ALGIRDAS AMBRAZEVIČIUS

MATEMATINĖS FIZIKOS LYGTYS

Vilnius
2011

TURINYS

6 SKYRIUS

7 SKYRIUS

8 SKYRIUS

9 SKYRIUS

1 SKYRIUS

Variacinio skaičiavimo elementai

1.1. BŪTINA EKSTREMUMO EGZISTAVIMO SĄLYGA. OILERIO LYGTIS.

Iš pradžių įrodysime kelis pagalbinius teiginius.

1.1 lema. *Tegu f yra tolydi segmente $[a, b]$ funkcija ir*

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a, b)\,.$$

Tada $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a, b]$.

$\lhd$ Tarkime priešingai, kad lemos sąlygos yra patenkintos, tačiau funkcija $f(x) \not\equiv 0$. Tada egzistuoja taškas $x_0 \in [a, b] : f(x_0) \neq 0$. Tegu $f(x_0) > 0$. Kadangi funkcija f yra tolydi, tai egzistuoja taško x_0 aplinka $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tokia, kad $f(x) > 0$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Jeigu taškas x_0 yra segmento $[a, b]$ kraštinis taškas, pavyzdžiui, $x_0 = b$, tai reikia imti vienpusę šio taško aplinką. Aibėje $\mathrm{C}_0^\infty(a, b)$ imkime kokią nors funkciją η, kuri yra teigiama $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ir lygi nuliui, kai $x \in [a, b] \setminus [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Tada

$$0 = \int_a^b f(x)\eta(x)\, dx = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(x)\eta(x)\, dx > 0.$$

Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga. Taigi $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$. Atvejis, kai $f(x_0) < 0$, nagrinėjamas analogiškai. $\rhd$

Toks pats teiginys yra teisingas dvilypių, trilypių ir apskritai n-lypių integralų atveju.

1.2 lema. *Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir*

$$\int_\Omega f(x)\eta(x)\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\,.$$

Tada $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

P a s t a b a . Šios lemos įrodymas yra analogiškas 2.1 lemos įrodymui. Be to, 1.2 lema išlieka teisinga ir tuo atveju, jeigu joje sritį Ω pakeisime glodžiu n-mačiu paviršiumi S.

1.3 lema. *Tegu f yra tolydi segmente $[a, b]$ funkcija ir*

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}^1(a, b) : \eta(a) = \eta(b) = 0.$$

Tada funkcija f yra konstanta.

◁ Pažymėkime

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = C.$$

Tada

$$\int_a^b (f(x) - C)\,dx = 0. \tag{1.1}$$

Tegu

$$\eta(x) = \int_a^x (f(t) - C)\,dt.$$

Akivaizdu, kad taip apibrėžta funkcija η tenkina lemos sąlygas, o jos išvestinė $\eta'(x) = f(x) - C$. Todėl

$$\int_a^b (f(x) - C)f(x)\,dx = 0. \tag{1.2}$$

Padauginę (1.1) lygybę iš $-C$ ir pridėje prie (1.2), rezultatą užrašysime taip:

$$\int_a^b (f(x) - C)^2\,dx = 0.$$

Tačiau ši lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $f(x) = C$, $\forall x \in [a, b]$. ▷

1.4 lema. *Tegu f ir g yra tolydžios segmente $[a, b]$ funkcijos ir*

$$\int_a^b (g(x)\eta(x) + f(x)\eta'(x))\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}^1(a, b) : \eta(a) = \eta(b) = 0. \tag{1.3}$$

Tada $f \in \mathrm{C}^1(a, b)$ ir $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

◁ Tegu

$$w(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

Tada

$$\int_a^b w(x)\eta'(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\eta(x)\,dx$$

ir (1.3) tapatybė galime perrašyti taip:

$$\int_a^b (f(x) - w(x))\eta'(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)\,.$$

Funkcija $f - w$ tenkina 1.3 lemos sąlygas. Todėl ji yra konstanta, t.y.

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + C.$$

Taip apibrėžta funkcija f yra tolydi ir turi tolydžią išvestinę $f' = g$. ▷

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $F \in \mathrm{C}(\Omega \times \mathbb{R})$; l – glodi kreivė, gulinti srityje Ω ir jungianti du taškus. Tarkime, kreivę l galima apibrėžti lygtimi $y = y(x)$, $x \in [a,b]$ ir $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$. Tada $\forall x \in [a,b]$ taškas $(x, y(x)) \in \Omega$. Aibę diferencijuojamų funkcijų, tenkinančių šias sąlygas, pažymėkime raide $\mathfrak{M}$.

Suformuluosime pagrindinį variacinio skaičiavimo uždavinį.

Tegu

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx, \quad y \in \mathfrak{M}. \tag{1.4}$$

Reikia rasti funkciją $y \in \mathfrak{M}$ tokią, kad funkcionalas I įgytų ekstremalią, t.y. minimalią arba maksimalią, reikšmę.

Šiuo atveju yra kalbama apie *absoliutųjį* ekstremumą. Norint apibrėžti lokalaus ekstremumo sąvoką, reikia apibrėžti funkcijos (kreivės) aplinkos sąvoką.

Tegu $\varepsilon > 0$ yra fiksuotas skaičius ir $y \in \mathfrak{M}$. Funkcijos y nulinės eilės (arba stipriąja) ε aplinka vadinsime aibę

$$\mathfrak{M}_0 = \{\widetilde{y} \in \mathfrak{M} : \max_{x \in [a,b]} |\widetilde{y}(x) - y(x)| \le \varepsilon\}.$$

Funkcijos y pirmosios eilės (arba silpnąja) ε aplinka vadinsime aibę

$$\mathfrak{M}_1 = \{\widetilde{y} \in \mathfrak{M} : \max_{x \in [a,b]} |\widetilde{y}(x) - y(x)| + \max_{x \in [a,b]} |\widetilde{y}\,'(x) - y'(x)| \le \varepsilon\}.$$

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, kad funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia funkcionalui I *stiprųjį* (*silpnąjį*) lokalų ekstremumą, jeigu kokioje nors stipriojoje ε aplinkoje $\mathfrak{M}_0$ (silpnojoje ε aplinkoje $\mathfrak{M}_1$)

$$I(y) \le I(\widetilde{y}), \quad \forall \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_0 \quad (\forall \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_1)$$

arba

$$I(y) \ge I(\widetilde{y}), \quad \forall \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_0 \quad (\forall \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_1).$$

Jeigu kokia nors funkcija y suteikia funkcionalui I absoliutųjį ekstremumą, tai ji suteikia ir stiprųjį lokalų ekstremumą, tuo labiau ir silpnąjį lokalų ekstremumą. Todėl, jeigu kokia nors sąlyga yra būtina tam, kad funkcija y suteiktų funkcionalui I silpnąjį lokalų ekstremumą, tai ši sąlygą yra būtina ir tam, kad funkcija y suteiktų funkcionalui I stiprųjį lokalų ekstremumą, tuo labiau ir absoliutųjį ekstremumą. Taigi išvedant būtiną ekstremumo sąlygą, reikia išnagrinėti silpnojo lokalaus ekstremumo atvejį.

Toliau vietoje natūralios tolydumo sąlygos reikalausime, kad funkcija F turėtų tolydžias dalines išvestines iki antrosios eilės imtinai pagal visus savo argumentus. Atkreipsime dėmesį į tai, kad, įrodant kai kuriuos teiginius, pakanka reikalauti tik pirmųjų išvestinių tolydumo.

Tarkime, funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia (1.4) funkcionalui silpnąjį lokalų ekstremumą, o funkcija $\eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)$. Funkcija $y + \varepsilon\eta$ priklauso kokiai nors silpnai funkcijos y aplinkai, jeigu skaičiaus ε modulis yra pakankamai mažas. Todėl tokioms ε reikšmėms yra teisinga viena iš nelygybių

$$I(y) \le I(y+\varepsilon\eta) \quad \text{arba} \quad I(y) \ge I(y+\varepsilon\eta).$$

Tegu $\Phi(\varepsilon) = I(y+\varepsilon\eta)$. Pagal apibrėžimą

$$\Phi'(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{I(y+\varepsilon\eta) - I(y)}{\varepsilon} = \int_a^b \Big[F_y(x,y,y')\eta(x) + F_{y'}(x,y,y')\eta'(x) \Big]\, dx.$$

Taškas $\varepsilon = 0$ yra funkcijos Φ lokalaus ekstremumo taškas. Todėl $\Phi'(0) = 0$. Šią sąlygą galima perrašyti taip:

$$\int_a^b \Big[F_y(x,y,y')\eta(x) + F_{y'}(x,y,y')\eta'(x) \Big]\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)\,. \tag{1.5}$$

Taigi funkcija y turi tenkinti (1.5) integralinę tapatybę.

Atvirkštinis teiginys yra neteisingas. Jeigu funkcija $y \in \mathfrak{M}$ tenkina (1.5) integralinę tapatybę, tai nebūtinai ji suteikia funkcionalui silpnąjį lokalų ekstremumą. Šiuo atveju sakysime, kad funkcionalas I įgyja *stacionariąją* reikšmę, o funkcija y yra *stacionarusis* funkcionalo I taškas.

Panaudoję integravimo dalimis formulę, perrašysime (1.5) integralinę tapatybę taip:

$$\int_a^b \Big[F_{y'}(x,y,y') - \int_a^x F_y(t,y(t),y'(t))\, dt \Big] \eta'(x)\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)\,.$$

Pagal 1.3 lemą funkcija y turi tenkinti lygtį

$$F_{y'}(x,y,y') - \int_a^x F_y(t,y(t),y'(t))\, dt = C. \tag{1.6}$$

Ši lygtis yra vadinama *Oilerio* lygtimi (integraline forma).

Įrodytą teiginį galima suformuluoti taip: *jeigu funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia funkcionalui I silpnąjį lokalų ekstremumą, tai egzistuoja konstanta C tokia, kad funkcija y yra* (1.6) *integralinės lygties sprendinys*.

P a s t a b a. Išvesdami (1.6) lygtį, nesinaudojome tuo, kad funkcija F turi tolydžią išvestinę F_x. Galima įrodyti (žr. [2]), kad funkcija y tenkina taip pat integralinę lygtį

$$F(x,y,y') - y'F_{y'}(x,y,y') - \int\limits_a^x F_x(t,y(t),y'(t))\,dt = C, \quad x \in [a,b]. \tag{1.7}$$

Grįžkime dabar prie (1.5) integralinės tapatybės. Pagal 1.4 lemą koeficientas prie η' turi tolydžią kintamojo x atžvilgiu išvestinę. Todėl (1.5) integralinę tapatybę galima perrašyti taip:

$$F_{y'}(x,y,y')\eta\Big|_{x=a}^{x=b} + \int\limits_a^b \Big[F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x,y,y')\big)\Big]\eta(x)\,dx = 0,$$

$\forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)$. Kadangi $\eta(a) = \eta(b) = 0$, tai

$$\int\limits_a^b \Big[F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x,y,y')\big)\Big]\eta(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b).$$

Šioje integralinėje tapatybėje reiškinys, esantis laužtiniuose skliaustuose, tenkina 1.1 lemos sąlygas. Todėl funkcija y yra diferencialinės lygties

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x,y,y')\big) = 0 \tag{1.8}$$

sprendinys. Ši lygtis yra vadinama *Oilerio* lygtimi (diferencialine forma).

Įrodytą teiginį galima suformuluoti taip: *jeigu funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia funkcionalui I silpnąjį lokalų ekstremumą, tai ji turi tenkinti* (1.8) *lygtį*.

P a s t a b a. Funkcija $F_{y'}(x,y,y')$ turi pilnąją tolydžią kintamojo x atžvilgiu išvestinę. Tačiau jos negalima skleisti pagal žinomą sudėtinės funkcijos diferencijavimo formulę, t.y. negalima panauduoti formulės

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_{xy'} + F_{yy'} + F_{y'y'}y'',$$

nes funkcija y turi tik pirmosios eilės tolydžią išvestinę y'.

Įrodysime, kad išvestinė y'' egzistuoja ir yra tolydi, jeigu $F_{y'y'} \neq 0$. Šis teiginys kartais yra vadinamas Hilberto teorema. Funkcijos F antros eilės išvestinės $F_{xy'}$, $F_{yy'}$, $F_{y'y'}$ yra tolydžios. Todėl

$$\frac{F_{y'}(x+\Delta x, y(x+\Delta x), y'(x+\Delta x)) - F_{y'}(x,y(x),y'(x))}{\Delta x} =$$

$$= [F_{xy'}] + [F_{yy'}]\frac{\Delta y}{\Delta x} + [F_{y'y'}]\frac{\Delta y'}{\Delta x}.$$

Čia reiškiniai laužtiniuose skliaustuose yra atitinkamų išvestinių reikšmės tarpiniuose taškuose. Be to, kai $\Delta x \to 0$, reiškinys kairėje šios lygybės pusėje turi ribą $\frac{d}{dx}(F_{y'})$, o reiškiniai $[F_{xy'}]$, $[F_{yy'}]$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ir $[F_{y'y'}]$ artėja atitinkamai prie $F_{xy'}$, $F_{yy'}$, y', ir $F_{y'y'}$. Todėl, jeigu $F_{y'y'} \neq 0$, tai reiškinys $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$ turi ribą ir

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} := y'' = \frac{\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_{xy'} - F_{yy'}y'}{F_{y'y'}}.$$

Taigi, jeigu $F_{y'y'} \neq 0$, išvestinė y'' yra tolydi ir (1.8) Oilerio lygtį galima perrašyti taip:

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0. \tag{1.9}$$

Ši lygtis yra diferencialinė antros eilės lygtis, o jos bendrasis integralas turi dvi laisvąsias konstantas. Jas galima surasti iš šių sąlygų:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{1.10}$$

P a s t a b a. Jeigu $F_{y'y'} = 0$ tik kai kuriuose taškuose, tai šiuose taškuose išvestinė y'' arba neegzistuoja, arba turi trūkį.

Kelių funkcijų atvejis nagrinėjamas analogiškai. Tegu $y = (y_1, \ldots, y_n)$ yra tolydžiai diferencijuojama vektorinė funkcija, tenkinanti sąlygas

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n). \tag{1.11}$$

Tokių funkcijų aibėje nagrinėsime funkcionalą

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx. \tag{1.12}$$

Pagrindinis variacinio skaičiavimo uždavinys, taip pat stipriojo ir silpnojo lokalaus ekstremumo sąvokos šiam funkcionalui formuluojamos taip kaip ir vienos funkcijos atveju. Tiksliau galima įrodyti, kad su kiekvienu $k = 1, 2, \ldots, n$ funkcija y_k tenkina Oilerio lygtį integraline forma:

$$F_{y'_k}(x, y, y') - \int_a^x F_{y_k}(t, y(t), y'(t))\,dt = C_k \tag{1.13}$$

ir Oilerio lygtį diferencialine forma:

$$F_{y_k}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'_k}(x, y, y')\big) = 0. \tag{1.14}$$

P a s t a b a. Jeigu funkcija y suteikia (1.12) funkcionalui silpną lokalų ekstremumą ir determinantas

$$\det|F_{y'_k y'_l}(x, y, y')| \neq 0,$$

tai galima įrodyti (žr. [2]), kad $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ funkcija y_k turi antros eilės tolydžias išvestines. Šiuo atveju (1.14) Oilerio lygtys yra antros eilės lygtys ir jų bendrieji integralai turi $2n$ laisvųjų konstantų. Ieškomoji vektorinė funkcija y turi tenkinti (1.11) sąlygas. Į jas įeina lygiai $2n$ skaliarinių sąlygų. Taigi laisvųjų konstantų yra lygiai tiek pat, kiek ir sąlygų joms rasti.

Daugialypio integralo atveju nagrinėsime funkcionalą

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u, u_x)\, dx. \tag{1.15}$$

Čia: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – aprėžta sritis; $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius; F – funkcija, turinti tolydžias dalines išvestines iki antros eilės imtinai pagal visus savo argumentus; u – tolydžiai diferencijuojama srityje Ω funkcija, tenkinanti sąlygą

$$u\big|_S = \varphi(x), \quad x \in S, \quad \varphi \in \mathrm{C}(S)\,. \tag{1.16}$$

Tokių funkcijų u aibėje reikia rasti tą, kuri (1.15) funkcionalui suteikia absoliutų ekstremumą. Lokalaus (silpnojo ir stipriojo) ekstremumo sąvokos (1.15) funkcionalui apibrėžiamos visiškai taip pat kaip ir vienmačiu atveju. Reika tik apibrėžti funkcijos u silpnąją ir stipriąją aplinkas.

Tarkime, aibėje funkcijų, tenkinančių nurodytas sąlygas, egzistuoja tokios, kurioms (1.15) funkcionalas įgyja baigtinę reikšmę. Daugiamačiu atveju, skirtingai nuo vienmačio, gali nebūti nė vienos diferencijuojamos funkcijos, tenkinančios (1.16) sąlygą, kuriai (1.15) funkcionalas įgytų baigtinę reikšmę. Smulkiau apie tai žr. [2] knygoje.

Tegu funkcija u, tenkinanti (1.16) sąlygą, suteikia (1.15) funkcionalui silpną lokalų ekstremumą, o funkcija $\eta \in \mathrm{C}_0^1(\Omega)$. Be to, tegu srityje Ω funkcija u yra dukart diferencijuojama. Funkcija $u + \varepsilon\eta$ yra kokioje nors silpnoje funkcijos u aplinkoje, jeigu skaičiaus ε modulis yra pakankamai mažas. Todėl tokiems ε yra teisinga viena iš nelygybių

$$I(u) \le I(u + \varepsilon\eta), \quad I(u) \ge I(u + \varepsilon\eta).$$

Tegu $\Phi(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\eta)$. Pagal apibrėžimą

$$\Phi'(0) = \int\limits_{\Omega} \Big[F_u(x, u, u_x)\eta(x) + \sum_{k=1}^{n} F_{u_{x_k}}(x, u, u_x)\eta_{x_k}(x)\Big]\, dx.$$

Taškas $\varepsilon = 0$ yra realaus kintamojo funkcijos Φ lokalaus ekstremumo taškas. Todėl $\Phi'(0) = 0$ ir $\forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė:

$$\int\limits_{\Omega} \Big[F_u(x, u, u_x)\eta(x) + \sum_{k=1}^{n} F_{u_{x_k}}(x, u, u_x)\eta_{x_k}(x)\Big]\, dx = 0. \tag{1.17}$$

Pritaikę integravimo dalimis formulę, šią tapatybę perrašysime taip:

$$\int\limits_{\Omega} \Big[F_u(x, u, u_x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\Big(F_{u_{x_k}}(x, u, u_x)\Big)\Big]\eta(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_S \sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\cos(\mathbf{n},x_k)\eta(x)\,dS = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(\Omega)\,.$$

Funkcija $\eta(x) = 0$, kai $x \in S$. Todėl integralas paviršiumi S yra lygus nuliui ir yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_\Omega \Big[F_u(x,u,u_x) - \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx_k}\Big(F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\Big)\Big]\eta(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(\Omega)\,.$$

Reiškinys, esantis laužtiniuose skliaustuose, tenkina 1.2 lemos sąlygą. Todėl jis yra lygus nuliui, t.y.

$$F_u(x,u,u_x) - \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx_k}\Big(F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\Big) = 0. \tag{1.18}$$

Įrodytą teiginį suformuluosime taip: *jeigu dukart tolydžiai diferencijuojama funkcija u suteikia (1.15) funkcionalui bent silpną lokalų ekstremumą, tai ji turi tenkinti (1.18) Oilerio lygtį*.

