

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Rima
KRIAUSIENĖ

Didelės skaičiavimo apimties neklasikinių uždavinių sprendimo lygiagretieji algoritmai

DAKTARO DISERTACIJOS SANTRAUKA

Gamtos mokslai,
informatika N 009

VILNIUS 2019

Disertacija rengta 2015–2019 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, gamtos mokslai, informatika – N 009).

Mokslinis konsultantas:

prof. dr. Julius Žilinskas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, informatika – N 009).

Gynimo taryba:

pirmininkas – prof. dr. Rimantas Vaicekauskas (Vilniaus universitetas, gamtos mokslai, informatika – N 009).

Nariai:

prof. habil. dr. Rimantas Barauskas (Kauno technologijos universitetas, gamtos mokslai, informatika – N 009),

prof. dr. Jaan Janno (Talino technologijos universitetas, gamtos mokslai, matematika – N 001),

prof. habil. dr. Genadijus Kulvietis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, technologijos mokslai, informatikos inžinerija – T 007),

prof. habil. dr. Leonidas Sakalauskas (Vilniaus universitetas, technologijos mokslai, informatikos inžinerija – T 007).

Disertacija ginama viešame Gynimo tarybos posėdyje 2020 m. sausio mėn. 8 d. 12 val. Vilniaus universiteto Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų instituto 203 auditorijoje.

Adresas: Akademijos g. 4, LT-08412, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2019 m. gruodžio mėn. 7 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: <https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendarius>

VILNIUS UNIVERSITY

Rima
KRIAUSIENĖ

Parallel algorithms for non-classical problems with big computational costs

SUMMARY OF DOCTORAL DISSERTATION

Natural Sciences,
Informatics N 009

VILNIUS 2019

This dissertation was written between 2015 and 2019 at Vilnius University.

Academic supervisor:

Prof. Habil. Dr. Raimondas Čiegis (Vilnius Gediminas Technical University, Natural Sciences, Informatics – N 009).

Academic consultant:

Prof. Dr. Julius Žilinskas (Vilnius University, Natural Sciences, Informatics – N 009).

This doctoral dissertation will be defended in a public meeting of the Dissertation Defence Panel:

Chairman – Prof. Dr. Rimantas Vaicekauskas (Vilnius University, Natural Sciences, Informatics – N 009).

Members:

Prof. Habil. Dr. Rimantas Barauskas (Kaunas University of Technology, Natural Sciences, Informatics – N 009),

Prof. Dr. Jaan Janno (Tallinn University of Technology, Natural Sciences, Mathematics – N 001),

Prof. Habil. Dr. Genadijus Kulvietis (Vilnius Gediminas Technical University, Technological Sciences, Informatics Engineering –T 007),

Prof. Habil. Dr. Leonidas Sakalauskas (Vilnius University, Natural Sciences, Informatics – N 009).

The dissertation shall be defended at a public meeting of the Dissertation Defence Panel at 12:00 a. m. on the 8th of January 2020 in Room 203 of the Institute of Data Science and Digital Technologies of Vilnius University. Address: Akademijos street 4, LT-08412, Vilnius, Lithuania.

The summary of the doctoral dissertation was distributed on the 7th of December, 2019. The text of this dissertation can be accessed at

the library of Vilnius University, as well as on the website of Vilnius University: <https://www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius>

TURINYS

1. TYRIMO SRITIS IR PROBLEMOS AKTUALUMAS.....	7
2. TYRIMO OBJEKTAS	9
3. DARBO TIKSLAS IR UŽDAVINIAI.....	9
4. TYRIMO METODAI	11
5. DARBO MOKSLINIS NAUJUMAS	11
6. DISERTACIJOS PRAKTINĖ VERTĖ.....	12
7. GINAMIEJI TEIGINIAI.....	12
8. DISERTACIJOS REZULTATŲ APROBAVIMAS.....	13
9. DISERTACIJOS STRUKTŪRA	14
10. PADĖKA.....	14
11. LYGIAGREČIŲJŲ ALGORITMŲ SUDARYMAS UŽDAVINIAM SU ELIPSINIU OPERATORIUMI, PAKELTU TRUPMENINIU LAIPS- NIU.....	15
12. VIENMATĖS ŠRIODINGERIO LYGTIES PRALAIIDŽIŲ KRAŠ- TINIŲ SĄLYGŲ SUDARYMAS.....	17
13. TRISLUOKSNĖ LYGIAGRETINIMO SCHEMA.....	17
14. BENDROSIOS IŠVADOS	19
PUBLIKACIJŲ SĄRAŠAS.....	20
TRUMPOS ŽINIOS APIE DISERTANTĄ.....	24
LITERATŪROS SĄRAŠAS	24

SANTRAUKA

1. TYRIMO SRITIS IR PROBLEMOS AKTUALUMAS

Sprendžiant šiuolaikinius uždavinius reikia atlikti tiek daug skaičiavimų, kad net ir pačiais greičiausiais šiuolaikiniais nuosekliais kompiuteriais negalime laiku rasti atsakymo. Kitas didelių uždavinių sprendimo ribojimas – vieno kompiuterio atminties ištekliai. Skaičiavimo lygiagretinimo technologijos padeda išspręsti abi problemas.

Disertacijoje nagrinėjami du taikomieji uždaviniai. Pirmasis uždavinys aprašytas elipsiniu operatoriumi, pakeltu trupmeniniu laipsniu (Nochetto et al., 2015; Bonito et al., 2018), kuris pasižymi savybe: uždavinio dimensijos didinimas labai padidina skaičiavimo sąnaudas. Šį modelį taikyti tampa patraukliau, kai naudojame lygiagrečiuosius skaičiavimus. Tačiau siekiant efektyvių lygiagrečiųjų skaičiavimų reikia taikyti tinkamus lygiagrečiuosius algoritmus ir atlikti išsamią teorinę analizę. Išnagrinėjome ir palyginome lygiagrečiuosius skaitinius algoritmus, skirtus skirtingiems naujausiems skaitiniams metodams (Nochetto et al., 2015; Vabishchevich, 2015; Bonito et al., 2018; Harizanov et al., 2018), kurie pasiūlyti uždaviniams su elipsiniais operatoriais, pakeltais trupmeniniais laipsniais (Nochetto et al., 2015; Bonito et al., 2018), spręsti. Šiame tyrime nelokalų uždavinį $L^\beta u = f$ suvedame į gerai žinomą lokalų elipsinio ar pseudo-parabolinio tipo diferencialinių lygčių uždavinį, suformuluotą didesnės dimensijos \mathbb{R}^{d+1} erdvėje, kai elipsinis operatorius yra iš $\Omega \in \mathbb{R}^d$. Ištyrėme silpną ir stiprų lygiagrečiųjų algoritmų išplečiamumą. Išspręsti dvimačiai ir trimačiai uždaviniai, pateikta išsami konvergavimo analizė. Pagrindinis antrojo disertacijos skyriaus tikslas – nustatyti, kurie lygiagretieji algoritmai rekomenduojami norint pasiekti tam tikrą tikslumą atitinkamam trupmeninui laipsniui.

Trečiajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas antrasis uždavinys – sugeriančių kraštinių sąlygų konstravimas vienmatei Šriodingerio

lygčiai (Menza, 1997; Arnold, 1998; Antoine et al., 2008; Szeftel, 2004). Naudojant klasikinę kraštines sąlygas lygties sprendinys atsispindi nuo krašto ir sukelia didelių paklaidų visame intervale. Todėl tenka ženkliai didinti modeliavimo sritį, o dėl to didėja ir skaitinio algoritmo skaičiavimo sąnaudos, ir atminties reikalavimai modeliuojant ilgame laiko intervale. Taigi svarbu sukonstruoti tinkamas kraštines sąlygas ir išvengti neigiamų pasekmių, susijusių su kompiuterio atminties reikalavimais, modeliuojant ilgame laiko intervale. Šie neišvengiami, kai konstruojame tiksliai pralaidžias kraštines sąlygas. Vienas iš būdų šiai problemai spręsti – sugeriančių kraštinių sąlygų konstravimas (Menza, 1997; Arnold, 1998; Antoine et al., 2008; Szeftel, 2004). Disertacijoje nagrinėjami metodai šioms sąlygoms konstruoti, pagrįsti tiksliai pralaidžių kraštinių sąlygų aproksimavimu racionaliosiomis funkcijomis. Nagrinėjamos skirtingos strategijos racionalių funkcijų optimaliems koeficientams rasti pasirinktiems uždaviniams su žinomais tiksliais sprendiniais: Padé aproksimacija, Furjė (angl. *Fourier*) simbolio aproksimacija L_2 normoje, atspindžio koeficiento minimizavimas L_2 normoje ir kombinuotas metodas, paremtas minimizavimu dviejose skirtingose normose. Suformuluoti minimizavimo uždaviniai yra globaliosios optimizacijos, jie nagrinėjami kaip „juodosios dėžės“ atvejai. Šių uždavinių tikslo funkcijos skaičiavimo sąnaudos yra pakankamai didelės, todėl sprendimas užima daug laiko. Siekiant greičiau atlikti eksperimentus, reikia taikyti lygiagrečiuosius skaičiavimus. Siūloma minimizavimo technika parodė, kad galima rasti koeficientų reikšmes, tinkančias dviem kokybiškai skirtingiems uždaviniams, kai sprendinių paklaidos yra gana mažos daugeliu modeliavimo atvejų.

Ketvirtajame disertacijos skyriuje siūlome bendrą metodiką, skirtą algoritmams lygiagretinti, sprendžiant trečiajame skyriuje nagrinėtus uždavinius. Siūloma lygiagretinimo strategija turi tris lygmenis. Skirtingi šios schemos lygmenys suteikia naujų lygiagretinimo galimybių, tačiau tuo pačiu metu kyla skirtingų

skaičiavimo iššūkių. Svarbi siūlomos trijų lygmenų schemos dalis yra prielaida, kad pirmajame lygmenyje egzistuoja kelios lygiagrečiosios nuosekliojo algoritmo alternatyvos. Jos gali būti ne tokios efektyvios kaip geriausias nuo-seklusis algoritmas, bet pasižymi geromis lygiagretinimo savybėmis. Pirmasis lygiagretinimo schemos lygmuo yra naujo trijų lygmenų algoritmo dalis, o šio lygmens lygiagretumo laipsnis gali būti dina-miškai pasirenkamas skaičiavimų metu. Pirmojo lygmens lygiagre-tinimas skiriasi priklausomai nuo uždavinio, todėl nėra konkrečių uni-versalių metodų. Ketvirtajame skyriuje pateikiama bendra šios sche-mos taikymo procedūra. Antrajame lygmenyje apibrėžiamas užda-vinių, kurie yra skirtingų skaičiavimo dydžių, rinkinys. Šie uždaviniai gali būti sprendžiami nepriklausomai vienas nuo kito, t.y. juos galima spręsti lygiagrečiai. Trečiajame lygmenyje apibrėžiami lygiagretieji algoritmai, kurie naudojami antrojo lygmens užduotims spręsti. Darbų skirstymui tarp procesų optimizuoti siūloma godžioji darbo krūvio paskirstymo euristika. Ji testuojama sprendžiant etaloninius už-davinius.

Norint parodyti, kad šis metodas gali būti plačiai taikomas, aptariame galimybę taikyti siūlomą trijų lygmenų lygiagretinimo schemą kitiems pavyzdžiams.

2. TYRIMO OBJEKTAS

Lygiagretieji algoritmai uždaviniams, susijusiems su didelėmis skaičiavimo sąnaudomis, taip pat optimizavimo uždaviniai.

3. DARBO TIKSLAS IR UŽDAVINIAI

Ištirti efektyvius lygiagrečiuosius algoritmus uždaviniams su elipsiniu operatoriumi, pakeltu trupmeniniu laipsniu, ir optimizavimo uždaviniams, reikalaujantiems didelių skaičiavimo sąnaudų.

3.1 Tyrimo uždaviniai

- Sudaryti lygiagrečiuosius algoritmus uždaviniams su elipsiniu operatoriumi, pakeltu trupmeniniu laipsniu:

- atlikti žinomų lygiagrečiųjų algoritmų galimybių analizę uždaviniams su elipsiniu operatoriumi, pakeltu trupmeniniu laipsniu;
- pasiūlyti ir išanalizuoti efektyvius lygiagrečiuosius algoritmus tokio tipo uždaviniams spręsti;
- atlikti pasiūlytų lygiagrečiųjų algoritmų išplečiamumo analizę;
- suformuluoti išvadas ir rekomendacijas tokio tipo uždaviniams spręsti.

