' - z'') < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 0 < \sin z' \cos z'' - \sin z'' \cos z' < \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 0 < x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

14. Su visais $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 1 < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ = 1 + \left(1 - \frac{1}{2})\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

15. Dauguma komandų pateikė kaip pavyzdį funkciją $f(x) = 2^x$, tačiau nė vienai nepavyko rasti bendro tokių funkcijų pavidalo. Jei $f(x+1) \equiv 2f(x)$, tai funkcija $g(x) = 2^{-x}f(x)$ yra periodinė su periodu 1:

$$g(x+1) = 2^{-(x+1)}f(x+1) = 2^{-(x+1)}2f(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Todėl kiekviena funkcija f, tenkinanti uždavinio sąlygą, turi pavidalą $f(x) = 2^x g(x)$; čia g – periodinė funkcija su periodu 1. Lengva patikrinti, kad visos tokio pavidalo funkcijos tenkina sąlygą $f(x+1) \equiv 2f(x)$.

16. Padauginę paskutinės („žemiausios“) trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš $1992 + \sqrt{1993}$, „žemiausioje“ eilutėje gauname skaičių $r_1 + r_2\sqrt{1993}$; čia $r_1 = 1991 + 1992/(1992^2 - 1993)$, $r_2 = -1/(1992^2 - 1993)$, nors mums svarbu tik tai, kad r_1 **ir** r_2 **yra racionalieji skaičiai**. Vėl dauginame paskutine tapusios trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš $r_1 - r_2\sqrt{1993}$ ir t.t. Kiekviename žingsnyje trupmenų brūkšnių skaičius sumažėja vienetu, ir galiausiai (po 1992 žingsnių) gausime $x = q_1 + q_2\sqrt{1993} = \frac{m + n\sqrt{1993}}{k}$; čia $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $m, n, k \in \mathbb{Z}$. Šis skaičius yra kvadratinės lygties $k^2x^2 + 2mkx + (m^2 - 1993n^2) = 0$ šaknis.

17. Pirmosios lygties šaknis pažymėkime x_1 ir x_2, antrosios – x_3 ir x_4. Iš sąlygos turime, kad $x_1+x_2+x_3+x_4+m+n = 21$. Kadangi pagal Vietos teoremą $x_1 + x_2 = m$, $x_3 + x_4 = n + 1$, tai gauname, kad $m + n = 10$. Nesunku patikrinti visas galimas (m, n) poras $(1, 9), (2, 8), \dots, (9, 1)$, ypač jei atsižvelgsime į lygybes $x_1x_2 = n + 1$, $x_3x_4 = m$. Tinka tik $m = 6$, $n = 4$ su progresija $x_1 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $n = 4$, $x_2 = 5$, $m = 6$. Atsakymas: $(m, n) = (6, 4)$.

18. a) Negali. Imkime taisyklingąjį trikampį, kurio viršūnės sutampa su trimis šešiakampio „sveikaskaitėmis“ viršūnėmis. Jo plotas lygus $S = a^2\sqrt{3}/4$; čia a – trikampio kraštinė. Remiantis Pitagoro teorema, a^2 – sveikasis skaičius. Todėl S – iracionalusis skaičius. Kita vertus, S lygus pusei ploto mažiausio trikampį dengiančio stačiakampio su kraštinėmis, lygiagrečiomis koordinačių ašims. Todėl S yra lygus sveikojo skaičiaus pusei. Gautoji prieštara rodo, kad plokštumoje nėra trikampio (taigi ir šešiakampio) su sveikaskaitėmis viršūnių koordinatėmis.

b) Gali. Tokį šešiakampį galima gauti, pavyzdžiui, kertant kubą, kurio priešingos viršūnės yra taškuose $(0, 0, 0)$ ir $(2, 2, 2)$, plokštuma, einančia per šešių jo briaunų vidurio taškus. Tie vidurio taškai ir yra šešiakampio viršūnės $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(0, 1, 2)$ ir $(0, 0, 1)$.