Glodus Oilerio lygties sprendinys vadinamas ją atitinkančio funkcionalo *ekstremale*. Aišku, ekstremalė ne visada suteikia funkcionalui silpną lokalų ekstremumą. Nagrinėjamu atveju, kaip ir vieno realaus kintamojo funkcijai, reikalingas papildomas tyrimas.

P a s t a b a. Išvesdami (1.18) lygtį reikalavome, kad funkcija u būtų dukart diferencijuojama. Priminsime, kad vienmačiu atveju reikalavome tik pirmos išvestinės tolydumo, o antros eilės išvestinės tolydumą įrodėme. Be to, vienmačiu atveju iš pradžių išvedėme integralinę Oilerio lygtį (į kurią įeina tik pirmosios išvestinės), o po to diferencialinę (į kurią jau įeina ir antrosios išvestinės). Analogiška teorija yra galima ir daugiamačiu atveju. Tačiau ji jau nėra tokia paprasta.

1.2. BENDRESNI FUNKCIONALAI. NATŪRALIOSIOS KRAŠTINĖS SALYGOS

Įrodyti 1.1 skyrelio teiginiai išlieka teisingi ir bendresnių pavidalų funkcionalams. Dažniausiai tai funkcionalai, į kuriuos, be įprasto integralo, įeina papildomi nariai, priklausantys nuo žinomų funkcijų reikšmių integravimo rėžių taškuose arba integravimo srities kraštiniuose taškuose. Įrodysime, kad tokiems fukcionalams Oilerio lygtis išlieka ta pati, o papildomi nariai turi įtakos tik kraštinėms sąlygoms. Be to, skirtingai nuo ankščiau išnagrinėtų uždavinių, nereikalausime, kad ieškomoji funkcija tenkintų kokias nors išankstines sąlygas.

Vienmačiu atveju nagrinėsime funkcionalą

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx + \varphi(y(a)) + \psi(y(b)); \tag{1.19}$$

čia: F – funkcija, turinti tolydžias dalines išvestines pagal visus argumentus iki antros eilės imtinai, o φ ir ψ – diferencijuojamos funkcijos.

Tarkime, kad dukart diferencijuojama funkcija y suteikia (1.19) funkcionalui bent silpną lokalų ekstremumą. Laisvai pasirenkame funkciją $\eta \in \mathrm{C}^1[a, b]$. Funkcija $y+\varepsilon\eta$ priklauso kokiai nors silpnai funkcijos y aplinkai, jeigu tik skaičiaus ε modulis yra pakankamai mažas. Priminsime, kad taškuose a ir b funkcijai y nekeliame jokių išankstinių sąlygų. Todėl funkcija η taškuose a ir b gali įgyti bet kokias reikšmes.

Tegu $\Phi(\varepsilon) = I(y + \varepsilon\eta)$. Tada

$$\Phi'(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{I(y + \varepsilon\eta) - I(y)}{\varepsilon} =$$

$$= \int_a^b \left[F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)\right] dx + \varphi'(y(a))\eta(a) + \psi'(y(b))\eta(b).$$

Taškas $\varepsilon = 0$ yra lokalaus ekstremumo taškas. Todėl $\Phi'(0) = 0$. Taigi funkcija y turi tenkinti integralinę tapatybę

$$\int_a^b \left[F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)\right] dx + \varphi'(y(a))\eta(a) + \psi'(y(b))\eta(b) = 0.$$

Panaudoję integravimo dalimis formulę, ją perrašysime taip:

$$\int_a^b \Big[F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x, y, y')\big)\Big]\eta(x)\,dx+$$

$$+F_{y'}(x, y, y')\eta(x)\Big|_{x=a}^{x=b} + \varphi'(y(a))\eta(a) + \psi'(y(b))\eta(b) = 0. \tag{1.20}$$

Imdami $\eta \in C_0^1(a,b)$, gausime, kad funcija y turi tenkinti Oilerio lygtį:

$$F_y - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big) = 0. \tag{1.21}$$

Grįžkime dabar prie (1.20) integralinės tapatybės. Kadangi funkcija y tenkina (1.21) Oilerio lygtį, tai (1.20) tapatybę galima perrašyti taip:

$$F_{y'}(x,y,y')\eta(x)\Big|_{x=a}^{x=b} + \varphi'(y(a))\eta(a) + \psi'(y(b))\eta(b) = 0.$$

Priminsime, kad funkcija η taškuose a ir b gali įgyti bet kokias reikšmes. Todėl paskutinėje tapatybėje koeficientai prie $\eta(a)$ ir prie $\eta(b)$ turi būti lygus nuliui, t.y. taškuose a ir b turi būti patenkintos tokios sąlygos:

$$F_{y'}\big|_{x=a} = \varphi'(y(a)), \tag{1.22}$$

$$F_{y'}\big|_{x=b} = -\psi'(y(b)). \tag{1.23}$$

Šios kraštinės sąlygos yra vadinamos *natūraliosiomis* kraštinėmis sąlygomis.

Daugiamačiu atveju nagrinėsime funkcionalą

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} F(x,u,u_x)\,dx + \int\limits_{S} \varphi(x,u)\,dS; \tag{1.24}$$

čia: Ω yra aprėžta sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, F ir φ – pakankamai glodžios funkcijos.

Tarkime, dukart diferencijuojama srityje Ω funkcija u suteikia (1.24) funkcionalui bent silpną lokalų ekstremumą. Laisvai pasirenkame funkciją $\eta \in C^1(\overline{\Omega})$ ir skaičių ε, kurio modulis yra pakankamai mažas. Tada funkcija $u + \varepsilon\eta$ priklauso kokiai nors silpnai funkcijos u aplinkai, o realaus kintamojo funkcija $\Phi(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\eta)$ taške $\varepsilon = 0$ įgyja ekstremalią reikšmę. Todėl jos išvestinė taške $\varepsilon = 0$ yra lygi nuliui. Šią sąlygą galima užrašyti taip:

$$\int\limits_{\Omega} \Big[F_u(x,u,u_x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\Big(F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\Big)\Big]\eta(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{S} \Big[\sum_{k=1}^{n} F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\cos(\mathbf{n},x_k)\eta(x) + \varphi_u(x,u)\Big]\eta(x)\,dS = 0, \tag{1.25}$$

$\forall\eta \in C^1(\overline{\Omega})$. Imkime $\eta \in C_0^1(\Omega)$. Tada integralas paviršiumi S paskutinėje tapatybėje bus lygus nuliui. Atmetę jį, gausime tapatybę

$$\int\limits_{\Omega} \Big[F_u(x,u,u_x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\Big(F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\Big)\Big]\eta(x)\,dx = 0.$$

Pagal 1.2 lemą ši tapatybė yra galima tik tuo atveju, kai funkcija u tenkina Oilerio lygtį:

$$F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\left(F_{u_{x_k}}\right) = 0. \tag{1.26}$$

Grįžkime dabar prie (1.25) integralinės tapatybės. Kadangi funkcija u tenkina (1.26) lygtį, tai (1.25) tapatybėje integralas sritimi Ω lygus nuliui ir yra teisinga tapatybė

$$\int_S \Big[\sum_{k=1}^{n} F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\cos(\mathbf{n},x_k) + \varphi_u(x,u)\Big]\eta(x)\,dS = 0, \quad \forall\eta \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})\,.$$

Kadangi funkcija η paviršiaus S taškuose gali įgyti bet kokias reikšmes, tai ši tapatybė yra galima tik tuo atveju, kai reiškinys laužtiniuose skliaustuose yra lygus nuliui, t.y. paviršiaus S taškuose funkcija u turi tenkinti sąlygą

$$\sum_{k=1}^{n} F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\cos(\mathbf{n},x_k) + \varphi_u(x,u) = 0, \quad x \in S.$$

Ši kraštinė sąlyga taip pat yra vadinama *natūraliąja* kraštine sąlyga.

1.3. IZOPERIMETRINIS UŽDAVINYS

Kokioje nors uždarų, gulinčių plokštumoje, tam tikro ilgio kreivių aibėje ieškosime tokios, kuri apriboja didžiausio ploto figūrą. Toks uždavinys vadinamas izoperimetriniu uždaviniu (siaurąja prasme). Jis susiveda į uždavinį, kai reikia rasti funkciją, kuri vienam funkcionalui suteikia ekstremumą, o kitas funkcionalas įgyja konkrečią reikšmę. Bendru atveju izoperimetrinį uždavinį galima suformuluoti taip: *rasti funkciją, kuri vienam funkcionalui suteikia ekstremumą, o kiti funkcionalai įgyja nurodytas reikšmes.*

Nagrinėsime paprasčiausią izoperimetrinį uždavinį. Tegu $\mathfrak{M}$ yra aibė diferencijuojamų segmente $[a,b]$ funkcijų, tenkinančių kraštines sąlygas

$$y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta, \tag{1.27}$$

ir tokių, kad funkcionalas

$$J(y)=\int_a^b \Psi(x,y,y')\,dx=d; \tag{1.28}$$

čia d – tam tikras skaičius. Aibėje $\mathfrak{M}$ reikia rasti funkciją, kuriai funkcionalas

$$I(y)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx \tag{1.29}$$

įgyja ekstremalią reikšmę. Nagrinėdami šį uždavinį reikalausime, kad funkcijos F ir Ψ turėtų tolydžias dalines išvestines pagal visus argumentus iki antros eilės imtinai, o skaičių d parinksime taip, kad aibė $\mathfrak{M}$ būtų netuščia. Taikant Lagranžo daugiklių metodą, izoperimetrinis uždavinys susiveda į jau išnagrinėtą variacinio skaičiavimo uždavinį be papildomų funkcinių sąlygų. Įrodysime paprasčiausią Oilerio teoremos variantą.

1.1 teorema (Oilerio). *Tarkime, funkcija $y\in\mathfrak{M}$ suteikia (1.29) funkcionalui ekstremumą ir nėra funkcionalo J ekstremalė. Tada egzistuoja skaičius λ toks, kad funkcija y yra funkcionalo*

$$H(y)=I(y)+\lambda J(y) \tag{1.30}$$

ekstremalė.

◁ Tarkime, kad funkcija $y\in\mathfrak{M}$ suteikia (1.29) funkcionalui ekstremumą ir nėra funkcionalo J ekstremalė. Laisvai pasirenkame funkcijas $\eta_1,\eta_2\in C_0^\infty(a,b)$. Funkcija $y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2$ priklauso kokiai nors silpnai funkcijos y aplinkai, jeigu tik skaičių ε_1 ir ε_2 moduliai yra pakankamai maži. Apibrėžkime dviejų realių kintamųjų funkciją $\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=J(y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2)$. Jos pirmos eilės išvestinės

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_i}\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=\int_a^b\Big[\Psi_y-\frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_i\,dx,\quad i=1,2.$$

Pagal teoremos sąlygą funkcija y nėra funkcionalo J ekstremalė. Todėl reiškinys

$$\Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]$$

tapačiai nelygus nuliui ir funkciją η_2 galima parinkti taip, kad

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2}\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \int_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_2\,dx \neq 0.$$

Kadangi $J(y) = d$, tai taškas $(0,0)$ yra lygties $\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d$ sprendinys. Remiantis neišreikštinių funkcijų teorema, lygtis $\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d$ apibrėžia ε_2 kaip kintamojo ε_1 funkciją, jeigu tik skaičiaus ε_1 modulis yra pakankamai mažas. Be to, išvestinė

$$\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}\Big|_{\varepsilon_1=0} = -\frac{\Phi_{\varepsilon_1}}{\Phi_{\varepsilon_2}}\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = -\frac{\int_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_1\,dx}{\int_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_2\,dx}.$$

Taškas $\varepsilon_1 = 0$ yra funkcijos $\widetilde{\Phi}(\varepsilon_1) = I(y + \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2(\varepsilon_1)\eta_2)$ lokalaus ekstremumo taškas. Todėl

$$\widetilde{\Phi}'(\varepsilon_1)\big|_{\varepsilon_1=0} = 0.$$

Šią sąlygą galima užrašyti taip:

$$\int_a^b \Big[F_y - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big)\Big]\eta_1\,dx + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}\Big|_{\varepsilon_1=0} \cdot \int_a^b \Big[F_y - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big)\Big]\eta_2\,dx =$$

$$= \int_a^b \Big[F_y - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big)\Big]\eta_1\,dx + \lambda\int_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_1\,dx = 0; \tag{1.31}$$

čia

$$\lambda = -\frac{\int_a^b \Big[F_y - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big)\Big]\eta_2\,dx}{\int_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_2\,dx}.$$

Tegu $F + \lambda\Psi = H$. Tada (1.31) tapatybę galima perrašyti taip:

$$\int_a^b \Big[H_y - \frac{d}{dx}\big(H_{y'}\big)\Big]\eta_1\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a,b)\,.$$

Pasinaudoję 2.1 lema, gausime, kad funkcija y turi tenkinti Oilerio lygtį:

$$H_y - \frac{d}{dx}\big(H_{y'}\big) = 0. \tag{1.32}$$

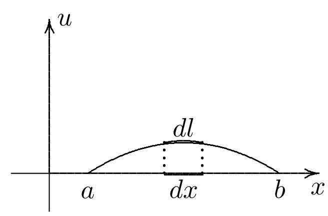
Taigi y yra funkcionalo H ekstremalė.

2 SKYRIUS

Matematiniai fizikinių procesų modeliai

2.1. STYGOS IR MEMBRANOS SVYRAVIMŲ LYGTIS

Kietą kūną, kurio ilgis daug didesnis už kitus jo matmenis, vadinsime styga. Tarkime, įtempta baigtinė styga yra įtvirtinta galuose ir pusiausvyros būsenoje stygos taškai yra tiesėje. Pažymėsime šitą tiesę x ašimi, o taškus, kuriuose styga įtvirtinta – taškais a ir b. Kokiu nors būdu išveskime stygą iš pusiausvyros. Nagrinėsime tik tokius svyravimus, kai stygos taškai juda vienoje plokštumoje statmenai x ašiai. Taško x nuokrypį nuo pusiausvyros padėties pažymėsime $u(x,t)$. Tada stygos svyravimus aprašo viena skaliarinė funkcija $u = u(x,t)$. Be to, nagrinėsime tik mažus stygos svyravimus ir jėgas, kurios priešinasi stygos išlenkimui, laikysime mažomis, lyginant su jos įtempimo jėgomis.



2.1 pav.

Tegu $K(x)$ – stygos, esančios pusiausvyros būsenoje, tamprumo koeficientas taške x, dl – deformuotos stygos elemento ilgis (žr. 2.1 pav.). Darbas, reikalingas elemento dx deformacijai, yra proporcingas stygos ilgio pokyčiui:

$$K(x)(dl - dx) = K(x)(\sqrt{1+u_x^2} - 1)\,dx.$$

Kai svyravimai maži, šaknies $\sqrt{1+u_x^2}$ skleidinyje u_x laipsniais galima atmesti aukštesniuosius laipsnius. Todėl elemento dx potencinė energija

$$K(x)(dl - dx) \approx K(x)(1 + \frac{1}{2}u_x^2 - 1)\,dx = \frac{1}{2}K(x)u_x^2\,dx.$$

Visos stygos potencinę energiją galima išreikšti integralu

$$\int\limits_a^b \frac{1}{2}K(x)u_x^2\,dx.$$

Jeigu stygą veikia išorinės jėgos, kurių linijinis tankis $f(x,t)$, tai šitų jėgų atliekamas darbas išreiškiamas integralu

$$-\int_a^b f(x,t)u\,dx.$$

Taigi stygos suminė potencinė energija

$$P = \int_a^b \left[\frac{1}{2}K(x)u_x^2 - f(x,t)u\right] dx.$$

Tegu $\rho(x)$ – linijinis stygos tankis taške x. Tada elemento dx kinetinė energija

$$dT = \frac{1}{2}\rho(x)u_t^2\,dx.$$

Visos stygos kinetinė energija

$$T = \int_a^b \frac{1}{2}\rho(x)u_t^2\,dx.$$

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome funkcionalą

$$I(u) = \int_{t_1}^{t_2} (T-P)dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \left[\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2 - \frac{1}{2}K(x)u_x^2 + f(x,t)u\right] dxdt.$$

Tarkime, funkcija u aprašo tikrąjį stygos svyravimą, η – bet kokia diferencijuojama finiti stačiakampyje $\Omega = (t_1,t_2)\times(a,b)$ funkcija, o ε – pakankamai mažas teigiamas skaičius. Funkcija $u+\varepsilon\eta$ aprašo galimą stygos svyravimą.

Funkcija u yra funkcionalo I stacionarioji reikšmė. Todėl

$$\delta I(u,\eta) = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b [\rho(x)u_t\eta_t - K(x)u_x\eta_x + f(x,t)\eta]\,dxdt = 0. \tag{2.1}$$

Pritaikę integravimo dalimis formulę ir pasinauduoję tuo, kad funkcija η stačiakampyje Q yra finiti, perrašysime (2.1) sąlygą taip:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \big[-(\rho(x)u_t)_t + (K(x)u_x)_x + f(x,t)\big]\eta\,dxdt = 0.$$

šioje integralinėje tapatybėje η yra laisvai pasirinkta diferencijuojama finiti funkcija. Todėl reiškinys kvadratiniuose skliaustuose lygus nuliui, t.y. funkcija u tenkino Oilerio lygtį:

$$\rho(x)u_{tt} - (K(x)u_x)_x = f(x,t). \tag{2.2}$$

Iš visų (2.2) lygties sprendinių reikia išrinkti tą, kuris tenkina visas nagrinėjamo uždavinio sąlygas. Išvesdami stygą iš pusiausvyros padėties, suteikėme jai pradinį nuokrypį ir pradinį greitį. Vadinasi, pradiniu laiko momentu (tarkime, momentu $t = 0$) funkcija u turi tenkinti pradines sąlygas:

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ \forall x \in [a, b]. \tag{2.3}$$

Be to, taškuose a ir b styga yra įtvirtinta. Todėl bet kuriuo laiko momentu $t \geq 0$ turi būti patenkintos kraštinės sąlygos:

$$u|_{x=a} = 0,\ u|_{x=b} = 0. \tag{2.4}$$

Tokiu būdu įtvirtintos taškuose a ir b stygos svyravimo uždavinys yra mišrusis (2.2)–(2.4) uždavinys.