- Uždaviniai, skirti vienmatės Šriodingerio lygties pralaidžioms kraštinėms sąlygoms sudaryti:

- atlikti literatūros, skirtos vienmatės Šriodingerio lygties pralaidžioms kraštinėms sąlygoms sudaryti, analizę;
- pasiūlyti ir iširti metodikas kraštinių sąlygų koeficientams rasti;
- atlikti skaičiavimus su skirtingomis pradinėmis ir kraštinėmis sąlygomis Šriodingerio uždaviniui;
- suformuluoti išvadas ir rekomendacijas kaip konstruoti sugeriančias kraštines sąlygas Šriodingerio lygčiai, naudojant šias metodikas.

- Uždaviniai, skirti trisluoksnei lygiagretinimo schemai:

- pasiūlyti trijų lygmenų lygiagretinimo metodiką;
- atlikti pasiūlytos schemos detalią analizę;
- pritaikyti sukurtą trisluoksnią schemą optimizavimo uždaviniams spręsti;

- suformuluoti išvadas ir rekomendacijas, kaip išnaudoti šios schemos visas galimybes.

4. TYRIMO METODAI

Disertacijoje taikomi šie metodai: diferencialinių lygčių sprendimo skaitiniai metodai (baigtinių tūrių metodas, baigtinių skirtumų metodas), algoritmų teorija, konvergavimo analizė, lygiagrečiųjų skaičiavimų teorija, išplečiamumo analizė, srities dalijimo metodas, opti-mizavimo teorija ir simplekso metodas.

5. DARBO MOKSLINIS NAUJUMAS

- Disertacijoje nagrinėti ir lyginti lygiagretieji algoritmai, skirti skirtingiems naujausiems skaitiniams metodams, kurie literatūroje siūlomi uždaviniams su elipsiniu operatoriumi, pakeltu trupmeniniu laipsniu, spręsti. Atlikta lygiagrečiųjų algoritmų išplečiamumo ir kon-vergavimo analizė. Pateikta rekomendacijų, kaip pasiekti norimą tiks-lumą esant atitinkamam elipsinio operatoriaus trupmeniniam laipsniui β .

- Pateikta rekomendacijų, kaip naudojant skirtingus metodus konstruoti sugeriančias kraštines sąlygas vienmatei Šriodingerio lygčiai. Pasiūlyta metodika parodė, kad galima rasti sugeriančias kraštines sąlygas keturiems kokybiškai skirtingiems uždaviniams.

- Pasiūlyta trijų lygmenų lygiagretinimo schema, kuri, lyginant su klasikine dvisluoksne lygiagretinimo schema, padidina naudotinių išteklių kiekį ir leidžia gauti papildomą pagreitėjimą. Parodyta, kad taikant siūlomą metodiką galima efektyviai išnaudoti esamus išteklius.

6. DISERTACIJOS PRAKTINĖ VERTĖ

- Sprendžiant nelokalųjį uždavinį su elipsiniu operatoriumi pakeltu trupmeniniu laipsniu skaičiavimo apimtys yra didelės, tad be lygiagrečiųjų skaičiavimų net ir vieną kartą išspręsti šį uždavinį yra sunku. Darbe atlikta lygiagrečiųjų algoritmų išplečiamumo analizė. Lyginti skirtingi metodai naudojant lygiagrečiuosius algoritmus. Pateiktos rekomendacijos, kaip pasiekti norimą tikslumą atitinkam elipsinio operatoriaus laipsniui β , padeda pasirinkti tinkamą metodą.
- Pateikta trisluoksnė lygiagretinimo schema ir jos naudojimo rekomendacijos. Ši schema gali būti efektyviai taikoma uždaviniams, kai naudotinių išteklių kiekis yra didelis.

7. GINAMIEJI TEIGINIAI

1. Nagrinėjtais atvejais rekomenduojami, uždaviniams su elipsiniu operatoriumi, pakeltu trupmeniniu laipsniu, lygiagretieji algoritmai yra optimalūs skaičiavimų laiko atžvilgiu, norint pasiekti tam tikrą tikslumą prie duotųjų trupmeninių laipsnių.

2. Nurodytoje septynių parametrų erdvėje rastos pralaidžios kraštinės sąlygos keturiems kokybiškai skirtingiems Šriodingerio uždaviniams.

3. Pateikta trisluoksnė lygiagretinimo schema padidina lygiagretumo laipsnį ir naudotinių resursų kiekį, todėl gauname papildomą pagreitėjimą.

8. DISERTACIJOS REZULTATŲ APROBAVIMAS

Disertacijos rezultatai pristatyti penkiose tarptautinėse konferencijose, trijose konferencijose, vykstančiose Lietuvoje, dviejose jaunųjų mokslininkų konferencijose ir Nesus organizuojamos žiemos mokyklos doktorantų simpoziume Zagrebe. Disertacijos tema paskelbti trys straipsniai, įtraukti į Thompson Reuters ISI Web of Scien-ce duomenų bazę ir turi citavimo indeksą, vienas straipsnis paskelbtas konferencijų medžiagoje. Detalus sąrašas pateiktas santraukos skyriuje „Publikacijų sąrašas“.

Disertacijos rezultatai pristatyti ir aptarti šiose konferencijose:

- MMA2019: 24nd International Conference, 2019 m. gegužės 28 d.–2019 m. gegužės 31 d., Talinas, Estija.
- DAMSS: 10th International Workshop on Data Analysis Methods for Software Systems, 2018 m. lapkričio 29 d.–2018 m. gruodžio 1 d., Druskininkai, Lietuva.
- DAMSS: 9th international Workshop on Data Analysis Methods for Software Systems, 2017 m. lapkričio 30 d.–2017 m. gruodžio 2 d., Druskininkai, Lietuva.
- MMA2018: 23nd International Conference, 2018 m. gegužės 29 d.–2018 m. birželio 1 d., Sigulda, Latvija.
- DAMSS: 8th Data Analysis Methods for Software Systems, 2016 m. gruodžio 1 d.–2016 m. gruodžio 3 d., Druskininkai, Lietuva.
- MMA2017: 22nd International Conference Mathematical Modelling and Analysis, 2017 m. gegužės 30 d.–2017 m. birželio 2 d., Druskininkai, Lietuva.
- 12th International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics [PPAM 2017], 2017 m. rugsėjo 10 d.–2017 m. rugsėjo 13 d., Liublinas, Lenkija.

- MMA2016: 21st International Conference Mathematical Modelling and Analysis, 2016 m. birželio 1 d.–2016 m. birželio 4 d., Tartu, Estija.

Mokyklos:

- 3rd NESUS Winter School and PhD Symposium 2018, 2018 m. sausio 22 d.–2018 m. sausio 25 d., Zagrebas, Kroatija. Pranešimo tema: „Numerical analysis and optimization of parallel algorithms for problems with big computational costs.“

<http://nesusws.irb.hr/images/Bookof-Abstracts.pdf>

- NESUS Winter School & PhD Symposium 2016, 2016 m. vasario 8 d.–2016 m. vasario 11 d., West University of Timisoara, Ru-munija.