19. Visų pirma pastebėkime, kad jei $x(x^4-x^2+1)=p>0$, tai $x>0$ (nes $x^4-x^2+1>0$ su visais $x\in\mathbb{R}$). Turime

$$\begin{aligned}x^6-(2p-1)&=x^6-2x^5+2x^3-2x+1\\&=x^6-x^4+x^2+x^4-x^2-2x^5+2x^3-2x+1\\&=x(x^5-x^3+x)-2(x^5-x^3+x)+x^4-x^2+1\\&=xp-2p+\frac{p}{x}=\frac{p}{x}(x-1)^2\geq 0.\end{aligned}$$

20. Kadangi $k(k^2+1000kn-2n^2)=1993$ – pirminis skaičius, tai galimos k reikšmės yra $k_{1,2}=\pm 1$; $k_{3,4}=\pm 1993$. Nesunku ištirti atitinkamas kvadratines lygtis $2n^2-1000k_in+(1993/k_i-k_i^2)=0$. Tik atveju $k=k_1=1$ gauname sveikuosius sprendinius $n=2;498$. Atsakymas: $(k,n)=(1,2);(1,498)$.

Priedas – Appendix

PROBLEMS
of VIII Lithuanian Mathematical Team Contest

Vilnius, October 30, 1993

1. Find the last three digits of the number $9999!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 9999$.

2. Prove that there are infinitely many squares of integer numbers both among the numbers $2^m + 2^k$ and among the numbers $3^m + 3^k$ ($m, k \in \mathbb{N}$, $m \neq k$).

3. A circle is inscribed into a triangle ABC with the tangency points $C_1 \in AB$, $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$. It is known that $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$. Prove that the triangle is equilateral.

4. Can be the sum of the digits of a positive integer be equal to 1993?

5. Prove that, for all $a > 0$, $b > 0$,

$$|e^{-a} - e^{-b}| \leq \frac{2|a-b|}{b}.$$

6. Prove that the number $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ is composite for all positive integers n.

7. Prove that if two circles have two common points, then they are either in one sphere or in one plane.

8. All sections of a solid are either disks or single points. Prove that this solid is a ball.

9. Decompose the expression

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10}) - (1 + x + x^2 + \cdots + x^6)^2$$

into a product of the first and second order polynomials.

10. Solve the equation

$$32[x]^2 + 16x^2 - 32x[x] - 24x = 11,$$

where $[x]$ denotes the integer part of a number x.

11. Prove that if

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>m \qquad (n,\, m\in \mathbb{N}),$$

then

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3n}>m+1.$$

12. Do there exist two convex quadrangles such that one of them is inside of another one, and the sum of the diagonals of the internal quadrangle is greater than the sum of the diagonals of the external one?

13. Given seven different points in the interval $(-1;1)$, prove that one can choose two points, say x and y, such that

$$0<x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}<\frac{1}{2}.$$

14. Prove that the sum $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ is not an integer for any $n>1$.

15. a) Give an example of a non-trivial function f such that $f(x+1)=2f(x)$ for all $x\in(-\infty,+\infty)$;
b) find all such functions.

16. Prove that the number

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{1992+\sqrt{1993}}}}}}$$

is a solution of a quadratic equation $ax^2+bx+c=0$ with integer coefficients.

17. Positive integers m, n, and four positive integer roots of the equations

$$x^2 - mx + n + 1 = 0 \qquad \text{and} \qquad x^2 - (n+1)x + m = 0$$

form an arithmetical progression with the sum 21. Find m and n.

18. The coordinates of the vertices of a regular sexagon are integers. Is this possible in
a) the plane;
b) the (three-dimensional) space?

19. Show that if $x^5 - x^3 + x = p > 0$, then $x^6 \geq 2p - 1$.

20. Solve in integers the equation

$$k^3 + 1000k^2n - 2kn^2 - 1993 = 0.$$