Jeigu styga yra homogeninė ir tolygiai įtempta, t.y. funkcijos ρ ir K yra pastovios, tai (2.2) lygtį galima perrašyti taip:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x, t); \tag{2.5}$$

čia: $a^2 = K/\rho, F = f/\rho$. Ši lygtis yra vadinama *vienmate bangavimo* lygtimi.

P a s t a b a. Esant kitokioms kraštinėms sąlygoms, stygos svyravimas aprašomas ta pačia Oilerio lygtimi (tai išplaukia iš jos išvedimo). Tos pačios išlieka ir pradinės sąlygos. Keičiasi tik kraštinės sąlygos. Pavyzdžiui, jeigu taškas $x = a$ juda pagal tam tikrą dėsnį arba jį veikia tam tikra jėga, arba jis yra elastingai įtvirtintas, tai kraštinę sąlygą šiame taške reikia pakeisti atitinkamai viena iš sąlygų:

$$u|_{x=a} = \mu(t),\ K(x)u_x|_{x=a} = \mu(t),\ K(x)u_x + \sigma(x, t)u|_{x=a} = 0.$$

Kietą kūną, kurio storis kur kas mažesnis už visus kitus jo matmenis, vadinsime membrana. Tarkime, pusiausvyros būsenoje membrana užima sritį $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, apribotą kontūru l, ir kontūro l taškuose yra įtvirtinta. Tegu $u(x, t)$ taško $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ nuokrypis nuo pusiausvyros padėties laiko momentu t. Tada membranos svyravimą galima aprašyti viena skalerine funkcija $u = u(x, t)$. Membranos ir stygos svyravimo lygties išvedimas yra analogiškas. Todėl, išvesdami membranos svyravimo lygtį, praleisime kai kurias pasikartojančias detales.

Potencinę ir kinetinę membranos energijas galima išreikšti integralais:

$$P = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2} K(x)(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)\, dx - \int\limits_{\Omega} f(x, t)u\, dx, \quad T = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}\rho(x)u_t^2\, dx;$$

čia: $K(x)$ – membranos, esančios pusiausvyros būsenoje, tamprumo koeficientas, $f(x, t)$ – paviršinis išorinių jėgų tankis, ρ – paviršinis membranos tankis.

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome funkcionalą

$$I(u) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2 - \frac{1}{2}K(x)(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) + f(x, t)u \right] dxdt.$$

Jeigu funkcija u aprašo tikrąjį membranos svyravimą, tai su bet kokia diferencijuojama finičia ritinyje $Q = \Omega \times (t_1, t_2)$ funkcija η, funkcionalo I pirmoji variacija

$$\delta I(u,\eta) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [\rho(x) u_t \eta_t - K(x)(u_{x_1}\eta_{x_1} + u_{x_2}\eta_{x_2}) + f(x,t)\eta] \, dxdt = 0.$$

Iš šios integralinės tapatybės lengvai gauname, kad funkcija u turi tenkinti Oilerio lygtį

$$\rho(x) u_{tt} - \sum_{i=1}^{2} (K(x) u_{x_i})_{x_i} = f(x,t). \tag{2.6}$$

Be to, funkcija u turi tenkinti pradines

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \phi(x) \tag{2.7}$$

ir kraštinę

$$u|_l = 0 \tag{2.8}$$

sąlygas.

Taigi įtvirtintos kontūre l membranos svyravimo uždavinys yra mišrusis (2.6)–(2.8) uždavinys.

Tuo atveju, kai membrana yra homogeninė ir jos įtempimas visomis kryptimis yra vienodas, t.y. kai funkcijos K ir ρ yra pastovios, (2.6) lygtį galima perrašyti taip:

$$u_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{2} u_{x_i x_i} = F(x,t); \tag{2.9}$$

čia: $a^2 = K/\rho$, $F = f/\rho$. Ši lygtis yra vadinama *dvimate bangavimo* lygtimi.

P a s t a b a. Jei membrana nėra įtvirtinta, tai Oilerio lygtis ir pradinės sąlygos išlieka tos pačios. Keičiasi tik kraštinė sąlyga. Pavyzdžiui, jeigu membranos kontūras svyruoja pagal tam tikrą dėsnį arba jį veikia tam tikra jėga, arba jis yra elastingai įtvirtintas, tai vietoje (2.8) kraštinės sąlygos reikia imti atitinkamai vieną iš sąlygų:

$$u\Big|_l = \mu(x,t), \;\; K(x)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_l = \mu(x,t), \;\; K(x)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_l + \sigma(x,t) u\Big|_l = 0;$$

čia: μ ir σ žinomos funkcijos, $\partial u/\partial \mathbf{n}$ – funkcijos u išvestinė normalės kryptimi. Savaime aišku, kad galimos ir kitos kraštinės sąlygos, taip pat ir netiesinės.

Tarkime, kontūro l taškuose nėra jokių išankstinių sąlygų. Be to, tegu membraną veikianti jėga f nepriklauso nuo laiko t. Veikiant šiai jėgai, membrana išsilenks. Tegu funkcija $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ aprašo deformuotos membranos paviršių. Šiuo atveju membranos potencinė energija

$$P(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} K(x)(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) - f(x) u \right] dx$$

įgyja mažiausią reikšmę.

Tegu $\eta \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$, ε – mažas teigiamas skaičius. Tada funkcija $u \pm \varepsilon\eta$ apibrėžia galimą membranos deformaciją ir

$$P(u) \leq P(u + \varepsilon\eta).$$

Todėl funkcionalo P pirmoji variacija

$$\delta P(u,\eta) = \int\limits_{\Omega} [K(x)(u_{x_1}\eta_{x_1} + u_{x_2}\eta_{x_2}) - f(x)\eta]\, dx = 0.$$

Panaudoję integravimo dalimis formulę, šią integralinę tapatybę perrašysime taip:

$$\int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i=1}^{2}(K(x)u_{x_i})_{x_i} + f(x)\Big]\eta\, dx - \int\limits_{l} K(x)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\eta\, dl = 0. \tag{2.10}$$

Tarkime, funkcija η lygi nuliui kontūro l taškuose. Tada

$$\int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i=1}^{2}(K(x)u_{x_i})_{x_i} + f(x)\Big]\eta\, dx = 0$$

ir funkcija u turi tenkinti Oilerio lygtį

$$\sum_{i=1}^{2}(K(x)u_{x_i})_{x_i} + f(x) = 0,\ x \in \Omega. \tag{2.11}$$

Grįžkime prie (2.10) tapatybės. Tegu η yra bet kokia diferencijuojama funkcija. Kadangi funkcija u tenkina (2.11) Oilerio lygtį, tai (2.10) tapatybę galime perrašyti taip:

$$\int\limits_{l} K(x)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\eta\, dl = 0.$$

Kontūro l taškuose funkcija η gali įgyti bet kokias reikšmes. Todėl reiškinys $K(x)\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ yra lygus nuliui, t.y. funkcija u tenkina kraštinę sąlygą

$$K(x)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0,\ x \in l. \tag{2.12}$$

Taigi membranos pusiausvyros uždavinys yra kraštinis (2.11), (2.12) uždavinys.

Kai funkcija K yra pastovi, (2.11) lygtis yra *Puasono* lygtis

$$\Delta u = -F,\ F = f/K,$$

kuri, kai $f = 0$, virsta *Laplaso* lygtimi

$$\Delta u = 0;$$

čia $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{2} u_{x_i x_i}$.

P a s t a b a. Nagrinėjant membranos pusiausvyros uždavinį, galimos ir kitos kraštinės sąlygos (žr. stygos ir membranos svyravimų lygtis).

2.2. ŠILUMOS LAIDUMO KIETAME KŪNE UŽDAVINYS

Tarkime: erdvėje $\mathbb{R}^3$ kietas kūnas užima sritį Ω; žinoma jo temperatūra pradiniu laiko momentu $t = 0$ ir paviršiaus $S = \partial\Omega$ temperatūra bet kuriuo laiko momentu $t \geq 0$. Ištirsime temperatūrą kūno viduje. Kūno temperatūra taške $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ laiko momentu t pažymėsime $u(x, t)$. Tegu $\Omega' \subset \Omega$ – bet kokia vidinė sritis su glodžiu paviršiumi S'. Pagal Furjė dėsnį šilumos kiekis, pratekantis per paviršių S' laikotarpiu $t_2 - t_1$, išreiškiamas integralu

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{S'} k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS' \, dt;$$

čia: k – šilumos laidumo koeficientas, $\partial u / \partial \mathbf{n}$ – funkcijos u išvestinė normalės kryptimi.

Kai yra išoriniai šilumos šaltiniai su tankiu $f(x, t)$, tai šilumos kiekis, patenkantis iš jų į sritį Ω' laikotarpiu $t_2 - t_1$, lygus

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} f(x, t) \, dx dt.$$

Antra vertus, tas pats šilumos kiekio pokytis srityje Ω' laikotarpiu $t_2 - t_1$ lygus

$$\int_{\Omega'} c(x)\rho(x)u(x, t_2) \, dx - \int_{\Omega'} c(x)\rho(x)u(x, t_1) \, dx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} c(x)\rho(x)u_t(x, t) \, dx dt;$$

čia $\rho(x)$ ir $c(x)$ – atitinkamai kūno tankis ir šilumos talpumas (specifinė šiluma) taške x. Išskirtoje srityje Ω' sudarome *šilumos balanso* lygtį:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{S'} k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS' \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} f(x, t) \, dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} c(x)\rho(x)u_t(x, t) \, dx dt.$$

Pagal Gauso–Ostrogradskio formulę

$$\int_{S'} k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS' = \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dx_i} \big(k(x, t, u) u_{x_i} \big) \, dx.$$

Todėl šilumos balanso lygtį galima perrašyti taip:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} \Big[\sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dx_i} \big(k(x, t, u) u_{x_i} \big) - c(x)\rho(x)u_t + f(x, t) \Big] \, dx dt = 0. \tag{2.13}$$

Kadangi integravimo rėžiai t_1, t_2 ir sritis Ω' pasirinkti laisvai, tai reiškinys kvadratiniuose skliaustuose yra lygus nuliui, t.y. funkcija u tenkina lygtį

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dx_i} \big(k(x, t, u) u_{x_i} \big) - c(x)\rho(x)u_t + f(x, t) = 0, \ \forall x \in \Omega, t > 0. \tag{2.14}$$

Iš visų šios lygties sprendinių reikia išrinkti tą, kuris tenkintų pradines ir kraštines sąlygas. Nagrinėjamu atveju yra žinoma kūno temperatūra pradiniu laiko momentu ir kūno paviršiaus temperatūra bet kuriuo laiko momentu. Todėl funkcija u turi tenkinti pradinę

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2.15}$$

ir kraštinę

$$u\big|_{S} = \mu_1(x,t) \tag{2.16}$$

sąlygas. Taigi šilumos pasiskirstymo kietame kūne $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uždavinys yra mišrusis (2.14)–(2.16) uždavinys.

P a s t a b o s:

1. Paviršiuje S galimi ir kiti šilumos režimai. Pavyzdžiui, jeigu kiekvienu laiko momentu t žinome šilumos kiekį $\mu_2(x,t)$, kuris patenka į sritį Ω per paviršių S, arba žinome supančios sritį Ω erdvės temperatūrą $\mu_3(x,t)$, tai vietoje (2.16) kraštinės sąlygos reikia imti atitinkamai vieną iš sąlygų:

   $$k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \mu_2, \;\; k(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S + \sigma(x,t,u)(u-\mu_3)\Big|_S = 0;$$

   čia σ – šilumos mainų koeficientas.

2. Jeigu $\Omega = \mathbb{R}^n$, tai (2.16) sąlyga neturi prasmės ir nagrinėjamas uždavinys susiveda į (2.14)–(2.15) Koši uždavinį.

3. Tuo atveju, kai nagrinėjamasis kūnas yra homogeninis, t.y. funkcijos k, ρ ir c yra pastovios, (2.14) lygtis yra *šilumos laidumo* lygtis

   $$u_t - a^2\Delta u = F(x,t); \tag{2.17}$$

   čia: $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}, F = \dfrac{f}{c\rho}, \Delta u = \sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_i x_i}$.

Jeigu procesas stacionarus, t.y. temperatūros pasiskirstymas yra nusistovėjęs ir laikui bėgant nekinta, tai funkcijos u, f ir k nepriklauso nuo kintamojo t. Todėl $u_t = 0$ ir (2.14) lygtį galima perrašyti taip:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dx_i}\big(k(x,u)u_{x_i}\big) + f(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Kai funkcija k yra pastovi, ši lygtis yra Puasono lygtis

$$-\Delta u = F, \quad F = f/k,$$

o kai ir $f = 0$, – Laplaso lygtis

$$\Delta u = 0.$$

Aišku, kad nagrinėjant stacionarų procesą, pradinė sąlyga nereikalinga, o kraštinė sąlyga išlieka. Praktiniuose uždaviniuose dažniausiai naudojamos tokios kraštinės sąlygos:

$$u\Big|_S = \mu(x), \ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \mu(x), \ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S + \sigma(x)u\Big|_S = \mu(x).$$

Dvimačiu ir vienmačiu atvejais gaunamos analogiškos lygtys. Pavyzdžiui, jeigu nagrinėjamasis kūnas yra plona plokštelė arba plonas strypas, tai gausime dvimatę arba vienmatę šilumos laidumo lygtį

$$u_t - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = F, \quad u_t - a^2 u_{x_1x_1} = F.$$

2.3. IDEALIOJO SKYSČIO HIDRODINAMIKOS LYGTYS

Nagrinėsime judantį skystį[1], kuriame šilumos laidumo ir klampumo procesai yra neesminiai, t.y. manysime, kad nėra šilumos perdavimo ir trinties tarp įvairių skysčio dalelių, taip pat tarp skysčio dalelių ir įvairių saveikaujančių su jomis išorinių kūnų. Toks skysčio judėjimas vadinamas idealiuoju.

Tegu $\mathbf{v}(x,t)$ yra skysčio greitis, $p(x,t)$ – slėgis, o $\rho(x,t)$ – tankis taške $x = (x_1, x_2, x_3)$ laiko momentu t. Pabrėšime, kad funkcijos $\mathbf{v}, p$ ir ρ priklauso nuo konkrečių erdvės taškų, o ne nuo konkrečių judančių erdvėje skysčio dalelių.

Laisvai pasirenkame sritį Ω su glodžiu paviršiumi S. Skysčio masė srityje Ω laiko momentu t išreiškiama integralu

$$\int\limits_\Omega \rho(x,t)\,dx.$$

Masės pokytis laikotarpiu $t_2 - t_1$ lygus

$$\int\limits_\Omega \rho(x,t_2)\,dx - \int\limits_\Omega \rho(x,t_1)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}\,dxdt.$$

Antra vertus, skysčio masė, pratekanti per paviršių S nuo išorinių šaltinių laikotarpiu $t_2 - t_1$, yra lygi

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_S \rho v_{\mathbf{n}}\,dSdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega f\,dxdt;$$

čia: $v_{\mathbf{n}} = (\mathbf{v},\mathbf{n}) = \sum\limits_{i=1}^{3} v_i n_i,\ v_i$ – vektoriaus $\mathbf{v}$ projekcija į koordinačių ašį $x_i,\ i = 1,2,3;\ \ f(x,t)$ – vidinių šaltinių intensyvumas. Pagal masės tvermės dėsnį

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}\,dxdt = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_S \rho v_{\mathbf{n}}\,dSdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega f\,dxdt. \tag{2.18}$$

Remiantis Gauso–Ostrogradskio formule,

$$\int\limits_S \rho v_{\mathbf{n}}\,dS = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dx_i}\big(\rho v_i\big)\,dx = \int\limits_\Omega \mathrm{div}\rho\mathbf{v}\,dx;$$

čia

$$\mathrm{div}\mathbf{v} \equiv \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

[1] Šiame skyrelyje rašydami žodį "skystis" turėsime omenyje ir skystį, ir dujas.

Todėl (2.18) lygybę galime perrašyti taip:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\mathbf{v}\right)dxdt=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega}f\,dxdt.$$

Kadangi sritis Ω ir integravimo rėžiai t_1, t_2 pasirinkti laisvai, tai pointegraliniai reiškiniai abiejose lygybės pusėse yra lygūs, t.y.

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\mathbf{v}=f. \tag{2.19}$$

Ši lygtis yra vadinama tolydumo lygtimi. Kai skystis yra nesuspaudžiamas, t.y. tankis ρ yra pastovus, (2.19) lygtį galima perrašyti taip:

$$\mathrm{div}\mathbf{v}=F, \quad F=f/\rho. \tag{2.20}$$

Tuo atveju, kai skysčio srautas yra potencialus, t.y.

$$\mathbf{v}=-\mathrm{grad}\,u, \quad \mathrm{grad}\,u=(u_{x_1},u_{x_2},u_{x_3}),$$

u – skaliarinė funkcija, (2.20) lygtis yra Puasono lygtis

$$\Delta u=-F;$$

čia $\Delta u=\sum\limits_{i=1}^{3}u_{x_ix_i}$.

Išvesime idealiojo skysčio judėjimo lygtis. Pagal prielaidą iš visų galimų vidinių jėgų, veikiančių skysčio daleles srityje Ω, veikia tik slėgio jėgos. Jos kiekvieną paviršiaus S elementą dS veikia vidinės normalės kryptimi. Vadinasi, slėgio jėga, veikianti elementą dS, lygi $-p\mathbf{n}\,dS$. Šių jėgų atstojamoji

$$-\int_S p\mathbf{n}\,dS=-\int_{\Omega}\mathrm{grad}\,p\,dx.$$

Jeigu kiekvieną skysčio masės elementą veikia išorinė jėga $F(x,t)$ (pavyzdžiui, sunkio jėga), tai šitų jėgų atstojamoji lygi

$$\int_{\Omega}\rho F\,dx.$$

Inercinių jėgų, veikiančių sritį Ω, atstojamoji lygi

$$-\int_{\Omega}\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dx;$$

čia $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$ – konkrečios skysčio dalelės, judančios erdvėje, pagreitis. Atkreipsime dėmesį į tai, kad dalinė išvestinė $\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$ apibrėžia greičio pokytį fiksuotame erdvės taške.