Disertacijos rezultatai pristatyti Vilniaus universiteto Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institute ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto matematinio modeliavimo katedroje.

9. DISERTACIJOS STRUKTŪRA

Disertaciją sudaro įvadas, trys skyriai, literatūros sąrašas, publikacijų sąrašas, santrauka lietuvių kalba ir padėka. Disertacijos skyriai padalyti į poskyrius, o poskyriai – į skyrelius.

Disertacijoje yra 106 puslapiai, 10 paveikslų ir 30 lentelių. Disertacijoje cituojami 103 informacijos šaltiniai.

10. PADĖKA

Esu dėkinga savo darbo vadovui prof. habil. dr. Raimondui Čiegiui už vadovavimą, konsultacijas, visapusę pagalbą ir palaikymą doktorantūros studijų metu. Jo dėka mano mokslinė kompetencija augo per visą studijų procesą. Tai ir yra pagrindinis doktorantūros studijų tikslas.

Dėkoju už pagalbą konsultantui prof. dr. Juliiui Žilinskui. Taip pat dėkoju kolegoms už pagalbą atliekant tyrimus.

Esu dėkinga doc. dr. Teresei Leonavičienei ir prof. dr. Vadimui Starikovičiui už bendradarbiavimą atliekant tyrimus ir suteiktus patarimus.

Ypač norėčiau išskirtinai padėkoti kolegai dr. Andrejui Bugajevui už skirtą laiką, vertingas pastabas ir patarimus.

Dėkoju recenzentams prof. dr. Romui Baronui ir prof. habil. dr. Antanui Žilinskui už vertingas pastabas ir patarimus.

Dėkoju VU DMSTI globalaus optimizavimo grupės darbuotojams už vertingas pastabas. Taip pat VU DMSTI administracijos darbuotojams už pagalbą tvarkant dokumentus.

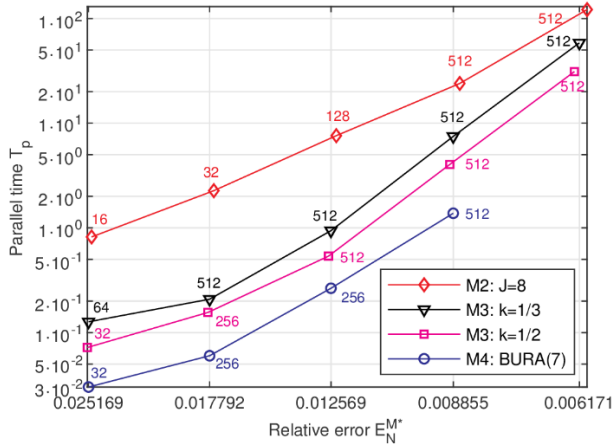
Esu dėkinga draugei dr. Kristinai Kaulakytei už pagalbą, palaikymą ir vertingas pastabas.

Nuoširdžiai dėkoju savo vyrui Gediminui, sūnums Arnui, Aivarui ir Benui už kantrybę, palaikymą ir supratingumą.

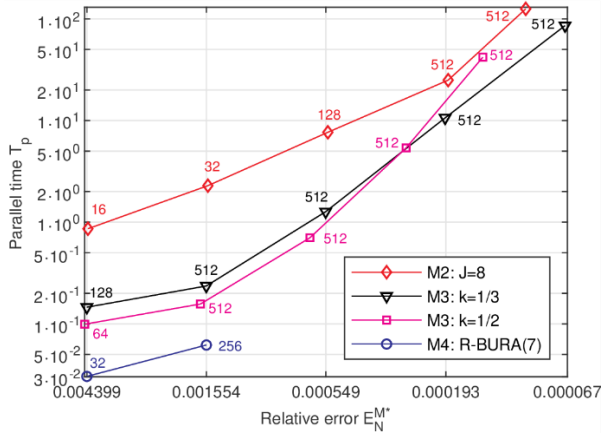
11. LYGIAGREČIŪJŲ ALGORITMŲ SUDARYMAS UŽDAVINIAMS SU ELIPSINIU OPERATORIUMI, PAKELTU TRUPMENINIU LAIPSNIU

Antrajame disertacijos skyriuje nagrinėjamas uždavinys su elipsiniu operatoriumi, pakeltu trupmeniniu laipsniu. Pasirinkti keturi naujausi skaitiniai metodai, kurie nelokalųjį uždavinį transformuoja į pseudo-parabolinio ar elipsinio tipo lokalųjį diferencialinį uždavinį, suformuluotą didesnės dimensijos \mathbb{R}^{d+1} erdvėje, kai elipsinis operatorius yra iš \mathbb{R}^d . Šių metodų ypatybės lemia skirtingas lygiagrečiųjų algoritmų savybes. Pasiūlyti lygiagretieji algoritmai grindžiami srities dekompozicijos ir šeimininko-darbininko metodais. Atlikta lygiagrečiųjų algoritmų išplečiamumo ir konvergavimo analizė. Atlikti skaičiavimo eksperimentai Bulgarijos mokslo akademijos informatikos ir komunikacijų technologijos

instituto Sofijoje (angl. *Instituto Institute of Information and Communication Technologies (IICT) of the Bulgarian Academy of Sciences*) klasteryje „Avitohol“ (<http://www.iict.bas.bg/avitohol>). Pateiktos išvados ir rekomendacijos, kaip pasiekti tam tikrą tikslumą atitinkamam trupmeniniam laipsniui (žr. Paveikslas 11.1).



(a) Lygiagrečiojo sprendimo laikas T_p su $\beta = 0,25$,



(a) Lygiagrečiojo sprendimo laikas T_p su $\beta = 0,75$.

Paveikslas 11.1: Lygiagrečiųjų algoritmų palyginimas sprendžiant 3D testinį uždavinį (M1)–(M4) metodais.

12. VIENMATĖS ŠRIODINGERIO LYGTIES PRALAIIDŽIŲ KRAŠTINIŲ SĄLYGŲ SUDARYMAS

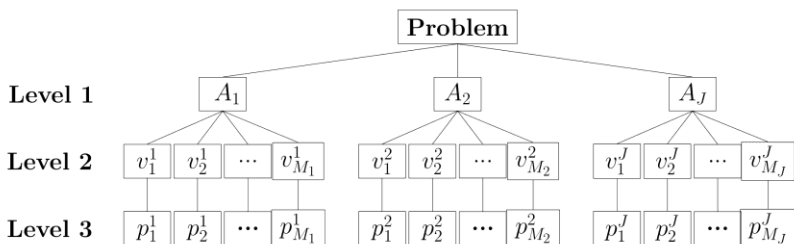
Trečiajame disertacijos skyriuje nagrinėjama vienmatė tiesinė Šriodingerio lygtis. Sukonstruotos sugeriančios kraštinės sąlygos, kurios gaunamos aproksimuojant tikslias pralaidžias kraštines sąlygas racionaliosiomis funkcijomis. Rasti koeficientai pasirinktoms funkcijoms, iširtos skirtingos strategijos koeficientams rasti: Padė aproksimacija, Furjė simbolio aproksimacija L_2 normoje, atspindžio koeficiento minimizavimas L_2 normoje, du adaptyvūs metodai, paremti sprendinio paklaidų minimizavimu pasirinktiems uždaviniams su žinomais tiksliais sprendiniais, ir kombinuotas metodas, paremtas kelių uždavinių su skirtingomis pradinėmis sąlygomis paklaidų minimizavimu, nagrinėtos dvi skirtingos normos. Suformuluotų globalaus optimizavimo uždavinių skaičiavimo sąnaudos yra didelės, todėl buvo naudojami lygiagretieji skaičiavimai. Atlikti skaičiavimo eksperimentai VU klasteryje „Saulėtekis“ (<http://www.supercomputing.vu.lt/hpc-sauletekis>). Pateikta skirtingų metodų lyginimo analizė ir rastas koeficientų rinkinys, kuris tinka dviem kokybiškai skirtingiems uždaviniams, konstruojant sugeriančias kraštines sąlygas.

13. TRISLUOKSNĖ LYGIAGRETINIMO SCHEMA

Ketvirtajame disertacijos skyriuje siūlome bendrą lygiagretinimo metodiką, skirtą optimizavimo uždaviniams spręsti, kai naudotinių išteklių skaičius yra didelis. Siūloma metodika turi tris

lygiagretinimo lygmenis. Skirtingi lygiagretinimo lygmenys padidina lygiagretumo laipsnį, tačiau kelia naujų iššūkių. Pirmajame lygiagretinimo lygme-nyje darome prielaidą, kad egzistuoja lygiagrečiosios alternatyvos nuosekliajam algoritmui. Šis lygmuo tampa schemas lygiagrečiojo algoritmo dalimi, kurios lygiagretumo laipsnis gali būti pasirinktas dinamiškai skaičiavimų metu. Lygiagretinimo pagreitėjimas S_p pirmajame lygmenyje nėra tiesinis, todėl gali sumažinti visos schemas lygiagretinimo efektyvumą E_p . Tačiau šis lygmuo leidžia naudoti daug daugiau procesų ir greičiau išspręsti duotąjį uždavinį lyginant su dviejų lygmenų strategija. Atliekant schemas tyrimą, pirmajame lygmenyje kaip pavyzdį naudojome lygiagretųjį simplekso metodą. Antrajame schemas lygmenyje apibrėžiamas užduočių rinkinys su skirtingais skaičiavimo dydžiais. Kiekviena užduotis sudaryta iš darbų aibės. Darbų pasiskirstymas tarp užduočių gali būti nevienodas, dėl to lygiagretinimas sudėtingesnis ir kyla dar vieno lygmens poreikis, norint atlikti tinkamą darbų paskirstymą. Šiai problemai spręsti siūloma euristika, leidžianti paskirstyti užduotis tarp procesų. Kaip pavyzdys sprendžiamos M diferencialinių lygčių. Šių uždavinių skaičiavimo dydžiai nevienodi, nes kiekvienai lygčiai diskretizuoti turi būti naudojamas skirtingas taškų skaičius pagal laiką ir erdvę, kad būtų pasiektas toks pat tikslumas. Trečiasis lygmuo skirtas lygiagrečiam algoritmui, kuriuo sprendžiame antrajame lygmenyje apibrėžtas užduotis. Kaip pavyzdys naudojamas lygiagretusis Vango (Wang, 1981) algoritmas, skirtas trijųstrižainėms lygčių sistemoms spręsti. Šis algoritmas yra sudėtingesnis už nuoseklųjį perkelties algoritmą, tačiau leidžia skirtingiems uždaviniams priskirti skirtingą procesorių skaičių. Šis lygmuo gali būti naudojamas be antrojo lygmens. Tada gauname dviejų lygių lygiagretinimo schemą, tačiau tokiu atveju trečiasis lygmuo ribojamas Amdahlo dėsnio. Pasiūlyta bendra metodika, kuri jungia lokalaus optimizavimo algoritmo lygiagretinimą su standarti-niu dviejų lygių lygiagretinimu.

Pateikta išsami pasiūlytos trijų lygmenų schemos analizė. Parodyta, kad siūloma metodika leidžia efektyviai išnaudoti esamus išteklius. Aptartos schemos taikymo galimybės. Atliktas dviejų lygiagrečiųjų simplekso metodų lyginimas. Pateiktas schemos taikymo pavyzdys, dėl kurio gautas geresnis trečiojo skyriaus rezultatas. Surastas ko-eficientų rinkinys tinkamas keturiems kokybiškai skirtingiems uždaviniams, t.y. apibrėžtos efektyvios sugeriančios kraštinės sąlygos. Tai pat šioje schemoje pasiūlyta euristika kontroliuoti efektyvumą trečiajame lygmenyje. Atlikti skaičiavimo eksperimentai VU klasteryje „Saulėtekis“ (<http://www.supercomputing.vu.lt/hpcsauletekis>).



Paveikslas 13.1: Trijų lygmenų lygiagretinimo schema.

14. BENDROSIOS IŠVADOS

1. Sukurti lygiagretieji algoritmai, uždaviniams su elipsiniu operatoriumi, pakeltu trupmeniniu laipsniu, yra pakankamai efektyvūs (tam tikrais atvejais efektyvumas artimas 1). Didžiausio tikslumo sprendiniai gaunami naudojant eksponentiškai konverguojančią kvadratūrinę formulę (M3).

2. Du metodai, kurie skirti racionaliosios funkcijos koeficientams surasti, t.y. Furjė simbolio aproksimacija ir atspindžio koeficiento minimizavimas, nėra universalūs. Pasirinktoje mažoje parametų

erdvėje rastas koeficientų rinkinys, tinkamas keturiems kokybiškai skirtingiems testuojamiems Šriodingerio uždaviniams, naudojant kombinuotą adaptyvų metodą, kai vertinamos skirtingų uždavinių paklaidos.