Pagal Dalambero principą skysčio dalelę veikiančių jėgų suma lygi nuliui. Todėl

$$\int\limits_{\Omega} \left(\rho F - \operatorname{grad} p - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) dx = 0. \tag{2.21}$$

Kadangi sritis Ω pasirinkta laisvai, tai reiškinys skliaustuose yra lygus nuliui, t.y.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + F. \tag{2.22}$$

Gauta lygtis yra idealiojo skysčio judėjimo lygtis. Ją 1755 m. pirmą kartą išvedė L. Oileris.

Pilnoji funkcijos $\mathbf{v}$ išvestinė

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad} \mathbf{v}).$$

Todėl Oilerio lygtį galima perrašyti dar ir taip:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad} \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + F. \tag{2.23}$$

Jeigu idealusis skystis yra nesuspaudžiamas, tai jo tankis ρ yra pastovus dydis, kurį galima laikyti žinomu. Šiuo atveju (2.19) tolydumo ir (2.22) Oilerio lygtys sudaro idealiojo skysčio hidrodinamikos lygčių sistemą. Tiksliau, turime keturias lygtis ir keturias nežinomas funkcijas v_1, v_2, v_3 ir p.

Jeigu skystis yra suspaudžiamas, tai turime penkias nežinomas funkcijas v_1, v_2, v_3, p, ρ ir keturias lygtis. Tam, kad hidrodinamikos lygčių sistema būtų uždara, reikia prie (2.19) tolydumo lygties ir (2.22) Oilerio lygties prijungti skysčio būsenos lygtį

$$p = \Phi(\rho), \tag{2.24}$$

kuri apibrėžia ryšį tarp tankio ir slėgio. Į ją gali įeiti ir kiti fizikiniai dydžiai, pavyzdžiui, temperatūra. Skirtingiems skysčiams jų būsenos lygtis nustatoma eksperimento būdu.

Prie hidrodinamikos lygčių sistemos reikia dar prijungti kraštines sąlygas. Pavyzdžiui, taškuose, kuriuose skystis liečiasi su nejudamu paviršiumi, turi būti patenkinta sąlyga $v_{\mathbf{n}} = (\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0$. Jeigu liečiasi du nesusimaišantys skysčiai, tai lietimosi taškuose jų slėgiai ir greičių projekcijos į normalės vektorių $\mathbf{n}$ turi būti lygūs.

P a s t a b a. Į dujų judėjimą galima žiūrėti kaip į idealiojo skysčio judėjimą, kurio neveikia sunkio jėgos ir nėra išorinių šaltinių. Todėl dujų dinamikos lygčių sistemą galima užrašyti taip:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad} \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0, \\ p = \Phi(\rho). \end{gathered} \tag{2.25}$$

3 S K Y R I U S

Lygtys ir kraštiniai uždaviniai

3.1. TIESINIŲ ANTROS EILĖS LYGČIŲ KLASIFIKACIJA

Nagrinėdami fizikos ir mechanikos uždavinius, išvedėme juos aprašančias diferencialines lygtis. Dažniausiai tai tiesinės antros eilės dalinių išvestinių lygtys. Paprasčiausios iš jų yra Puasono (Laplaso)

$$-\Delta u = f, \quad (\Delta u = 0),$$

šilumos laidumo

$$u_t - a^2 \Delta u = f$$

ir bangavimo

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f$$

lygtys; čia

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$$

yra n-matis *Laplaso* operatorius.

Šiame skyrelyje nagrinėsime tiesines antros eilės lygtis

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x). \tag{3.1}$$

Išskirsime tris lygčių klases, kurioms priklauso Puasono, šilumos laidumo ir bangavimo lygtys.

Tarkime, (3.1) lygtyje funkcijos a_{ij}, a_i, a ir f yra apibrėžtos srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Iš koeficientų prie antros eilės išvestinių sudarome kvadratinę formą

$$\Lambda(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Tiesinėje algebroje įrodoma, kad (3.2) kvadratinę formą fiksuotame taške $x^0 \in \Omega$ naudojant neišsigimusią tiesinę transformaciją

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} C_{ki} \eta_k, \quad i = 1, \dots, n,$$

galima suvesti į kvadratų sumą

$$\Lambda(x^0, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k^2; \tag{3.3}$$

čia:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)C_{ki}C_{lj} = \lambda_k \delta_k^l, \quad \delta_k^l = \begin{cases} 1, & \text{kai}\, l = k, \\ 0, & \text{kai}\, l \neq k, \quad k, l = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Be to, visi koeficientai λ_k yra realūs, nes $\{a_{ij}\}$ yra simetrinė matrica.

Pagal kvadratinių formų inercijos dėsnį teigiamų, neigiamų ir lygių nuliui koeficientų skaičius nepriklauso nuo parinktos neišsigimusios transformacijos, suvedančios šią formą į kvadratų sumą. Todėl yra galima tokia tiesinių antros eilės lygčių klasifikacija.

Apibrėžimas. (3.1) lygtis taške x^0 yra (α, β, γ) tipo, jeigu (3.3) kvadratinėje formoje yra α teigiamų, β neigiamų ir γ lygių nuliui koeficientų λ_k.

Pastaba. Savaime aišku, kad tipus (α, β, γ) ir (β, α, γ) galima sutapatinti. Be to, jeigu (3.1) lygtyje koeficientai a_{ij} yra pastovūs, tai visuose erdvės $\mathbb{R}^n$ taškuose ši lygtis yra to paties tipo.

Išskirsime tris atvejus:

1. Visi koeficientai $\lambda_k \neq 0$ ir yra vienodo ženklo. Tada (3.1) lygtis taške x^0 yra $(n, 0, 0)$ arba $(0, n, 0)$ tipo ir vadinama *elipsine* lygtimi taške x^0.

2. Visi koeficientai $\lambda_k \neq 0$ ir vieno iš jų ženklas skiriasi nuo kitų. Tada (3.1) lygtis taške x^0 yra $(n-1, 1, 0)$ arba $(1, n-1, 0)$ tipo ir vadinama *hiperboline* lygtimi taške x^0.

3. Vienas iš koeficientų, tarkime λ_k, lygus nuliui, o kiti nelygūs nuliui ir vienodo ženklo. Tada (3.1) lygtis taške x^0 yra $(n-1, 0, 1)$ arba $(0, n-1, 1)$ tipo. Jeigu, be to, dar
$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x^0)C_{ki} \neq 0, \tag{3.4}$$
tai (3.1) lygtis vadinama *paraboline* lygtimi taške x^0. Jeigu (3.4) sąlyga yra nepatenkinta, tai (3.1) lygtis vadinama paraboline lygtimi plačiąja prasme.

Pastaba. Vietoje nepriklausomų kintamųjų $x_1, \ldots, x_n$ įveskime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_{ki}x_i, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Atlikę elementarius skaičiavimus, gausime, kad (3.1) lygtį taške x^0 galima užrašyti taip:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^{n} A_k u_{y_k} + au = f; \tag{3.5}$$

čia koeficientai $A_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x^0)C_{ki}$. Taigi parabolinės lygties atveju (3.4) papildoma sąlyga rodo, kad koeficientas A_k prie išvestinės u_{y_k} nelygus nuliui. Tuo atveju, kai (3.4) sąlyga yra nepatenkinta, t.y. kai koeficientas $A_k = 0$, (3.5) lygtyje nėra funkcijos u išvestinių kintamojo y_k atžvilgiu. Tačiau tada į šį kintamąjį galima žiūrėti kaip į laisvąjį parametrą.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, kad (3.1) lygtis yra elipsinė, hiperbolinė arba parabolinė srityje Ω, jeigu ji yra tokia kiekviename srities Ω taške. Toliau nagrinėsime tik šių trijų tipų lygtis.

3.1 **lema.** *Neišsigimusi nepriklausomų kintamųjų transformacija (nebūtinai tiesinė) lygties tipo nekeičia.*

Šio teiginio įrodymą galima rasti knygoje [1].

P a v y z d ž i a i:

1. Puasono (Laplaso) lygtį
$$\Delta u = -f \quad (\Delta u = 0)$$
atitinka kvadratinė forma
$$\Lambda(x,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2.$$
Visi jos koeficientai nelygūs nuliui, vienodo ženklo (lygūs 1) ir nepriklauso nuo konkretaus taško $x \in \mathbb{R}^n$. Todėl Puasono ir Laplaso lygtys yra elipsinės lygtys visoje erdvėje $\mathbb{R}^n$.

2. Šilumos laidumo lygtį
$$u_t - a^2 \Delta u = f$$
atitinka kvadratinė forma
$$\Lambda(x,t,\xi) = -a^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 + 0 \cdot \xi_{n+1}^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$
Vienas iš šios kvadratinės formos koeficientų lygus nuliui, o kiti nelygūs nuliui ir vienodo ženklo. Be to, visi lygties koeficientai nepriklauso nuo konkretaus taško $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Todėl šilumos laidumo lygtis yra parabolinė lygtis visoje erdvėje $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

3. Bangavimo lygtį
$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f$$
atitinka kvadratinė forma
$$\Lambda(x,t,\xi) = -a^2 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 + 1 \cdot \xi_{n+1}^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$
Visi jos koeficientai nelygūs nuliui ir vieno iš jų ženklas skiriasi nuo kitų. Be to, lygties koeficientai nepriklauso nuo konkretaus taško $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Todėl bangavimo lygtis yra hiperbolinė lygtis visoje erdvėje $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

4. Pateiksime pavyzdį lygties, kurios tipas priklauso nuo konkretaus srities taško. Plokštumoje $\mathbb{R}^2$ nagrinėsime *Trikomio* lygtį

   $$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Šią lygtį atitinka kvadratinė forma

   $$\Lambda(x, y, \xi, \eta) = y\xi^2 + 1 \cdot \eta^2, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^1.$$

   Pusplokštumėje $y > 0$ jos koeficientai nelygūs nuliui ir vienodo ženklo, pusplokštumėje $y < 0$ jos koeficientai nelygūs nuliui ir skirtingų ženklų, o tiesėje $y = 0$ vienas iš koeficientų lygus nuliui. Todėl pusplokštumėje $y > 0$ Trikomio lygtis yra elipsinė, pusplokštumėje $y < 0$ – hiperbolinė, o tiesėje $y = 0$ – parabolinė. Trikomio lygtis atsiranda nagrinėjant kieto kūno judėjimą dujose greičiu, artimu garso greičiui. Sritį $y < 0$ atitinka judėjimas greičiu, viršijančiu garso greitį, o sritį $y > 0$ – mažesniu už garso greitį.

3.2. TIESINIŲ ANTROS EILĖS LYGČIŲ SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS SUVEDIMAS Į KANONINĮ PAVIDALĄ

Nagrinėsime antros eilės tiesinę lygtį

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f. \tag{3.6}$$

Tarkime, šioje lygtyje koeficientai $a_{ij} = a_{ji}$, a_i ir a yra pastovūs, o f – kintamojo x funkcija, apibrėžta srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Vietoje kintamųjų $x_1, \dots, x_n$ apibrėšime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_{ki} x_i, \quad k = 1, \dots, n;$$

čia $\{C_{ki}\}$ – kokia nors neišsigimusi matrica. Tada (3.6) lygtis virs lygtimi

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} u_{y_k y_l} + \sum_{k=1}^{n} A_k u_{y_k} + au = f. \tag{3.7}$$

Šioje lygtyje koeficientai

$$A_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}, \quad A_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Matricą $\{C_{ki}\}$ parinkime taip, kad matrica $\{A_{kl}\}$ būtų diagonali. Tiksliau, tegu matrica $\{C_{ki}\}$ yra tokia, kad

$$A_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} C_{ki} C_{lj} = \lambda_k \delta_k^l, \quad \forall k, l = 1, \dots, n.$$

Tada (3.7) lygtį galima užrašyti taip:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^{n} A_k u_{y_k} + au = f, \quad A_k = \sum_{i=1}^{n} a_i C_{ki}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{3.8}$$

Šioje lygtyje kiekvieną iš koeficientų λ_k galima prilyginti $+1$, -1 arba 0. Iš tikrųjų, jeigu kuris nors koeficientas, tarkime λ_1, įgyja kitokią reikšmę, tai atlikus transformaciją

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}} y_1,$$

koeficientas prie išvestinės $u_{z_1 z_1}$ bus lygus $\dfrac{\lambda_1}{|\lambda_1|}$, t.y. ± 1.

Taigi (3.6) lygtį visada galima suvesti į paprastesnę (3.8) lygtį, kurios matrica, sudaryta iš koeficientų prie antros eilės išvestinių, yra diagonali. Vadinasi, (3.8) lygtyje nėra mišrių antros eilės išvestinių. Toks (3.6) lygties pavidalas vadinamas *kanoniniu.*

Atkreipsime dėmesį į tai, kad ir (3.8) lygtį galima suprastinti. Tuo tikslu vietoje funkcijos u apibrėšime naują nežinomą funkciją

$$v = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho_k y_k\right\} u, \quad \rho_k = \begin{cases} \lambda_k^{-1} A_k, & \text{kai } \lambda_k \neq 0, \\ 0, & \text{kai } \lambda_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Tada (3.8) lygtis virs lygtimi

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k v_{y_k y_k} + \sum_{k=1}^{n}(A_k - \lambda_k \rho_k) v_{y_k} + Av = F; \tag{3.9}$$

čia:

$$A = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{4}\lambda_k \rho_k^2 - \frac{1}{2}A_k\rho_k) + a, \quad F = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho_k y_k\right\} f.$$

Pastarosios lygties koeficientai $A_k - \lambda_k\rho_k$ lygūs nuliui tokioms indeksų k reikšmėms, kurioms $\lambda_k \neq 0$. Todėl yra teisingi tokie teiginiai:

1. Jeigu (3.6) lygtis yra elipsinė (tarkime, $\lambda_k = 1$, $\forall k = 1, \dots, n$), tai ją galima suvesti į lygtį

$$\Delta v + Av = F, \quad \Delta v = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k y_k}.$$

2. Jeigu (3.6) lygtis yra parabolinė (tarkime, $\lambda_k = -1$, $\forall k = 1, \dots, n-1$, o $\lambda_n = 0$), tai ją galima suvesti į lygtį

$$v_t - \Delta v + Av = F, \quad \Delta v = \sum_{k=1}^{n-1} v_{y_k y_k}, \quad t = \frac{y_n}{A}.$$

3. Jeigu (3.6) lygtis yra hiperbolinė (tarkime, $\lambda_k = -1$, $\forall k = 1, \dots, n-1$, o $\lambda_n = 1$), tai ją galima suvesti į lygtį

$$v_{tt} - \Delta v + Av = F, \quad \Delta v = \sum_{k=1}^{n-1} v_{y_k y_k}, \quad t = y_n.$$

Aišku, kad kiekviename fiksuotame taške į kanoninį pavidalą galima suvesti ir tiesinę (kvazitiesinę) lygtį su kintamais koeficientais. Tačiau kiekviename taške reikia apibrėžti savą transformaciją, leidžiančią tai atlikti.

P a s t a b a. Dviejų nepriklausomų kintamųjų atveju tiesinė hiperbolinė antros eilės lygtis turi kanoninį pavidalą

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f. \tag{3.10}$$

Jis dar vadinamas *pirmuoju kanoniniu* hiperbolinės lygties pavidalu. Jeigu (3.10) lygtyje įvesime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y,$$

tai gausime tokį antros eilės hiperbolinės lygties kanoninį pavidalą:

$$u_{\xi\eta} + \widetilde{a} u_\xi + \widetilde{b} u_\eta + cu = f. \tag{3.11}$$

Jis yra vadinamas *antruoju kanoniniu* hiperbolinės lygties pavidalu. Akivaizdu, kad atlikus transformaciją

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{2}(\xi - \eta),$$

(3.11) lygtis susiveda į (3.10) lygtį.

3.3. TIESINIŲ ANTROS EILĖS LYGČIŲ SU DVIEM NEPRIKLAUSOMAIS KINTAMAISIAIS SUVEDIMAS Į KANONINĮ PAVIDALĄ

Tiesinę antros eilės lygtį su kintamais koeficientais kiekviename fiksuotame taške galima suvesti į kanoninį pavidalą. Bedruoju atveju visoje srityje arba bent tam tikro taško aplinkoje to atlikti negalima (netgi tada, kai lygtis yra pastovaus tipo, o neišsigimusi transformacija yra netiesinė). Tiksliau, jeigu kintamųjų skaičius didesnis už du, tai net mažoje taško aplinkoje ne visada galima rasti neišsigimusią nepriklausomų kintamųjų transformaciją, kuri suvestų lygtį į kanoninį pavidalą. Išimtį sudaro dviejų nepriklausomų kintamųjų atvejis. Išnagrinėsime jį.

Įrodysime, kad tiesinę antros eilės lygtį

$$a(x,y)u_{xy} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \ldots = 0 \tag{3.12}$$

su dviem nepriklausomais kintamaisiais taško (x_0, y_0) aplinkoje galima suvesti į kanoninį pavidalą.

Tarkime, funkcijos a, b ir c ir jų pirmosios eilės dalinės išvestinės yra tolydžios kurioje nors taško (x_0, y_0) aplinkoje U. Aplinką U iš anksto laikysime pakankamai maža, t.y. tokia, kad visi žemiau atlikti veiksmai būtų teisėti.

Iš koeficientų prie antros eilės išvestinių sudarykime kvadratinę formą

$$\Lambda(x,y,\xi,\eta) = a(x,y)\xi^2 + 2b(x,y)\xi\eta + c(x,y)\eta^2. \tag{3.13}$$

Kiekviename fiksuotame aplinkos U taške (x,y) šią formą galima suvesti į kanoninį pavidalą. Iš tiesinės algebros kurso yra žinoma, kad (3.13) kvadratinės formos, suvestos į kvadratų sumą, teigiamų, neigiamų ir lygių nuliui koeficientų skaičius lygus atitinkamai teigiamų, neigiamų ir lygių nuliui charakteristinio polinomo

$$\begin{vmatrix} a(x,y) - \lambda & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

šaknų skaičiui.

Tegu $\lambda_1(x,y)$, $\lambda_2(x,y)$ yra charakteristinio polinomo šaknys. Tada jų sandauga

$$\lambda_1(x,y)\lambda_2(x,y) = a(x,y)c(x,y) - b^2(x,y). \tag{3.14}$$

Galimi tokie atvejai:

1. Šaknys λ_1, λ_2 yra vienodų ženklų ir nelygios nuliui. Taip bus tada ir tik tada, kai

$$b^2 - ac < 0. \tag{3.15}$$

Taigi (3.12) lygtis yra elipsinė tada ir tik tada, kai jos koeficientai prie antros eilės išvestinių tenkina (3.15) nelygybę.

2. Šaknys λ_1, λ_2 turi skirtingus ženklus ir nelygios nuliui. Taip bus tada ir tik tada, kai
$$b^2 - ac > 0. \tag{3.16}$$
Taigi (3.12) lygtis yra hiperbolinė tada ir tik tada, kai jos koeficientai prie antros eilės išvestinių tenkina (3.16) nelygybę.

3. Kuri nors iš šaknų λ_1, λ_2 lygi nuliui. Taip bus tada ir tik tada, kai
$$b^2 - ac = 0. \tag{3.17}$$
Taigi (3.12) lygtis yra parabolinė tada ir tik tada, kai jos koeficientai prie antros eilės išvestinių tenkina (3.17) lygybę.

Pastaba. Šaknys λ_1, λ_2 vienu metu negali būti lygios nuliui. Jeigu abi šaknys yra lygios nuliui, tai lengvai galima įsitikinti, kad koeficientai a, b ir c taip pat yra lygūs nuliui. O tai prieštarauja tam, kad (3.12) lygtis yra antros eilės lygtis.

Vietoje kintamųjų x, y apibrėšime naujus nepriklausomus kintamuosius
$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y).$$
Tarkime, funkcijos ξ ir η aplinkoje U yra dukart diferencijuojamos, o jakobianas
$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$
Tada funkcijos u išvestinės
$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy},$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}.$$
Pasinaudoję šiomis formulėmis, (3.12) lygtį perrašysime taip:
$$A(\xi, \eta)u_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta)u_{\xi\eta} + C(\xi, \eta)u_{\eta\eta} + \ldots = 0; \tag{3.18}$$
čia koeficientai
$$A(\xi, \eta) = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,$$
$$C(\xi, \eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2,$$
$$B(\xi, \eta) = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y.$$
Tiesiogiai galima įrodyti, kad
$$B^2 - AC = (b^2 - ac)\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}^2. \tag{3.19}$$

Ši lygybė (dvimačiu atveju) dar kartą parodo, kad neišsigimusi transformacija lygties tipo nekeičia.

Funkcijas ξ ir η parinksime taip, kad (3.18) lygtis įgytų paprasčiausią pavidalą. Taip bus tada ir tik tada, kai dalis (3.18) lygties koeficientų prie antros eilės išvestinių bus lygi nuliui. Prilyginę nuliui koeficientą A, gausime lygtį

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0. \tag{3.20}$$

Tarkime, bent vienas iš koeficientų a arba c nelygus nuliui (pavyzdžiui, $a \neq 0$). Tada (3.20) lygtį atitinka kvadratinė lygtis

$$a\mu^2 + 2b\mu + c = 0. \tag{3.21}$$

Tegu $\mu_1 = f(x, y)$ ir $\mu_2 = g(x, y)$ yra šios lygties šaknys. Lengvai galima įsitikinti, kad (3.20) lygtis išsiskaido į dvi lygtis:

$$\xi_x = f(x, y)\xi_y, \quad \xi_x = g(x, y)\xi_y. \tag{3.22}$$

Tai yra tiesinės pirmosios eilės dalinių išvestinių lygtys. Jų charakteristinės lygtys

$$dy = -f(x, y)\, dx, \quad dy = -g(x, y)\, dx \tag{3.23}$$

yra paprastosios diferencialinės pirmos eilės lygtys. Tegu $\varphi(x, y) = \text{const}$ ir $\psi(x, y) = \text{const}$ yra (3.23) lygčių bendrieji integralai, tenkinantys sąlygas:

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0, \quad \psi_x^2 + \psi_y^2 \neq 0. \tag{3.24}$$

Tada funkcijos φ ir ψ yra (3.22) diferencialinių lygčių sprendiniai (kartu ir (3.20) lygties sprendiniai).

Išnagrinėsime tris galimus atvejus:

1. Tarkime, aplinkoje U reiškinys $b^2 - ac > 0$, t.y. (3.12) lygtis, yra hiperbolinė. Jeigu abu (3.12) lygties koeficientai a ir c lygūs nuliui, tai (3.12) lygtis jau yra antrojo kanoninio pavidalo ir keitiniu

$$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - \eta$$

susiveda į pirmąjį kanoninį pavidalą

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \ldots = 0.$$

Tarkime, vienas iš šių koeficientų, pavyzdžiui, a, nelygus nuliui. Tada (3.23) lygtys turi du skirtingus integralus

$$\varphi(x, y) = \text{const}, \quad \psi(x, y) = \text{const},$$

tenkinančius (3.24) sąlygas. Pagal prielaidą funkcijos a, b ir c yra tolydžiai diferencijuojamos taško (x_0, y_0) aplinkoje U. Iš bendrosios paprastų diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad funkcijos φ ir ψ yra dukart diferencijuojamos aplinkoje U (priminsime, kad aplinka U iš anksto paimta pakankamai maža). Be to,

$$\varphi_x = f(x,y)\varphi_y, \quad \psi_x = g(x,y)\psi_y.$$

Iš šių lygčių, prielaidos $a \neq 0$ ir (3.24) sąlygų išplaukia, kad

$$\varphi_y \neq 0 \quad \text{ir} \quad \psi_y \neq 0.$$

Tačiau tada jakobianas

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\varphi_y & \varphi_y \\ -\dfrac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}\psi_y & \psi_y \end{vmatrix} = -2\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}\varphi_y\psi_y \neq 0. \tag{3.25}$$

Todėl naujus nepriklausomus kintamuosius ξ ir η galima apibrėžti taip:

$$\xi = \xi(x,y) = \varphi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y) = \psi(x,y).$$

Atlikus tokią transformaciją (3.18) lygtyje, koeficientai A ir C bus lygūs nuliui. Remiantis (3.19) formule ir (3.25) nelygybe, galima tvirtinti, kad koeficientas $B \neq 0$. Padaliję (3.18) lygtį iš $2B$, suvesime ją į antrąjį kanoninį pavidalą

$$u_{\xi\eta} + \ldots = 0. \tag{3.26}$$

Keitiniu

$$\xi = \tilde{\xi} + \tilde{\eta}, \quad \eta = \tilde{\xi} - \tilde{\eta}$$

(3.26) lygtis susiveda į pirmąjį kanoninį pavidalą

$$u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} + \ldots = 0. \tag{3.27}$$

P a s t a b a. Lygtį, kurią galima suvesti į (3.26) pavidalą, kartais pasiseka suintegruoti, t.y. rasti formulę, apibrėžiančią visus lygties sprendinius.

P a v y z d y s. Rasti lygties

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

bendrąjį sprendinį. Tai yra hiperbolinė lygtis. Ji yra pirmojo kanoninio pavidalo. Keitiniu

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

ši lygtis susiveda į lygtį

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

kuri yra antrojo kanoninio pavidalo. Tegu $u_\xi = v$. Tada

$$v_\eta = 0.$$

Šios lygties bendrasis integralas yra $v = f(\xi)$, f – bet kokia diferencijuojama funkcija. Integruodami lygtį

$$u_\xi = f(\xi),$$

gausime

$$u = \int f(\xi)\,d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta);$$

čia φ ir ψ – bet kokios dukart diferencijuojamos funkcijos. Grižę prie senų kintamųjų x ir y, gausime nagrinėjamosios lygties bendrą sprendinį:

$$u(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y).$$

2. Tarkime, aplinkoje U reiškinys

$$b^2 - ac = 0, \tag{3.28}$$

t.y. (3.12) lygtis yra parabolinė. Šiuo atveju abi (3.23) lygtys sutampa ir turime vieną lygtį

$$a\,dy = b\,dx. \tag{3.29}$$

Kadangi (3.12) lygtis yra antros eilės lygtis, tai koeficientai a, b ir c vienu metu nelygūs nuliui. Kartu su (3.28) sąlyga tai reiškia, kad bent vienas iš koeficientų a arba c nelygūs nuliui. Tarkime, $a \neq 0$. Jeigu koeficientas $c = 0$, tai iš (3.28) sąlygos išplaukia, kad $b = 0$. Tačiau tada (3.12) lygtis jau yra kanoninio pavidalo. Todėl pakanka išnagrinėti atvejį, kai aplinkoje U koeficientai a, b ir c nelygūs nuliui.

Tegu

$$\varphi(x, y) = \text{const}$$

yra (3.29) lygties bendrasis integralas, tenkinantis sąlygą

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0.$$

Iš bendrosios diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad funkcija φ aplinkoje U yra dukart tolydžiai diferencijuojama. Laisvai parinkime kokią nors diferencijuojamą aplinkoje U funkciją ψ tokią, kad jakobianas

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.30}$$

(jeigu $\varphi_y \neq 0$, tai galima imti $\psi(x, y) = x$).

Vietoje kintamųjų x ir y apibrėžkime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) = \psi(x, y).$$

Kadangi funkcija φ tenkina (3.20) lygtį, tai (3.18) lygtyje koeficientas $A = 0$. Iš (3.19) formulės, (3.28) sąlygos ir (3.30) nelygybės išplaukia, kad koeficientas $B = 0$. Įrodysime, kad koeficientas $C \neq 0$. Jeigu koeficientas C būtų lygus nuliui, tai (3.18) lygtis būtų pirmosios eilės lygtis. Perėję joje nuo kintamųjų ξ ir η prie senų kintamųjų x ir y, gausime (3.12) lygtį, kuri yra antros eilės lygtis. Tačiau padarius nepriklausomų kintamųjų transformaciją, lygties eilė nepadidėja. Gauta prieštara rodo, kad $C \neq 0$. Todėl, padalijęs (3.18) lygtį iš C, suvesime ją į kanoninį pavidalą

$$u_{\eta\eta} + \ldots = 0. \tag{3.31}$$

P a s t a b a. Atkreipsime dėmesį į tai, kad pastarosios lygties nariai, pažymėti daugtaškiu, turi priklausyti nuo u_ξ. Priešingu atveju į šią lygtį galima žiūrėti kaip į paprastą diferencialinę lygtį, kurios kintamasis ξ yra laisvasis parametras.

3. Tarkime, aplinkoje U reiškinys

$$b^2 - ac < 0, \tag{3.32}$$

t.y. (3.12) lygtis yra elipsinė. Šiuo atveju (3.23) lygtis galima užrašyti taip:

$$a\,dy - \big(b + i\sqrt{ac - b^2}\,\big)\,dx = 0, \quad a\,dy - \big(b - i\sqrt{ac - b^2}\,\big)\,dx = 0. \tag{3.33}$$

Iš (3.32) sąlygos išplaukia, kad funkcijos a ir c nelygios nuliui. Nagrinėdami šį atvejį, papildomai pareikalausime, kad aplinkoje U funkcijos a, b ir c būtų analizinės. Esant šioms prielaidoms, galima remtis žinomais paprastų diferencialinių lygčių teorijos rezultatais. Tiksliau, galime tvirtinti, kad (3.33) lygtys turi du tarpusavyje kompleksiškai jungtinius bendruosius integralus

$$p(x,y) = \mathrm{const}, \quad \overline{p(x,y)} = \mathrm{const},$$

tenkinančius sąlygą

$$|p_x| + |p_y| \neq 0. \tag{3.34}$$

Be to, funkcija p aplinkoje U yra analizinė ir tenkina lygtį

$$ap_x + \big(b + i\sqrt{ac - b^2}\,\big)p_y = 0. \tag{3.35}$$

Tegu

$$p(x,y) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y);$$

čia: φ – realioji, o ψ – menamoji funkcijos p dalys. Tada (3.35) lygtis yra ekvivalenti lygčių sistemai:

$$\varphi_x = -\frac{b}{a}\varphi_y + \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}\psi_y, \quad \psi_x = -\frac{b}{a}\psi_y - \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}\varphi_y.$$

Pasinaudoję šiomis lygtimis ir (3.34) sąlyga, gausime

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}(\psi_y^2 + \varphi_y^2) \neq 0.$$

Todėl vietoje kintamųjų x ir y galima įvesti naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = \xi(x,y) = \varphi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y) = \psi(x,y).$$

Atlikus tokią transformaciją, (3.18) lygties koeficientas B bus lygus nuliui, o koeficientai A ir C sutaps. Norint tuo įsitikinti, reikia atskirti realiąją ir menamąją lygties

$$ap_x^2 + 2bp_xp_y + cp_y^2 = 0$$

dalis ir pastebėti, kad

$$A = C = \frac{1}{a}(ac - b^2)(\varphi_y^2 + \psi_y^2) \neq 0.$$

Taigi padalijęs (3.18) lygtį iš bendros koeficientų A ir C reikšmės, suvesime ją į kanoninį pavidalą

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \ldots = 0. \tag{3.36}$$

Jeigu (3.12) lygtyje vietoje kintamųjų x ir y įvesime nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = p(x, y), \quad \bar{\xi} = \overline{p(x, y)},$$

tai gausime lygtį

$$u_{\xi\bar{\xi}} + \ldots = 0. \tag{3.37}$$

P a s t a b a. Elipsinės lygties atveju reikalavimas, kad koeficientai a, b ir c būtų analiziniai, nėra esminis. Taikant tikslesnius metodus (žr. [23] arba [**?**]), kuriuose nenaudojami kompleksiniai dydžiai, minėtąjį reikalavimą galima gerokai susilpninti. Pavyzdžiui, pakanka reikalauti, kad koeficientai a, b ir c būtų dukart tolydžiai diferencijuojamos funkcijos.

3.4. PAGRINDINIAI UŽDAVINIAI

Daugelis fizikos ir mechanikos uždavinių aprašomi antros eilės lygtimis. Paprasčiausios iš jų yra:

1. Puasono (elipsinė) lygtis
$$\Delta u = -f(x)$$
arba, kai $f = 0$, Laplaso lygtis
$$\Delta u = 0;$$
čia: $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. Šios lygtys aprašo įvairius stacionariuosius procesus ir pusiausvyros uždavinius.

2. Šilumos laidumo (parabolinė) lygtis
$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t),$$
aprašanti įvairius šiluminius procesus izotropiniame vienalyčiame kūne.

3. Bangavimo (hiperbolinė) lygtis
$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t),$$
aprašanti garso, elektromagnetinių bangų, hidrodinamikos, stygos ir membranos svyravimų procesus.

Šios lygtys yra geriausiai išnagrinėtos, ir su jomis dažniausiai tenka susidurti spendžiant praktinius uždavinius. Suformuluosime šioms lygtims tris pagrindinius uždavinių tipus.

1. Koši uždavinys formuluojamas šilumos laidumo arba bangavimo lygtims. Šilumos laidumo lygties atveju reikia rasti funkciją u, kuri $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ tenkintų lygtį
$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t)$$
ir $\forall x \in \mathbb{R}^n$ pradinę sąlygą
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x).$$
Bangavimo lygties atveju Koši uždavinys formuluojamas taip: rasti funkciją u, kuri $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ tenkintų lygtį
$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t)$$
ir $\forall x \in \mathbb{R}^n$ pradines sąlygas
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x).$$
Kraštinių sąlygų šiuose uždaviniuose nėra.

2. K r a š t i n i s   u ž d a v i n y s formuluojamas Puasono arba Laplaso lygtims. Abiem atvejais reikia rasti funkciją u, kuri srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tenkintų Puasono (Laplaso) lygtį

$$\Delta u = -f(x) \quad (\Delta u = 0),$$

ir paviršiaus $S = \partial\Omega$ taškuose vieną iš kraštinių sąlygų:

$$u\big|_S = \varphi(x) \text{ – } \textit{pirmoji kraštinė} \text{ sąlyga,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \psi(x) \text{ – } \textit{antroji kraštinė} \text{ sąlyga,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S + \sigma u\Big|_S = \mu(x) \text{ – } \textit{trečioji kraštinė} \text{ sąlyga;}$$

čia $\partial u/\partial \mathbf{n}$ – funkcijos u išvestinė normalės kryptimi. Pradinių sąlygų nėra.

Jeigu Laplaso lygtis nagrinėjama kartu su pirmąja kraštine sąlyga, tai toks uždavinys vadinamas *pirmuoju*, arba *Dirichlė*, uždaviniu, jeigu su antrąja – *antruoju*, arba *Noimano*, uždaviniu, o jeigu su trečiąja – *trečiuoju* kraštiniu uždavinu.

3. M i š r u s i s   u ž d a v i n i s formuluojamas šilumos laidumo arba bangavimo lygtims. Reikia rasti funkciją u, kuri cilindre $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tenkintų šilumos laidumo

$$u_t - a^2 \Delta u = f(x, t)$$

arba bangavimo

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t)$$

lygtį, atitinkamas pradines sąlygas (žr. Koši uždavinį) ir vieną iš kraštinių sąlygų:

$$u\big|_S = \varphi(x, t) \text{ – } \textit{pirmoji kraštinė} \text{ sąlyga,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = \psi(x, t) \text{ – } \textit{antroji kraštinė} \text{ sąlyga,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S + \sigma u\Big|_S = \mu(x, t) \text{ – } \textit{trečioji kraštinė} \text{ sąlyga.}$$

4 SKYRIUS

Charakteristikos ir Koši uždavinys

4.1. FORMALIAI JUNGTINIAI OPERATORIAI IR GRYNO FORMULĖ

Tegu Ω – aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, funkcijos $u, v \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$. Tada yra teisinga *Gryno* formulė

$$\int\limits_\Omega vLu\,dx = \int\limits_S \Big(v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N} + \sum_{i=1}^n a_i \cos{(\mathbf{n}, x_i)}\, uv\Big)\, dS + \int\limits_\Omega uL^*v\,dx,$$

kurioje

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} + au, \tag{4.1}$$

$$L^*v \equiv -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}v_{x_i}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i v) + av,$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} \equiv -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\cos{(\mathbf{n}, x_i)},$$

o koeficientai $a_i, a_{ij} \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, $a \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Norint ją įrodyti, pakanka du kartus pritaikyti integravimo dalimis formulę. Perrašysime Gryno formulę taip:

$$\int\limits_\Omega (vLu\,dx - uL^*v)\,dx = \int\limits_S \Big(v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N} + \sum_{i=1}^n a_i \cos{(\mathbf{n}, x_i)}\, uv\Big)\, dS. \tag{4.2}$$

Diferencialinė išraiška L^*v vadinama *formaliai jungtine* diferencialinei išraiškai Lu, o operarorius L^* – *formaliai jungtiniu* operatoriui L. Pabrėšime, kad ši savybė yra abipusė, t.y. diferencialinė išraiška Lu taip pat yra formaliai jungtinė išraiškai L^*v. Jeigu $Lu = L^*u$, $\forall u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$, tai tokios diferencialinės išraiškos vadinamos *formaliai savijungėmis*, o operatoriai L ir L^* – *formaliai savijungiais*.