3. Pateikta trijų lygmenų lygiagretinimo schema, lyginant su klasikiniu dviejų lygmenų lygiagretinimo algoritmu, padidina lygiagretumo laipsnį, o tai leidžia naudoti didesnę skaičiavimo išteklių kiekį (nagrinėjais atvejais apie 1,5 karto) ir gauti papildomą pagreitėjimą.

PUBLIKACIJŲ SĄRAŠAS

Straipsniai leidiniuose, įrašytuose į Mokslinės informacijos instituto (ISI) sąrašą

1. Čiegis, R.; Starikovičius, V.; Margenov, S.; **Kriauzienė, R.** Scalability analysis of different parallel solvers for 3D fractional power diffusion problems. *Concurrency and computation: practice and experience*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd. ISSN 1532-0626. eISSN 1532-0634. 2019, Vol. 31, iss. 19, p. e5163. DOI: 10.1002/cpe.5163.
2. Čiegis, R.; Starikovičius, V.; Margenov, S.; **Kriauzienė, R.** Parallel solvers for fractional power diffusion problems. *Concurrency and computation: practice and experience*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd. ISSN 1532-0626. eISSN 1532-0634. 2017, Vol. 29, iss. 24, p. 1-12. DOI: 10.1002/cpe.4216.
3. Bugajev, A.; Čiegis, R.; **Kriauzienė, R.**; Leonavičienė, T.; Žilinskas, J. On the accuracy of some absorbing boundary conditions for the Schrödinger equation. *Mathematical modelling and analysis: the Baltic journal on mathematical applications, numerical analysis and differential equations*. Vilnius: Taylor & Francis, VGTU. ISSN 1392-6292. eISSN

1648-3510. 2017, Vol. 22, iss. 3, p. 408–423. DOI: 10.3846/13926292.2017.1306725.

Straipsnis konferencijų medžiagoje

1. Čiegis, R., Starikovičius, V., Margenov, S., **Kriauzienė, R.** 2018. A comparison of accuracy and efficiency of parallel solvers for fractional power diffusion problems. Parallel Processing and Applied Mathematics: 12th international conference, PPAM 2017, Lublin, Poland, September 10–13, 2017. Basel, Springer International Publishing, pp. 79-89, ISBN 9783319780238. DOI: 10.1007/978-3-319-78024-5_8.

Knygos skyrius

1. Margenov, S; Rauber, Th.; Atanassov, E.; Almeida, F.; Blanco, V.; Čiegis, R.; Cabrera, A.; Frasher, N.; Harizanov, S.; **Kriauzienė, R.**; Runger, R.; Segundo, P.S.; Starikovičius, V.; Szabo, S.; Zavalnij, B. Ultrascale Computing Systems. Applications for ultrascale systems. Institution of Engineering and Technology, 2019, p. 189-244. DOI: 10.1049/PBPC024E\h6. https://digitalibrary.theiet.org/content/books/10.1049/pbpc024e_ch6

Tezės konferencijų medžiagoje

1. **Kriauzienė, R.**; Bugajev, A; Čiegis, R. The analysis and application of a three-level parallelisation scheme // Mathematical Modelling and Analysis [MMA2019]: 24rd international conference, May 28–May 31, 2019, Talinn,: abstracts.

2. **Kriauzienė, R.**; Bugajev, A.; Čiegis, R. A three-level parallelisation algorithm for optimisation problems // Mathematical Modelling and Analysis [MMA2018]: 23rd international conference, May 29–June 1, 2018, Sigulda, Latvia: abstracts. Riga: University of Latvia, 2018. ISBN 9789934195174. p. 41.
3. **Kriauzienė, R.**; Bugajev, A.; Čiegis, R. Numerical analysis and optimization of parallel algorithms for problems with big computational costs // 3rd NESUS Winter School and PhD Symposium 2018, 22nd–25th January 2018, Zagreb, Croatia. Zagreb: Ruđer Bošković Institute. 2018, vol. 1, no. 1, p. 10.
4. **Kriauzienė, R.**; Bugajev, A.; Čiegis, R. Three level parallelisation scheme for optimisation problems involving simultaneous calculations of multiple differential equations // DAMSS 2018: 10th international workshop on „Data analysis methods for software systems“, Druskininkai, Lithuania, November 29–December 1, 2018 : [abstract book]. Vilnius: Vilnius University Press, 2018. ISBN 9786090700433. p. 48. DOI: 10.15388/DAMSS.2018.1.
5. Čiegis, R.; Starikovičius, V.; Margenov, S.; **Kriauzienė, R.** A comparison of accuracy and efficiency of parallel solvers for fractional power diffusion problems // PPAM 2017: 12th International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics, September 10–13, 2017, Lublin, Poland: book of abstracts. Czestochowa: Czestochowa University of Technology. 2017, p. 99.
6. Čiegis, R.; Starikovičius, V.; Margenov, S.; **Kriauzienė, R.** Lygiagrečiųjų skaitinių algoritmų, skirtų uždaviniams su elipsiniais operatoriais, pakeltais trupmeniniu laipsniu, analizė // Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai: 7-oji jaunųjų mokslininkų konferencija, 2017 m. vasario 9 d. Vilnius: Lietuvos mokslų akademijos leidykla. 2017, p. 56–57.
7. Starikovičius, V.; Čiegis, R.; Margenov, S.; **Kriauzienė, R.** Parallel algorithms for the numerical solution of problems with fractional powers of elliptic operators // Mathematical

Modelling and Analysis [MMA2017]: 22nd international conference, May 30–June 2, 2017, Druskininkai, Lithuania: abstracts. Vilnius: Technika, 2017. ISBN 9786094760228. eISBN 9786094760211. p. 64–65.

8. **Kriauzienė, R.**; Bugajev, A.; Čiegis, R. The new parallel multilevel tool for implementation of applied optimization algorithms // 9th International workshop on Data Analysis Methods for Software Systems (DAMSS), Druskininkai, Lithuania, November 30–December 2, 2017. Vilnius: Vilniaus University, 2017. ISBN 9789986680642. p. 28–29. DOI: 10.15388/DAMSS.2017.
9. Bugajev, A.; **Kriauzienė, R.**; Čiegis, R. On the accuracy of some absorbing boundary conditions for the Schrodinger equation // Mathematical Modelling and Analysis (MMA2016): 21st inter-national conference, June 1–4, 2016 in Tartu, Estonia: abstracts // Institute of Mathematics and Statistics of the University of Tartu, European Consortium for Mathematics in Industry, Vilnius Gediminas Technical University, Estonian Mathematical Society. Tartu: University of Tartu, 2016. ISBN 9789949918096. p. 11.
10. **Kriauzienė, R.**; Bugajev, A.; Čiegis, R.; Leonavičienė, T.; Žilinskas, J.; Jankevičiūtė, G. Optimization of efficient absorbing boundary conditions for Schrödinger equation // Data analysis methods for software systems: 8th international workshop on data analysis methods for software systems, Druskininkai, December 1–3, 2016: [abstract]. Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla, 2016. ISBN 9789986680611. p. 30–31. DOI: 10.15388/DAMSS.2016.

TRUMPOS ŽINIOS APIE DISERTANTĄ

Rima Kriauzienė Vilniaus pedagoginiame universitete (dabar VDU Švietimo akademija) įgijo matematikos bakalauro (2006 m.) ir matematikos magistro (2008 m.) laipsnius. 2015 – 2019 m. studijavo informatikos krypties doktorantūrą Vilniaus universiteto Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institute. Nuo 2012 m. dirba Vilniaus Gedimino technikos universitete, matematinio modeliavimo katedroje. Moksliniai interesai: didelės skaičiavimo apimties skaitinių algoritmų analizė, optimizavimas.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. X. Antoine, A. Arnold, C. Besse, M. Ehrhardt, and A. Schädle. A review of transparent and artificial boundary conditions technique for linear and nonlinear Schrödinger equations. *Communications in Computational Physics*, 4(4):729–796, 2008.
2. A. Arnold. Numerically absorbing boundary conditions for quantum evolution equations. *VLSI Design*, 6(1–4):313–319, 1998.
3. A. Bonito, J.P. Borthagaray, R. H. Nochetto, E. Otárola, and A. J. Salgado. Numerical methods for fractional diffusion. *Computing and Visualization in Science*, 19(5):19–46, 2018.
4. A. Bonito and J. P. Pasciak. Numerical approximation of fractional powers of elliptic operator. *Mathematics of Computation*, 84, 2015.
5. S. Harizanov, R. Lazarov, P. Marinov, S. Margenov, and Y. Vutov. Optimal solvers for linear systems with fractional powers of sparse SPD matrices. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 25(5), 2018.
6. L. D. Menza. Transparent and absorbing boundary conditions for the Schrödinger equation in a bounded domain. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 18(7–8):759–775, 1997.

7. R. Nochetto, E. Otárola, and A. Salgado. A PDE approach to fractional diffusion in general domains: a priori error analysis. *Foundations of Computational Mathematics*, 15(3):733–791, 2015.
8. R. Nochetto, E. Otárola, and A. Salgado. A PDE approach to numerical fractional diffusion. In *Proceedings of the 8th ICIAM, Beijing, China*, pages 211–236, 2015.
9. J. Szeftel. Design of absorbing boundary conditions for Schrödinger equations in \mathbb{R}^d . *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(4):1527–1551, 2004.
10. P. Vabishchevich. Numerically solving an equation for fractional powers of elliptic operators. *Journal of Computational Physics*, 282:289–302, 2015.
11. H. Wang. A parallel method for tridiagonal equations. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 7(2):170–183, 1981.

RESEARCH AREA AND RELEVANCE OF THE PROBLEM

Nowadays, we need to solve problems with big computational costs, when we can not find a solution reasonably fast using a single core on the fastest computers. Another limitation of calculations is high memory requirements, that can not be fulfilled using a single shared memory computer. Thus, parallel computations are necessary.

In this dissertation, two problems are investigated. The first problem is described by fractional powers of elliptic operators (Nochetto et al., 2015; Bonito et al., 2018). This non-local problem has an important property: the increasment of the problem size greatly increases the numerical costs of computation. Parallel computing makes the application of such non-local models more feasible and attractive. However, the efficient parallel computations require the application of appropriate parallel algorithms and a detailed theoretical analysis. We investigate and compare the parallel numerical algorithms for different state-of-the-art (Nochetto et al., 2015; Vabishchevich, 2015; Bonito et al., 2018; Harizanov et al., 2018) numerical methods proposed to solve the non-local problems described by elliptic operators of fractional powers (Nochetto et al., 2015; Bonito et al., 2018). In this research, the non-local problem $L^\beta u = f$ is transformed to some local (classical) differential problem of elliptic or pseudo-parabolic type, formulated in a space of higher dimension \mathbb{R}^{d+1} , if $\Omega \in \mathbb{R}^d$. We investigate the weak and strong scalability of the developed parallel algorithms. Two- and three-dimensional test problems are solved and the results of extensive convergence tests are presented. The main aim of this part of dissertation is to determine, which parallel algorithms can be recommended to achieve certain accuracy for the given fractional power coefficient.

The second non-local problem of this dissertation deals with the construction of absorbing boundary conditions for the one-dimension-

al Schrödinger equation (Menza, 1997; Arnold, 1998; Antoine et al., 2008; Szeftel, 2004). A simple standard boundary conditions are formulated on the boundaries of the restricted domain (e.g. the homogeneous Dirichlet boundary conditions), the solution after reaching the boundary will be reflected back into the domain and will pollute the results of subsequent simulations. Thus it is a challenge to construct appropriate local boundary conditions and to avoid the negative long memory computational effects included into the definition of the exact non-local transparent boundary conditions. We are interested in methods based on the approximation of the exact transparent boundary conditions by rational functions. Different strategies are investigated for the optimal selection of the coefficients of rational functions, including the Padé approximation, the L_2 norm approximations of the Fourier symbol, L_2 minimization of a reflection coefficient, techniques, based on minimization in two different norms for the chosen benchmark problems with known exact solutions and coupled adaptive strategy. The formulated minimization problems are considered as black box problems of global optimization. Since the objective functions of the attacked global optimization problems are computationally expensive, experiments take a considerable amount of time. Parallel computing should be applied to make experiments faster. The proposed minimisation technique showed that it is possible to find optimal values of coefficients that suit both test problems with the errors that are small enough for many modelling purposes.