Diferencialinė išraiška Lu yra savijungė tada ir tik tada, kai koeficientai $a_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, t.y. kai

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) + au.$$

Savijungėms diferencialinėms išraiškoms (4.2) formulė įgauna paprastesnį pavidalą:

$$\int\limits_\Omega (vLu - uLv)\,dx = \int\limits_S \Big(v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N}\Big)\, dS. \tag{4.3}$$

Atskiru atveju, kai $Lu = -\Delta u$, Gryno formulė yra tokio pavidalo:

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int\limits_{S} \Big(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big)\, dS. \tag{4.4}$$

Kai $v \equiv 1$, gauname

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u\, dx = \int\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS. \tag{4.5}$$

P a s t a b a. Jeigu (4.1) diferencialinės išraiškos koeficientai a_{ij} yra diferencijuojamos funkcijos, tai ją galima perrašyti taip:

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + bu; \tag{4.6}$$

čia:

$$b_{ij} = -a_{ij}, \quad b_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}) + a_i, \quad b = a.$$

Atvirkščiai, (4.6) diferencialinę išraišką lengvai galima suvesti į (4.1). Diferencialinė išraiška

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(b_{ij}u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u) + bu$$

vadinama formaliai jungtine (4.6).

4.2. TIESINIŲ ANTROS EILĖS LYGČIŲ CHARAKTERISTIKOS. KOŠI UŽDAVINYS

Tegu $S \subset \mathbb{R}^n$ – glodus $n-1$ dimensijos paviršius,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u$$

– tiesinė antros eilės diferencialinė išraiška.

Nagrinėsime Koši uždavinį: *rasti funkciją u, kuri paviršiaus S aplinkoje (vienpusėje arba dvipusėje) tenkintų lygtį*

$$Lu = f(x), \tag{4.7}$$

o paviršiuje S pradines sąlygas

$$u\big|_S = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda}\Big|_S = \psi(x); \tag{4.8}$$

čia: $\lambda = \lambda(x)$, $x \in S$ neliečiamoji kryptis paviršiui S, o funkcijos φ, φ' ir ψ yra tolydžios paviršiuje S.

Taip suformuluotas Koši uždavinys skiriasi nuo kraštinio uždavinio tuo, kad iš anksto nenurodoma sritis, kurioje yra ieškomas sprendinys. Visgi į Koši uždavinį žiūrėsime kaip į vieną iš kraštinių uždavinių.

Paprastosioms diferencialinėms lygtims (ne dalinių išvestinių) Koši uždavinį formuluoti ir nagrinėti nėra sunku. Dalinių išvestinių lygčių atveju situacija yra iš esmės kita. Daugiausia tai susiję su srities dimensija ir iš to išplaukiančiais išsprendžiamumo klausimais. Ištirsime sąlygas, kurioms esant (4.7) lygtis ir (4.8) pradinės sąlygos vienareikšmiškai apibrėžia paviršiuje S patį sprendinį ir visas jo išvestines iki antros eilės imtinai.

Iš koeficientų prie antros eilės išvestinių sudarome kvadratinę formą

$$\Lambda(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Tarkime, paviršius S apibrėžiamas lygtimi

$$\omega(x) = 0. \tag{4.9}$$

Jeigu kuriame nors taške $x \in S$ reiškinys

$$\Lambda(x, \omega_x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\omega_{x_i}\omega_{x_j} = 0, \tag{4.10}$$

tai sakysime, kad šiame taške paviršius S operatoriaus L atžvilgiu turi *charakteristinę kryptį*.

Paviršius S vadinamas *charakteristiniu* paviršiumi operatoriaus L atžvilgiu, jeigu kiekviename savo taške jis turi charakteristinę kryptį. Kartais tokie paviršiai dar yra vadinami *charakteristikomis*. Paviršius S vadinamas *laisvuoju paviršiumi* operatoriaus L atžvilgiu, jeigu kiekvieno jo taško kryptis nėra charakteristinė.

Pabrėšime, kad (4.10) sąlyga atžvilgiu ω nėra pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinė lygtis. Iš ω nereikalaujama, kad ji tapačiai tenkintų (4.10) lygtį. Ji turi tenkinti šią lygtį tik tada, kai $\omega = 0$, t.y. kiekviename charakteristinio paviršiaus S taške.

Jeigu į (4.10) sąlygą žiūrėsime kaip į lygtį, t.y. reikalausime, kad ji būtų tapačiai patenkinta visų kintamųjų $x_1, \dots, x_n$ atžvilgiu, tai kiekvienas šios lygties sprendinys, tapačiai nelygus konstantai, apibrėš ne vieną charakteristinį paviršių, o visą šeimą

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \text{const.}$$

Galima įrodyti, kad kiekvieną charakteristinį paviršių galima įtraukti į šią šeimą. Šiuo atveju (4.10) lygtis yra pirmosios eilės dalinių išvestinių lygtis. Ji yra vadinama (4.7) lygties *charakteristikų lygtimi*.

P a s t a b a. Formaliai jungtinius operatorius L ir L^* atitinka ta pati kvadratinė forma $\Lambda(x, \omega_x)$. Todėl paviršius $S : \omega(x) = 0$ yra charakteristinis (laisvasis) operatoriaus L atžvilgiu tada ir tik tada, kai jis yra charakteristinis (laisvasis) operatoriaus L^* atžvilgiu.

Iš pradžių ištirsime atvejį, kai paviršius S yra hiperplokštuma $x_n = 0$. Pažymėkime $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Diferencijuodami pirmąją Koši sąlygą liestinių kryptimis, rasime išvestines:

$$u_{x_i}\big|_{x_n=0} = \varphi_{x_i}(x'), \quad u_{x_i x_j}\big|_{x_n=0} = \varphi_{x_i x_j}(x'), \quad i, j = 1, \dots, n-1.$$

Pagal prielaidą $\cos(\lambda, x_n) \neq 0$. Todėl iš antrosios Koši sąlygos galime rasti išvestinę

$$u_{x_n}\big|_{x_n=0} = \frac{1}{\cos(\lambda, x_n)}\Big(\psi(x') - \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i}\cos(\lambda, x_i)\Big)\Big|_{x_n=0} =$$

$$= \frac{1}{\cos(\lambda, x_n)}\Big(\psi(x') - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{x_i}\cos(\lambda, x_i)\Big).$$

Diferencijuodami ją liestinių kryptimis, rasime išvestines

$$u_{x_n x_i}\big|_{x_n=0} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{1}{\cos(\lambda, x_n)}\Big(\psi(x') - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{x_i}\cos(\lambda, x_i)\Big)\Big],$$

$\forall i = 1, \dots, n-1$. Taigi Koši sąlygos leidžia hiperplokštumoje $x_n = 0$ vienareikšmiškai apibrėžti visas pirmos ir antros eilės išvestines, išskyrus išvestinę $u_{x_n x_n}$. Pastarąją galima rasti iš (4.7) lygties, jeigu koeficientas $a_{nn} \neq 0$. Tuo atveju, kai koeficientas $a_{nn} = 0$, gauname arba tapatybę, arba lygybę, kuri yra negalima. Abiem atvejais išvestinė $u_{x_n x_n}$ lieka neapibrėžta.

Išnagrinėsime bendrąjį atvejį. Tarkime, paviršius S apibrėžiamas (4.9) lygtimi. Fiksuokime kokį nors tašką $x^0 \in S$. Šiame taške įvesime vietinę koordinačių sistemą

$$y_i = \varphi_i(x), \quad y_n = \omega(x), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{4.11}$$

Funkcijas φ_i parinkime taip, kad taško x^0 aplinkoje jos būtų pakankamai glodžios ir paviršiaus S taškuose determinantas

$$\det \left\{ \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j=1}^{n} \neq 0.$$

Paviršių S taško x^0 aplinkoje galima apibrėžti lygtimi $y_n = 0$, o (4.7) lygtį naujose koordinatėse galime perrašyti taip:

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} u_{y_k y_l} + \sum_{k=1}^{n} A_k u_{y_k} + au = f. \tag{4.12}$$

Taigi gavome jau išnagrinėtą atvejį. Todėl (4.7) diferencialinė lygtis ir (4.8) Koši sąlygos paviršiuje S vienareikšmiškai apibrėžia ieškomąją funkciją ir visas jos išvestines iki antros eilės imtinai tada ir tik tada, kai koeficientas

$$A_{nn} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial y_n}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \omega_{x_i} \omega_{x_j} \neq 0. \tag{4.13}$$

Šita sąlyga yra patenkinta tada ir tik tada, kai S yra laisvasis paviršius.

Jeigu kuriame nors taške koeficientas $A_{nn} = 0$, t.y. šiame taške paviršius S turi charakteristinę kryptį, tai funkcijų φ, ψ ir f negalima pasirinkti laisvai. Iš tikrųjų, jeigu minėtame taške įvesime vietinę ortogonalią koordinačių sistemą $y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ taip, kad ašys $y_1, \ldots, y_{n-1}$ gulėtų paviršiaus S liečiamojoje plokštumoje, o ašis y_n būtų nukreipta normalės kryptimi, tai išvestines u_{y_k}, $u_{y_k y_l}$, $u_{y_n y_l}$, $k, l = 1, \ldots, n-1$, galima išreikšti funkcijomis φ, ψ ir jų išvestinėmis. Jeigu šių išvestinių išraiškas įstatysime į (4.11) lygtį, tai gausime sąryšį, kurį turi tenkinti funkcijos φ, ψ ir f.

Pateiksime kelis pavyzdžius. Tarkime, paviršius S yra apibrėžtas (4.9) lygtimi ir taškas $x^0 \in S$. Šiame taške įvesime vietinę ortogonalią koordinačių sistemą $y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$. Koordinates $y_1, \ldots, y_{n-1}$ paimsime liečiamojoje plokštumoje, o koordinatę y_n nukreipsime normalės kryptimi. Tada (4.10) sąlygą taške x^0 galima perrašyti taip:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial y_n}{\partial x_j} = 0. \tag{4.14}$$

1. Tarkime, (4.7) lygtis yra Laplaso lygtis. Tada (4.14) sąlygą galima užrašyti taip:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_i} \right)^2 = 0. \tag{4.15}$$

Tačiau

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\Big)^2 = 1.$$

Todėl kiekvienas glodus paviršius S yra laisvas Laplaso operatoriaus atžvilgiu.

P a s t a b a. Koši uždavinys Laplaso lygčiai yra nekorektiškai suformuluotas (žr. 3 sk. Adamaro pavyzdį). Tiksliau, jo sprendiniai netolygiai priklauso nuo pradinių sąlygų.

2. Tarkime, (4.7) lygtis yra šilumos laidumo lygtis:

$$u_t - a^2\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_ix_i} = f(x,t), \quad t = x_n,\ x = (x_1,\dots,x_{n-1}).$$

Tada (4.14) sąlyga yra tokia:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\Big(\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\Big)^2 = 0.$$

Tačiau

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\Big)^2 = 1,$$

todėl

$$\Big(\frac{\partial y_n}{\partial t}\Big)^2 = 1.$$

Suintegravę šia lygtį, gausime $y_n = \pm t + \text{const}$. Taigi charakteristiniai šilumos laidumo lygties paviršiai yra plokštumos, statmenos t ašiai.

P a s t a b a. Kadangi hiperplokštuma $t = 0$ šilumos laidumo lygčiai yra charakteristinis paviršius, tai Koši sąlygose

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$$

funkcijų φ ir ψ negalima pasirinkti laisvai. Parodysime, kad antroji sąlyga yra nereikalinga. Taške $t = 0$ išvestinės

$$u_{x_i} = \varphi_{x_i}, \quad u_{x_ix_i} = \varphi_{x_ix_i}, \quad i = 1,\dots,n-1.$$

Įstatę jas į šilumos laidumo lygtį, gausime tapatybę

$$\psi = a^2\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_{x_ix_i} + f.$$

Taigi antroji Koši sąlyga yra nereikalinga.

3. Tarkime, (4.7) lygtis yra bangavimo lygtis:

$$u_{tt} - a^2\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_ix_i} = f(x,t), \quad t = x_n,\ x = (x_1,\dots,x_{n-1}).$$

Tada (4.14) sąlyga yra tokia:

$$\left(\frac{\partial y_n}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

Tiesiogiai galima parodyti, kad šią lygtį tenkina funkcija

$$\omega(x,t) = a(t - t^0) \pm |x - x^0|;$$

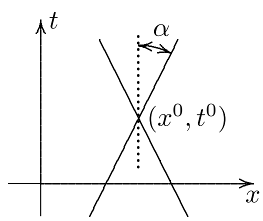
čia

$$|x - x^0|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_i^0)^2.$$

Lygtis

$$a(t - t^0) \pm |x - x^0| = 0$$

apibrėžia erdvėje $\mathbb{R}^n$ kūgio paviršių (žr. 4.1 pav.).



4.1 pav.

Čia α – kampas tarp kūgio ašies ir sudaromosios. Jis randamas iš formulės $\operatorname{tg}\alpha = a$. Taip apibrėžtas kūgis dažnai vadinamas *charakteristiniu* kūgiu.

Paviršius, kuris nė viename savo taške neliečia charakteristinio kūgio, yra laisvasis paviršius. Pavyzdžiui, bet kokia plokštuma, statmena t ašiai, yra laisvasis paviršius (bangavimo lygčiai).

4.3. KOŠI–KOVALEVSKAJOS IR HOLMGRENO TEOREMOS TIESINEI ANTROS EILĖS LYGČIŲ SISTEMAI

Tegu S – glodus $n-1$ dimensijos paviršius erdvėje $\mathbb{R}^n$,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u.$$

Iš koeficientų prie antros eilės išvestinių sudarome kvadratinę formą

$$\Lambda(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Nagrinėsime Koši uždavinį: *rasti funkciją u, kuri paviršiaus S aplinkoje tenkintų lygtį*

$$Lu = f(x) \tag{4.16}$$

ir pradines sąlygas

$$u\big|_S = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda}\Big|_S = \psi(x); \tag{4.17}$$

čia: λ – neliečiamoji kryptis paviršiui S, φ ir ψ – žinomos funkcijos.

Tarkime paviršių S galima apibrėžti lygtimi $\omega(x) = 0$. Jeigu žinomos funkcijos φ, ψ ir f pasirenkamos laisvai, tai sąlyga

$$\Lambda(x,\omega_x) \neq 0$$

yra būtina ir pakankama, kad (4.16) lygtis ir (4.17) pradinės sąlygos vienareikšmiškai apibrėžtų paviršiuje S funkciją u ir visas jos išvestines iki antrosios eilės imtinai. Tuo atveju, kai S yra charakteristinis paviršius, t.y.

$$\Lambda(x,\omega_x) = 0, \forall x \in S,$$

funkcijų φ, ψ ir f pasirinkti laisvai negalima.

Paprastosios diferencialinės pirmos eilės lygties Koši uždavinio

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad u\big|_{t=0} = u_0 \tag{4.18}$$

sprendinio egzistavimą ir vienatį pirmą kartą įrodė O. L. Koši. Tiksliau, parodė, kad taško $t = 0$ aplinkoje egzistuoja vienintelis analizinis (4.18) Koši uždavinio sprendinys, jeigu funkcija f yra analizinė taško $(0, u_0)$ aplinkoje. Įrodymo idėja yra labai paprasta. Jeigu funkcija

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i t^i \tag{4.19}$$

yra (4.18) Koši uždavinio analizinis sprendinys, tai $\alpha_0 = u_0$, $\alpha_1 = f(0, u_0)$. Likę koeficientai $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ randami vienareikšmiškai diferencijuojant lygtį taške $t = 0$. Pavyzdžiui,

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f(t,u)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,u)}{\partial u} f(t,u)\Big)\Big|_{t=0, u=u_0}.$$

Taigi visi koeficientai α_i randami vienareikšmiškai iš pačios lygties ir Koši sąlygų. Vadinasi, sprendinys yra vienintelis. Sprendinio egzistavimui pakanka įrodyti, kad laipsninė eilutė su taip apibrėžtais koeficientais konverguoja pakankamai mažoje taško $t = 0$ aplinkoje. Tam galima panauduoti mažorantų metodą.

Nagrinėjamas Koši uždavinys

$$\frac{dv}{dt} = M\Big[\Big(1 - \frac{t}{r}\Big)\Big(1 - \frac{v - u_0}{r}\Big)\Big]^{-1}, \quad v\big|_{t=0} = u_0.$$

Jo sprendinį v galima rasti kintamųjų atskyrimo metodu. Tegu

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i t^i.$$

Galima įrodyti, kad ši eilutė mažoruoja funkcijos u eilutę, t.y. $|\alpha_i| \le \beta_i$, $\forall i = 0, 1, \dots$, jeigu tik skaičius M yra pakankamai didelis, o skaičius r pakankamai mažas. Tai įrodo (4.19) eilutės konvergavimą ir (4.18) Koši uždavinio sprendinio egzistavimą.

S. V. Kovalevskaja apibendrino šią teoremą dalinių išvestinių diferencialinėms lygtims. Čia be įrodymo pateiksime vieną iš Koši–Kovalevskajos teoremos variantų.

4.1 teorema (Koši–Kovalevskajos). *Tegu S – laisvasis operatoriaus L atžvilgiu analizinis $n-1$ dimensijos paviršius erdvėje $\mathbb{R}^n$; φ, ψ – analizinės paviršiuje S funkcijos. Be to, tegu funkcijos a_{ij}, a_i, a ir f yra analizinės tam tikroje paviršiaus S aplinkoje. Tada pakankamai mažoje paviršiaus S aplinkoje egzistuoja vienintelis* (4.16), (4.17) *Koši uždavinio analizinis sprendinys.*

Atkreipsime dėmesį į tai, kad Koši–Kovalevskajos teoremoje lygtis yra antrosios eilės, o ieškomasis sprendinys yra analizinis. Tuo atveju, kai (4.16) lygties ir (4.17) Koši sąlygų dešinės pusės nėra analizinės funkcijos, bet pakankamai glodžios, negalime reikalauti, kad sprendinys būtų analizinis. Pakanka reikalauti tik tų jo išvestinių, kurios įeina į lygtį, tolydumo. Neanaliziniu atveju Koši uždavinys, nežiūrint daugelio matematikų pastangų, nėra pilnai ištirtas.

Tarkime, įeinančios į operatoriaus L koeficientus funkcijos yra analizinės kurioje nors paviršiaus S aplinkoje, S – laisvasis operatoriaus L atžvilgiu analizinis paviršius, o (4.17) Koši sąlygų ir (4.16) sistemos dešiniosios pusės funkcijos yra pakankamai glodžios, tačiau ne analizinės. Tada (žr. [1]) yra teisinga teorema.

4.2 teorema (Holmgreno). *Tarkime, patenkintos aukščiau nurodytos sąlygos. Tada, jeigu egzistuoja* (4.16), (4.17) *Koši uždavinio sprendinys (nebūtinai analizinių funkcijų klasėje), tai jis yra vienintelis.*

5 SKYRIUS

Hiperbolinės lygtys. Koši uždavinys

5.1. DALAMBERO FORMULĖ

Ieškosime vienmatės bangavimo lygties

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{5.1}$$

sprendinio, tenkinančio pradines sąlygas:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}; \tag{5.2}$$

čia $f,\ \varphi,\ \psi$ – žinomos funkcijos.

Bangavimo lygtį atitinka charakteristikų lygtis $x'^2 - a^2 = 0$. Integruodami ją, randame dvi charakteristikų klases:

$$x - at = \text{const}, \qquad x + at = \text{const}. \tag{5.3}$$

Kadangi (5.1), (5.2) Koši uždavinys yra tiesinis, tai jį patogu išskaidyti į du paprastesnius Koši uždavinius:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \tag{5.4}$$

ir

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0. \tag{5.5}$$

Iš pradžių rasime (5.4) Koši uždavinio sprendinį. Tuo tikslu vietoje kintamųjų x ir t apibrėšime naujus nepriklausomus kintamuosius

$$\xi = x - at, \qquad \eta = x + at.$$

Tada homogeninė bangavimo lygtis virs lygtimi

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$u = c_1(\xi) + c_2(\eta);$$

čia c_1 ir c_2 – bet kokios dukart diferencijuojamos funkcijos. Įstatę į šitą formulę vietoje kintamųjų ξ ir η jų išraiškas kintamaisiais x ir t, gausime homogeninės bangavimo lygties bendrąjį sprendinį

$$u = c_1(x - at) + c_2(x + at). \tag{5.6}$$

Funkcijas c_1 ir c_2 parinksime taip, kad funkcija u tenkintų (5.2) pradines sąlygas, t.y. pareikalausime, kad funkcijos c_1 ir c_2 tenkintų lygčių sistemą

$$c_1(x) + c_2(x) = \varphi(x),$$

$$-ac_1'(x) + ac_2'(x) = \psi(x).$$

Suintegravę antrąją lygtį, gausime dviejų lygčių su dviem nežinomomis funkcijomis sistemą. Šios sistemos sprendiniai

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\tau)\,d\tau - \frac{\mathrm{c}}{2a},$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\tau)\,d\tau + \frac{\mathrm{c}}{2a};$$

čia c – laisvoji konstanta. Pirmoje formulėje argumentą x pakeiskime $x - at$, o antroje formulėje $x + at$. Įstatę gautas funkcijų c_1, c_2 išraiškas į (5.6) formulę, gausime (5.4) Koši uždavinio sprendinį

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\,d\tau. \tag{5.7}$$

Pastaroji formulė vadinama *Dalambero* formule.

Tarkime, funkcija ψ yra diferencijuojama, o funkcija φ – dukart diferencijuojama. Tada funkcija u, apibrėžta (5.7) formule, yra dukart diferencijuojama, tenkina homogeninę bangavimo lygtį ir (5.2) pradines sąlygas. Be to, jeigu šitos sąlygos yra patenkintos, tai iš (5.7) formulės išplaukia, kad (5.4) Koši uždavinio sprendinys yra vienintelis ir tolygiai priklauso nuo pradinių sąlygų.

P a s t a b a. Jeigu (5.4) Koši uždavinio sprendinys nagrinėjamas tik trikampyje, apribotame tiesėmis

$$x - at = \text{const}, \; x + at = \text{const}, \; t = 0,$$

tai (5.2) pradines sąlygas pakanka apibrėžti tik šio trikampio pagrinde (žr. 5.1 pav.).

Rasime (5.5) Koši uždavinio sprendinį. Tuo tikslu kiekvienam $\tau > 0$ sudarome pagalbinį uždavinį:

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \; x \in \mathbb{R}, \; t > \tau, \tag{5.8}$$

$$v|_{t=\tau} = 0, \; v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau). \tag{5.9}$$

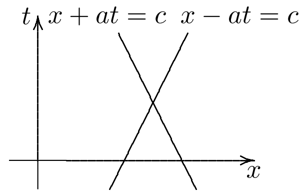
Jeigu funkcija f yra diferencijuojama, tai pagal Dalambero formulę (5.8), (5.9) Koši uždavinio sprendinys

$$v(x,t,\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy.$$

Parodysime, kad funkcija

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau \tag{5.10}$$

yra (5.1) Koši uždavinio sprendinys.



5.1 pav.

Kadangi funkcija v yra (5.8), (5.9) Koši uždavinio sprendinys, tai

$$u_t = v(x,t,t) + \int_0^t v_t(x,t,\tau)\,d\tau = \int_0^t v_t(x,t,\tau)\,d\tau,$$

$$u_{tt} = v_t(x,t,t) + \int_0^t v_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau = f(x,t) + \int_0^t v_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau,$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) + \int_0^t \left[v_{tt}(x,t,\tau) - a^2 v_{xx}(x,t,\tau)\right]\,d\tau = f(x,t).$$

Taigi funkcija u, apibrėžta (5.10) formule, yra (5.5) Koši uždavinio sprendinys[1].

[1] Šitas metodas vadinamas *Diuamelio principu*. Jo esmė yra ta, kad tiesinės nehomogeninės dalinių išvestinių lygties Koši arba mišraus uždavinio su nulinėmis pradinėmis sąlygomis sprendinį galima išreikšti atitinkamu homogeninės lygties sprendiniu. Pavyzdžiui, Koši uždavinio

$$u_{tt} + Lu = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0$$

sprendinį galima išreikšti formule

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau,$$

kurioje $v(x,t,\tau)$ yra Koši uždavinio

$$v_{tt} + Lv = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > \tau,$$

$$v|_{t=\tau} = 0,\ v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau)$$

sprendinys, o L – tiesinis diferencialinis operatorius, kurio koeficientai nepriklauso nuo t ir kuriame kintamojo t atžvilgiu yra ne aukštesnės kaip pirmos eilės išvestinės. Analogiškai yra konstruojamas ir Koši uždavinio

$$u_t + Mu = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,$$

Akivaizdu, kad (5.4), (5.5) Koši uždavinių sprendinių suma, t.y. funkcija

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\, dy +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\, dyd\tau, \tag{5.11}$$

yra (5.1), (5.2) Koši uždavinio sprendinys. Funkcija u yra dukart diferencijuojama, jeigu funkcijos ψ ir f yra diferencijuojamos, o funkcija φ – dukart diferencijuojama.

P a s t a b a. Naudojant (5.6) formulę, galima rasti ne tik Koši, bet ir mišraus uždavinio sprendinį. Sprendžiant mišrųjį uždavinį, reikia turėti omenyje tai, kad funkcijos c_1 ir c_2 apibrėžtos ne visoms argumentų reikšmėms. Argumentai $x - at$ ir $x + at$ gali ir nepriklausyti funkcijų c_1, c_2 apibrėžimo sritims. Taigi, sprendžiant mišrų uždavinį, reikia tinkamai pratęsti funkcijas c_1, c_2 arba (tai visiškai ekvivalentu) φ ir ψ.

$$u|_{t=0} = 0$$

sprendinys. Čia M – tiesinis diferencialinis operatorius, kurio koeficientai nepriklauso nuo kintamojo t ir kuriame yra išvestinės tik pagal kintamuosius x.

5.2. KOŠI UŽDAVINYS PLOKŠTUMOJE

Tiesinę hiperbolinę antros eilės lygtį su dviem nepriklausomais kintamaisiais naudojant neišsigimusią transformaciją galima suvesti į antrąjį kanoninį pavidalą. Todėl iš karto nagrinėsime lygtį:

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y). \tag{5.12}$$

Priminsime, kad pastarosios lygties charakteristikos yra tiesės

$$x = \text{const}, \ \ y = \text{const}.$$

Tegu plokštumoje Oxy kreivė l yra apibrėžta lygtimis $y = g(x)$ ir $x = h(y)$ (funkcija h yra atvirkštinė funkcijai g) ir nė viename taške neliečia (5.12) lygties charakteristikų. Be to, tegu funkcijos g ir h yra diferencijuojamos.

Kreivės l aplinkoje ieškosime (5.12) lygties sprendinio, tenkinančio pradines sąlygas:

$$u|_l = \varphi(x), \ \ u_y|_l = \psi(x). \tag{5.13}$$

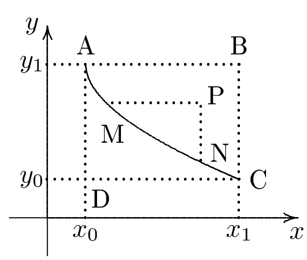
Tarkime, funkcijos $a, \ b, \ c, \ f, \ \varphi, \ \varphi'$ ir ψ yra tolydžios. Atkreipsime dėmesį į tai, kad funkcijos u išvestinė u_x kreivėje l taip pat yra vienareikšmiškai apibrėžta. Iš tikrųjų diferencijuodami pirmąją pradinę sąlygą, gausime lygybę

$$u_x|_l + g'(x)u_y|_l = \varphi'(x),$$

kurią galima perrašyti taip:

$$u_x|_l = \varphi'(x) - g'(x)\psi(x) \equiv \omega(x). \tag{5.14}$$

Pažymėkime $u_x = v, \ u_y = w$. Stačiakampyje ABCD (žr. 5.2 pav.) imkime bet kokį tašką $P(x,y)$. Iš jo brėžiame atkarpas PM ir PN, lygiagrečias su koordinačių ašimis, iki susikirtimo su kreive l.



5.2 pav.

Kairę ir dešinę lygybės $u_y = w$ puses integruojame atkarpa PN, o (5.12) lygtį – atkarpomis PN ir PM. Tada (5.12), (5.13) uždavinys susiveda į integralinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} u(x,y) = & \varphi(x) + \int\limits_{g(x)}^{y} w(x,\eta)\,d\eta, \\ v(x,y) = & \omega(x) + \int\limits_{g(x)}^{y} \big(f(x,\eta) - av - bw - cu\big)\,d\eta, \\ w(x,y) = & \psi(x) + \int\limits_{h(y)}^{x} \big(f(\xi,y) - av - bw - cu\big)\,d\xi. \end{cases}$$

Tegu

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Tada gautą integralinę lygčių sistemą galima perrašyti taip:

$$\mathrm{U} = \mathrm{KU} + \mathrm{F}; \tag{5.15}$$

čia

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \omega(x) + \int\limits_{g(x)}^{y} f(x,\eta)d\eta \\ \psi(x) + \int\limits_{h(y)}^{x} f(\xi,y)d\xi \end{pmatrix}, \ \mathrm{KU} = \begin{pmatrix} \int\limits_{g(x)}^{y} w(x,\eta)d\eta \\ \int\limits_{g(x)}^{y} \big(-a(x,\eta)v - bw - cu\big)d\eta \\ \int\limits_{h(y)}^{x} \big(-a(\xi,y)v - bw - cu\big)d\xi \end{pmatrix}.$$

Funkcija U yra tolydus (5.15) lygties sprendinys tada ir tik tada, kai funkcija u yra (5.12), (5.13) uždavinio sprendinys. Todėl pakanka išnagrinėti (5.15) lygtį.

Jeigu koeficientai $a = b = c = 0$, tai

$$\begin{cases} u(x,y) = & \varphi(x) + \psi(x)\big(y - g(x)\big) + \int\limits_{g(x)}^{y} \int\limits_{h(y)}^{x} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \\ v(x,y) = & \omega(x) + \int\limits_{g(x)}^{y} f(x,\eta)\,d\eta, \\ w(x,y) = & \psi(x) + \int\limits_{h(y)}^{x} f(\xi,y)\,d\xi. \end{cases}$$

Išnagrinėsime bendrąjį atvejį. Įrodysime, kad (5.15) lygtis turi tolydų sprendinį ir jis yra vienintelis. Iš pradžių įsitikinsime, kad K^n yra suspaudžiantysis operatorius, jeigu tik n yra pakankamai didelis sveikas skaičius.

Tegu Ω – sritis, apribota kreive l ir atkarpomis AB ir BC (žr. 8.2 pav.),

$$|\mathrm{U}| = \max\{|u|, |v|, |w|\}, \ M = \max_{\overline{\Omega}} |\mathrm{U}|, \ A = \max_{\overline{\Omega}}\{|a| + |b| + |c| + 1\}.$$

Matematinės indukcijos metodu įrodysime nelygybę

$$\big|\mathrm{K}^n\mathrm{U}(x,y)\big| \le \frac{MA^n}{n!}(x + y - x_0 - y_0)^n, \ \forall n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.16}$$

Kai $n = 0$, nelygybė yra akivaizdi. Tegu $n = 1$. Tada

$$|\mathrm{KU}| = \max\Big\{\Big|\int\limits_{g(x)}^{y} w(x,\eta)\,d\eta\Big|,$$

$$\Big|\int\limits_{g(x)}^{y}\big(a(x,\eta)v + bw + cu\big)\,d\eta\Big|,\ \Big|\int\limits_{h(y)}^{x}\big(a(\xi,y)v + bw + cu\big)\,d\xi\Big|\Big\} \leq$$

$$\leq MA(x + y - x_0 - y_0).$$

Tarkime, (5.16) nelygybė yra teisinga kokiam nors n. Įrodysime, kad ji yra teisinga $n+1$. Tegu $u_n,\ v_n$ ir w_n yra vektoriaus $\mathrm{K}^n\mathrm{U}$ komponentės. Tada

$$|\mathrm{K}^{n+1}\mathrm{U}| = |\mathrm{K}(\mathrm{K}^n\mathrm{U})| = \max\Big\{\Big|\int\limits_{g(x)}^{y} w_n(x,\eta)\,d\eta\Big|,$$

$$\Big|\int\limits_{g(x)}^{y}\big(a(x,\eta)v_n + bw_n + cu_n\big)\,d\eta\Big|,\Big|\int\limits_{h(y)}^{x}\big(a(\xi,y)v_n + bw_n + cu_n\big)\,d\xi\Big|\Big\}\leq$$

$$\leq \frac{MA^n}{n!}A\max\Big\{\Big|\int\limits_{g(x)}^{y}(x + \eta - x_0 - \eta_0)^n\,d\eta\Big|,\Big|\int\limits_{h(y)}^{x}(\xi + y - \xi_0 - y_0)^n\,d\xi\Big|\Big\} \leq$$

$$\leq \frac{MA^{n+1}}{(n+1)!}(x + y - x_0 - y_0)^{n+1}.$$

Taigi $\forall\ n = 0, 1, 2, \ldots$ yra teisinga (5.16) nelygybė.

Tegu U ir $\tilde{\mathrm{U}}$ – bet kokie du vektoriai. Tada (žr. (5.16) nelygybe)

$$\max_{\overline{\Omega}}\big|\mathrm{K}^n\mathrm{U} - \mathrm{K}^n\tilde{\mathrm{U}}\big| \leq \frac{A^n d^n}{n!}\max_{\overline{\Omega}}\big|\mathrm{U} - \tilde{\mathrm{U}}\big|; \tag{5.17}$$

čia $d = x_1 + y_1 - x_0 - y_0$. Egzistuoja skaičius N toks, kad

$$\frac{A^n d^n}{n!} < 1, \quad \forall\ n > N.$$

Tegu $n > N$. Tada K^n yra suspaudžiantysis operatorius.

Pažymėkime $\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{U} = \mathrm{KU} + \mathrm{F}$. Pastebėsime, kad

$$\big|\widehat{\mathrm{K}}^n\mathrm{U} - \widehat{\mathrm{K}}^n\tilde{\mathrm{U}}\big| = \big|\mathrm{K}\big(\widehat{\mathrm{K}}^{n-1}\mathrm{U}\big) + \mathrm{F} - \mathrm{K}\big(\widehat{\mathrm{K}}^{n-1}\tilde{\mathrm{U}}\big) - \mathrm{F}\big| =$$

$$= \big|\mathrm{K}\big(\widehat{\mathrm{K}}^{n-1}\mathrm{U} - \widehat{\mathrm{K}}^{n-1}\tilde{\mathrm{U}}\big)\big| = \ldots = \big|\mathrm{K}^n\mathrm{U} - \mathrm{K}^n\tilde{\mathrm{U}}\big|.$$

Todėl $\widehat{\mathrm{K}}^n$ taip pat yra suspaudžiantysis operatorius.

Tada lygtis

$$\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{U} = \mathrm{U},$$

kartu ir (5.15) lygtis turi vienintelį tolydų sprendinį. Parodysime, kad (5.15) lygties sprendinys tolygiai priklauso nuo pradinių sąlygų. Tarkime,

$$\mathrm{U} = \mathrm{KU} + \mathrm{F}, \quad \tilde{\mathrm{U}} = \mathrm{K}\tilde{\mathrm{U}} + \tilde{\mathrm{F}}.$$

Tada

$$\mathrm{U} - \tilde{\mathrm{U}} = \mathrm{K}(\mathrm{U} - \tilde{\mathrm{U}}) + \mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}} = \mathrm{K}^2(\mathrm{U} - \tilde{\mathrm{U}}) + \mathrm{K}(\mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}}) + \mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}} = \ldots =$$

$$= \mathrm{K}^n(\mathrm{U} - \tilde{\mathrm{U}}) + \mathrm{K}^{n-1}(\mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}}) + \ldots + \mathrm{K}(\mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}}) + \mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}}$$

ir yra teisinga formulė

$$\mathrm{U} - \tilde{\mathrm{U}} = \mathrm{K}^n(\mathrm{U} - \tilde{\mathrm{U}}) + \mathrm{K}^{n-1}(\mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}}) + \ldots + \mathrm{K}(\mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}}) + \mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}}.$$

Pasinaudoję (5.17) nelygybe, įvertinsime kiekvieną dešinės šios lygybės pusės narį. Tada gausime įvertį

$$\Big(1 - \frac{A^n d^n}{n!}\Big) \max_{\overline{\Omega}} |\mathrm{U} - \tilde{\mathrm{U}}| \le \max_{\overline{\Omega}} |\mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}}| \sum_{s=0}^{n-1} \frac{A^s d^s}{s!}.$$

Kadangi

$$1 - \frac{A^n d^n}{n!} > 0,$$

tai

$$\max_{\overline{\Omega}} |\mathrm{U} - \tilde{\mathrm{U}}| \le \Big(1 - \frac{A^n d^n}{n!}\Big)^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{A^s d^s}{s!} \max_{\overline{\Omega}} |\mathrm{F} - \tilde{\mathrm{F}}|.$$

Taigi esant mažam pradinių duomenų pokyčiui gaunamas mažas sprendinio pokytis.

Apibendrindami šiuos rezultatus galime tvirtinti: jeigu funkcijos a, b, c ir f yra tolydžios srityje $\overline{\Omega}$, o funkcijos φ, φ' ir ψ yra tolydžios atkarpoje $[x_0, x_1]$, be to, kreivė l yra laisvoji (5.12) lygties atžvilgiu, tai egzistuoja vienintelis (5.12), (5.13) Koši uždavinio sprendinys, tolygiai priklausantis nuo pradinių duomenų.