We propose a general methodology for parallelisation of algorithms that address the considered problems. The optimization problems that are solved during the approximation of absorbing boundary conditions for the Schrödinger equation fits this methodology very well. The strategy of parallelisation has three-levels. Different parallelisation levels of this scheme give new parallelisation possibilities; at the same time they also and create different computational challenges. The important part of the proposed three-level scheme is based on a assump-

tion that there exists parallel alternatives to the original sequential optimization algorithm on the first level. The first level of parallelisation template becomes a part of a new parallel algorithm and the degree of the first level parallelism can be selected dynamically during the computations. The parallelisation technologies on the first level vary depending on a problem, there are no concrete methods that would work in all cases. However, we are presenting a general abstract procedure of application of this approach. On the second level, a set of computational tasks with different computational sizes is defined. These tasks can be solved independently, which means this part can be done in parallel. The third level is defined by parallel algorithms used to solve tasks from the second level. We optimise the workload distribution, for this purpose we propose a greedy workload balancing heuristic and test it on benchmark problems.

To show that these ideas work for a broad scope of applications, we discuss the possibility to apply the proposed three level parallelisation scheme to other examples.

THE OBJECT OF THE THESIS

The object of the thesis is to create and analyse efficient parallel algorithms for problems with big computational costs including optimization problems.

THE AIM AND OBJECTIVES OF THE RESEARCH

The aim of the research is to investigate efficient parallel algorithms for problems with the fractional powers of elliptic operators and optimization problems with big computational costs.

Thesis tasks are:

- Tasks for constructing parallel algorithms for problems with fractional powers of elliptic operators:
 - the review the parallel algorithms for problems with fractional powers of elliptic operators;
 - propose and analyse efficient parallel algorithms for problems with fractional powers of elliptic operators;
 - perform scalability analysis of parallel algorithms;
 - formulate conclusions and recommendations for problems with fractional powers of elliptic operators.

- Tasks for construction of absorbing boundary conditions for the one-dimensional Schrödinger equation:
 - to review of literature for constructing absorbing boundary conditions for the Schrödinger equation;
 - propose and investigate methods for finding coefficients for boundary conditions;

- perform calculations with different initial boundary conditions for the Schrödinger problem;
 - formulate conclusions and recommendations for constructing absorbing boundary conditions for the one-dimensional Schrödinger equation using proposed methods.
- Tasks for three-level parallelisation scheme:
- propose a three-level parallelisation scheme;
 - perform the detailed analysis of this scheme;
 - apply the three-level scheme for optimization problems;
 - formulate conclusions and recommendations for using all possibilities of this scheme.

RESEARCH METHODOLOGY

In the dissertation we use numerical schemes (finite volume method (FVM), the finite difference method (FDM)) from mathematical modelling theory, the methods of convergence analysis from the theory of algorithms, scalability analysis from the theory of parallel computing, multigrid, domain decomposition method, simplex method from the optimization theory.

NOVELTY OF THE THESIS

- In this dissertation, parallel algorithms for various most recent numerical methods for solving the fractional powers of elliptic operators problems were investigated and compared. Scalability and convergence analysis of parallel algorithms was performed. Recommendations to achieve a given accuracy for the provided fractional power β coefficient were the specified.

- Recommendations to construct absorbing boundary conditions for the one-dimensional Schrödinger equation using investigated methods were presented. The proposed methodology showed that it is possible to find the accurate absorbing boundary conditions for four qualitatively different problems.

- The proposed three-level parallelisation scheme comparing to the classical two level algorithm increases the amount of computational resources and lets us to achieve additional speed-up. It was shown, that the proposed methodology lets us use available resources efficiently.

PRACTICAL VALUE OF THE RESEARCH FINDINGS

- The amount of calculations for solving a non-local problem with fractional power of elliptic operators are large and even a single solution of this problem without parallel calculations is difficult. In this dissertation, scalability analysis of parallel algorithms was performed. Different methods were compared using parallel algorithms. The recommendations to achieve a given accuracy for the provided fractional power coefficient β help to select the appropriate method.

- The three-level parallelisation scheme and recommendations for usage of this scheme were proposed. This scheme can be applied to problems efficiently in the case when a big number of computational resources is available efficiently.

DEFENDED STATEMENTS

1. For the given cases of test problems with fractional powers of elliptic operators the recommended parallel algorithms are optimal in terms of computational time in order to achieve certain accuracy for the provided fractional power coefficients.

2. Using the proposed methodology there were found absorbing boundary conditions for four qualitatively different tasks in a specified seven parameters space.

3. The proposed three-level scheme improves the degree of parallelism and improves the amount of available computational resources, which gave additional speed-up.

PRESENTATION AND APPROBATION OF THE RESULTS

The results of this research were presented at five international and three national Lithuanian conferences, at the PhD Symposium 2018 of the 3rd NESUS Winter School. Three articles were published in periodical scientific publications in journals referred to ISI Web of science. One article was published in Conference Proceedings. The detailed list of publications can be found in the “List of Publications by the Author on the Topic of the Dissertation” theme.

STRUCTURE OF THE DISSERTATION AND MAIN RESULTS

The dissertation consists of Introduction, three chapters, conclusions and bibliography. The chapters are divided into sections, sections – into subsections. The scope of the dissertation is 106 pages including 10 figures and 30 tables. The list of references consists of 103 sources.

GENERAL CONCLUSIONS

- The proposed parallel algorithms for the problems of fractional powers of elliptic operators are efficient enough (in some cases, efficiency is close to 1). The highest accuracy solutions are obtained using the quadrature method (M3) with exponentially convergent quadrature formula.

- Two techniques to obtain coefficients of rational function, approximation of the Fourier symbol and minimization of the reflection coefficient, are not universal. The appropriate set of coefficients for four qualitatively different testing Schrödinger problems in the selected seven parameters space was found using a coupled adaptive technique, when evaluating errors for different tasks.

- The proposed three-level parallel scheme was compared to the classical two-level parallel algorithm. The proposed parallel scheme improves the degree of parallelism and the additional degree of parallelism, this lets to use a bigger number of available computational resources (1.5 times more in the considered cases) and lets to achieve an additional speed-up.

Rima Kriauzienė

DIDELĖS SKAIČIAVIMO APIMTIES NEKLASIKINIŲ
UŽDAVINIŲ SPRENDIMO LYGIAGRETIEJI ALGORITMAI

Daktaro disertacijos santrauka

Gamtos mokslai

Informatika (N 009)

Redaktorė Jorūnė Rimeisytė – Nekrašienė

Rima Kriauzienė

PARALLEL ALGORITHMS FOR NON-CLASSICAL PROBLEMS
WITH BIG COMPUTATIONAL COSTS

Summary of a Doctoral Dissertation

Natural Sciences

Informatics (N 009)

Editor Zuzana Šiušaitė

Vilniaus universiteto leidykla
Universiteto g. 1, LT-01513 Vilnius
El. p. info@leidykla.vu.lt,
www.leidykla.vu.lt
Tiražas 30 egz.