5.3. GURSA UŽDAVINYS

Tegu

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0\}.$$

Srityje Ω ieškosime lygties

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \tag{5.18}$$

sprendinio, tenkinančio pradines sąlygas

$$u|_{x=0} = \varphi(y), \qquad u|_{y=0} = \psi(x). \tag{5.19}$$

Taip suformuluotas uždavinys yra vadinamas *Gursa* uždaviniu.

P a s t a b a. Tiesės $x = 0$ ir $y = 0$ yra (5.18) lygties charakteristikos. Todėl (5.19) sąlygose funkcijos u išvestinių u_x ir u_y laisvai apibrėžti negalima.

Tarkime, funkcijos $a,\ b,\ c$ ir f yra tolydžios stačiakampyje $\overline{\Omega}$, o funkcijos φ ir ψ diferencijuojamos atkarpose $[0, y_0]$ ir $[0, x_0]$. Be to, tegu $\varphi(0) = \psi(0)$.

Pažymėkime $u_x = v$, $u_y = w$. Tada (5.18), (5.19) uždavinys, lygiai taip pat kaip ir 8.2 skyrelyje, susiveda į trijų integralinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} u(x, y) = & \psi(x) + \int\limits_0^y w(x, \eta)d\eta, \\ v(x, y) = & \psi'(x) + \int\limits_0^y \big(f(x, \eta) - av - bw - cu\big)d\eta, \\ w(x, y) = & \varphi'(y) + \int\limits_0^x \big(f(\xi, y) - av - bw - cu\big)d\xi. \end{cases}$$

Tegu

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Tada šią integralinių lygčių sistemą galima perrašyti kaip operatorinę lygtį:

$$\mathrm{U} = \mathrm{KU} + \mathrm{F}; \tag{5.20}$$

čia

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi'(x) + \int\limits_{g(x)}^y f(x, \eta)d\eta \\ \varphi'(x) + \int\limits_{h(y)}^x f(\xi, y)d\xi \end{pmatrix}, \ \mathrm{KU} = \begin{pmatrix} \int\limits_{g(x)}^y w(x, \eta)d\eta \\ \int\limits_{g(x)}^y \big(-a(x, \eta)v - bw - cu\big)d\eta \\ \int\limits_{h(y)}^x \big(-a(\xi, y)v - bw - cu\big)d\xi \end{pmatrix}.$$

Vektorinė funkcija U yra tolydus (5.20) lygties sprendinys tada ir tik tada, kai funkcija u yra (5.18), (5.19) uždavinio sprendinys. Todėl pakanka išnagrinėti

(5.20) lygtį. Šioje lygtyje operatorius K yra to paties tipo kaip ir (5.15) lygtyje. Be to, visos funkcijos įeinančios į operatorių K, tenkina reikiamas glodumo sąlygas. Todėl galime tvirtinti, kad (5.20) lygtis stačiakampyje $\overline{\Omega}$ turi vienintelį tolydų sprendinį, tolygiai priklausantį nuo pradinių duomenų.

P a s t a b a. Gursa uždavinio, taip pat (5.12), (5.13) uždavinio sprendinį galima rasti nuoseklių̨jų artinių metodu. Gursa uždavinio atveju pradinį artinį galima imti tokį:

$$u_0 = \psi(x), \quad v_0 = \psi'(x) + \int\limits_0^y f(x,\eta)d\eta, \quad w_0 = \varphi'(y) + \int\limits_0^x f(\xi,y)d\xi,$$

o kitus artinius apibrėžti rekurenčiosiomis formulėmis:

$$u_s = \int\limits_0^y w_{s-1}(x,\eta)d\eta,$$

$$v_s = -\int\limits_0^y \big(a(x,\eta)v_{s-1} + bw_{s-1} + cu_{s-1}\big)d\eta,$$

$$w_s = -\int\limits_0^x \big(a(\xi,y)v_{s-1} + bw_{s-1} + cu_{s-1}\big)d\xi.$$

Kadangi

$$|u_s| \le \frac{MA^s}{s!}(x+y)^s, \quad |v_s| \le \frac{MA^s}{s!}(x+y)^s, \qquad |w_s| \le \frac{MA^s}{s!}(x+y)^s,$$

tai eilutės

$$u = \sum_{s=0}^\infty u_s, \quad v = \sum_{s=0}^\infty v_s, \quad w = \sum_{s=0}^\infty w_s$$

konverguoja tolygiai, o funkcijos $u,\ v$ ir w tenkina (5.20) lygtį.

5.4. RYMANO METODAS

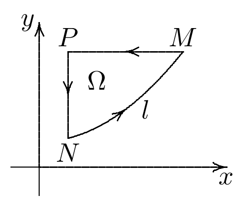
Išvesime integralinę formulę, kuri apibrėžia (5.12), (5.13) uždavinio sprendinį funkcijomis, esančiomis lygties ir pradinių sąlygų dešinėse pusėse. Tarkime, diferencialinėje išraiškoje

$$Lu \equiv u_{xy} + au_x + bu_y + cu$$

funkcijos a ir b yra diferencijuojamos, o funkcija c tolydi. Tada operatorių L atitinka formaliai jungtinis operatorius

$$L^*v \equiv v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv.$$

Tegu l yra glodi plokštumoje Oxy kreivė, nė viename savo taške neliečianti tiesių $x = \text{const}$, $y = \text{const}$; $P(x_0, y_0)$ – koks nors fiksuotas taškas. Iš jo iki susikirtimo su kreive l brėžiame lygiagrečias su koordinačių ašimis atkarpas PM ir PN. Apribotą kreive l ir atkarpomis PM, PN sritį pažymėsime Ω (žr. 5.3 pav.).



5.3 pav.

Tarkime, srityje Ω funkcijos u ir v yra pakankamai glodžios. Tada yra teisinga Gryno formulė

$$\int_{\Omega} (vLu - uL^*v)\, dxdy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} [vu_x \cos(\mathbf{n}, y) + auv \cos(\mathbf{n}, x) + buv \cos(\mathbf{n}, y) - uv_y \cos(\mathbf{n}, x)]\, dl; \qquad (5.21)$$

čia kontūras $\partial\Omega$ lygus atkarpų PM, PN ir lanko MN sumai. Kadangi atkarpos PN taškuose $\cos(\mathbf{n}, x) = -1$, $\cos(\mathbf{n}, y) = 0$, tai (5.21) formulėje integralas šia atkarpa lygus

$$\int_N^P (v_y - av)u\, dy.$$

Atkarpos PM taškuose $\cos(\mathbf{n}, x) = 0$, $\cos(\mathbf{n}, y) = 1$. Todėl (5.21) formulėje integralas šia atkarpa lygus

$$\int_P^M (vu_x + buv)\, dx = vu\Big|_P^M - \int_P^M (v_x - bv)u\, dx.$$

Įstatę šiuos reiškinius į (5.21) formulę, perrašysime ją taip:

$$vu\Big|_P = vu\Big|_M - \int\limits_\Omega (vLu - uL^*v)\,dxdy + \int\limits_N^P (v_y - av)u\,dy - \int\limits_P^M (v_x - bv)u\,dx +$$

$$+ \int\limits_{NM} [vu_x \cos(\mathbf{n}, y) + auv\cos(\mathbf{n}, x) + buv\cos(\mathbf{n}, y) - uv_y\cos(\mathbf{n}, x)]\,dl.$$

Tarkime, šioje lygybėje u yra (5.12), (5.13) Koši uždavinio sprendinys, o v yra Gursa uždavinio

$$L^*v = 0,\ v\Big|_{PN} = \exp\Big\{\int\limits_{y_0}^{y} a(x,s)\,ds\Big\},\ v\Big|_{MP} = \exp\Big\{\int\limits_{x_0}^{x} b(s,y)\,ds\Big\},\ v\Big|_P = 1$$

sprendinys. Tada

$$u\Big|_P = vu\Big|_M - \int\limits_\Omega vf\,dxdy + \int\limits_{NM} [vu_x\cos(\mathbf{n}, y) + auv\cos(\mathbf{n}, x) +$$

$$+ buv\cos(\mathbf{n}, y) - uv_y\cos(\mathbf{n}, x)]\,dl.$$

Pakeitę integralą kontūru NM antros rūšies kreiviniu integralu, gausime *Rymano* formulę

$$u\Big|_P = vu\Big|_M - \int\limits_\Omega vf\,dxdy + \int\limits_{NM} (vu_x + buv)\,dx + (uv_y - auv)\,dy. \tag{5.22}$$

Funkcija v yra vadinama *Rymano* funkcija. Ji nepriklauso nei nuo Koši sąlygų, nei nuo kontūro l. Funkcija u ir jos išvestinės u_x, u_y kontūro NM taškuose yra žinomos. Todėl (5.22) formulė apibrėžia (5.12), (5.13) Koši uždavinio sprendinį taške P Rymano funkcija v ir funkcijomis, esančiomis (5.12) lygties bei (5.13) pradinių sąlygų dešinėse pusėse.

Jeigu taikydami (5.21) Gryno formulę išvestines u_{xy} ir v_{xy} pakeisime išvestinėmis u_{yx} ir v_{yx} ir pakartosime (5.22) formulės išvedimą, tai gausime kitą Rymano formulę

$$u\Big|_P = vu\Big|_N - \int\limits_\Omega vf\,dxdy + \int\limits_{NM} (buv - uv_x)\,dx + (-vu_y - auv)\,dy. \tag{5.23}$$

P a s t a b a. Jeigu patenkintos sąlygos, garantuojančios Koši ir Gursa uždavinių sprendinių egzistavimą (žr. 8.2 ir 8.3 skyrelius), tai (5.12), (5.13) Koši uždavinio sprendinį galima išreikšti bet kuria iš (5.21), (5.22), (5.23) formulių. Be to, šios formulės apibrėžia tą patį sprendinį ir jis tolygiai priklauso nuo pradinių sąlygų.

5.5. ENERGETINĖS NELYGYBĖS. VIENATIES TEOREMA

Nagrinėsime n-matę bangavimo lygtį

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \tag{5.24}$$

Ją atitinka charakteristinė lygtis

$$\omega_t^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_{x_i}^2 = 0. \tag{5.25}$$

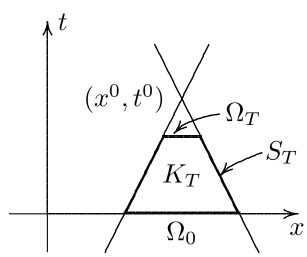
Šios lygties sprendinys

$$\omega(x,t) = a(t - t_0) \pm |x - x_0|$$

apibrėžia erdvėje $\mathbb{R}^n$ charakteristinį kūgį. Kūgio paviršius apibrėžiamas lygtimi

$$a(t - t_0) \pm |x - x_0| = 0.$$

Tegu K_T – nupjautinis kūgis, kurio pagrindai Ω_0 ir Ω_T yra plokštumose $t = 0$ ir $t = T$, $T \in [0, t_0]$; S_T – jo šoninis paviršius (žr. 5.4 pav.).



5.4 pav.

Tarkime, kūgyje $\overline{K}_T$ funkcija f yra tolydi, o funkcija u – dukart diferencijuojama ir tenkina (5.24) lygtį. Tada

$$\int\limits_{K_T} (u_{tt} - a^2 \Delta u) u_t \, dxdt = \int\limits_{K_T} u_t f \, dxdt. \tag{5.26}$$

Pasinaudoję integravimo dalimis formule ir akivaizdžiomis tapatybėmis

$$u_t u_{tt} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u_t^2, \quad u_{x_i} u_{x_i t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u_{x_i}^2, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n,$$

perrašysime (5.26) tapatybę taip:

$$\int\limits_{\partial K_T} \Big[\frac{1}{2} \big(u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \big) \cos(\mathbf{n}, t) - \sum_{i=1}^{n} a^2 u_{x_i} u_t \cos(\mathbf{n}, x_i) \Big] \, dS =$$

$$= \int\limits_{K_T} u_t f \, dx dt; \tag{5.27}$$

čia ∂K_T – nupjautinio kūgio K_T paviršius; $\mathbf{n}$ – išorinis kūgio K_T atžvilgiu vienetinis normalės vektorius paviršiui ∂K_T. Kadangi

$$\cos(\mathbf{n}, t)|_{\Omega_T} = 1, \quad \cos(\mathbf{n}, t)|_{\Omega_0} = -1,$$

$$\cos(\mathbf{n}, x_i)|_{\Omega_T} = 0, \quad \cos(\mathbf{n}, x_i)|_{\Omega_0} = 0,$$

$\forall i = 1, 2, \ldots, n$, tai (5.27) tapatybę galima perrašyti taip:

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_t} \big(u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\big) \, dx\big|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2} \int\limits_{S_T} \Big\{ \big(u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\big) \cos(\mathbf{n}, t) -$$

$$-2a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i} u_t \cos(\mathbf{n}, x_i) \Big\} \, dS = \int\limits_{K_T} u_t f \, dx dt. \tag{5.28}$$

Pastebėsime, kad paviršiaus S_T taškuose

$$\omega_t = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \cos(\mathbf{n}, t), \quad \omega_{x_i} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \cos(\mathbf{n}, x_i), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Įstatę šitas reikšmes į (5.25) lygtį, gausime lygybę

$$\cos^2(\mathbf{n}, t) - a^2 \sum_{i=1}^n \cos^2(\mathbf{n}, x_i) = 0.$$

Panaudoję ją (5.28) formulėje, integralą paviršiumi S_T perrašysime taip:

$$\int\limits_{S_T} \frac{a^2}{\cos(\mathbf{n}, t)} \sum_{i=1}^n \big(u_t \cos(\mathbf{n}, x_i) - u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, t)\big)^2 \, dS.$$

Kadangi $\cos(\mathbf{n}, t)|_{S_T} > 0$, tai pointegralinė šio integralo funkcija yra neneigiama. Todėl atmetę (5.28) lygybėje integralą paviršiumi S_T, gausime nelygybę

$$\int\limits_{\Omega_t} \big(u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\big) \, dx\big|_{t=0}^{t=T} \le \int\limits_{K_T} 2 u_t f \, dx dt. \tag{5.29}$$

Tuo atveju, kai $f(x, t) \equiv 0$, ją galima perrašyti taip:

$$\int\limits_{\Omega_t} \big(u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\big) \, dx \le \int\limits_{\Omega_0} \big(u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\big) \, dx. \tag{5.30}$$

Bendruoju atveju (žr. [1]) yra teisingas įvertis

$$\int\limits_{\Omega_T} (u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2)\, dx \leq$$

$$\leq e^T \Big\{ \int\limits_{\Omega_0} (u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2)\, dx + \int\limits_{K_T} f^2\, dxdt \Big\}. \tag{5.31}$$

Nelygybės (5.30) ir (5.31) dažnai yra vadinamos energetinėmis nelygybėmis.

P a s t a b a. Pateiktą (5.31) nelygybės įrodymą be didelių pakeitimų galima atlikti gana plačiai hiperbolinių lygčių klasei. Šiai klasei priklauso lygtis

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) u_{x_i} + a(x,t)u = f(x,t);$$

čia: funkcijos a_i, a ir f yra tolydžios, o funkcijos $a_{ij} = a_{ji}$ yra diferencijuojamos, be to,

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \nu = \text{const} > 0.$$

5.1 teorema. *Tarkime, Koši uždaviniuose*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f_1(x,t), \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi_1(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f_2(x,t), \\ u|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi_2(x) \end{cases}$$

funkcijos f_1, f_2 sutampa kūgyje K_{t_0}, o funkcijos φ_1, φ_2 ir ψ_1, ψ_2 sutampa srityje Ω_0. Jeigu egzistuoja šių uždavinių sprendiniai, tai kūgyje K_{t_0} jie sutampa.

◁ Tegu u_1 yra pirmojo, o u_2 – antrojo uždavinio sprendiniai. Tada kūgyje K_{t_0} funkcija $u = u_1 - u_2$ tenkina homogeninę bangavimo lygtį

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0,$$

o srities Ω_0 taškuose nulines pradines sąlygas

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Todėl (žr. (8.31) nelygybę)

$$\int\limits_{\Omega_t} (u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2)\, dx \leq \int\limits_{\Omega_0} (u_t^2 + a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2)\, dx = 0.$$

Ši nelygybė yra galima tik tuo atveju, kai $u_t = u_{x_1} = \cdots = u_{x_n} = 0$, t.y. kai $u(x,t) = \text{const}$. Kadangi $u(x,0) = 0$, tai $u(x,t) = 0$ $\forall (x,t) \in K_{t_0}$ ▷

I š v a d a. Tegu u yra Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

sprendinys. Jeigu aibių $\operatorname{supp} \varphi$ ir $\operatorname{supp} \psi$ sankirta su sritimi Ω_0 yra tuščia aibė, tai kūgyje K_{t_0} sprendinys u tapačiai lygus nuliui.

5.6. BANGAVIMO LYGTIES SPRENDIMAS TRIMAČIU ATVEJU. KOŠI UŽDAVINYS

Tegu $n = 3$. Ieškosime bangavimo lygties

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \tag{5.32}$$

sprendinio, tenkinančio pradines sąlygas

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{5.33}$$

Kadangi uždavinys yra tiesinis, tai jį galima išskaidyti į tris paprastesnius uždavinius. Kiekvieną iš jų nagrinėsime atskirai. Iš pradžių rasime homogeninės bangavimo lygties

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \tag{5.34}$$

sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{5.35}$$

Po to rasime (5.34) homogeninės bangavimo lygties sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{5.36}$$

Pabaigoje rasime (5.32) nehomogeninės bangavimo lygties sprendinį, tenkinantį homogenines pradines sąlygas

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Sudėję tokių Koši uždavinių sprendinius, gausime ieškomąjį (5.32), (5.33) Koši uždavinio sprendinį.

Pirmojo Koši uždavinio sprendinio ieškosime vidurkiu metodu. Tegu

$$v(x, r) = \frac{1}{|S_r|} \int\limits_{S_r(x)} \psi(y)\, dS_y \tag{5.37}$$

yra funkcijos ψ reikšmių aritmetinis vidurkis sferoje

$$S_r(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : |x - y| = r \right\}.$$

Ištirsime pagrindines funkcijos v savybes.

1. Tarkime, funkcija ψ yra tolydi. Tada

$$v(x, 0) = \psi(x).$$

◁ Įvertinsime skirtumą

$$|v(x, r) - \psi(x)| = \frac{1}{|S_r|} \Big| \int\limits_{S_r(x)} (\psi(y) - \psi(x))\, dS_y \Big| \le \max_{y \in B_r(x)} |\psi(y) - \psi(x)|.$$

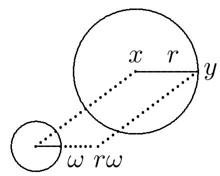
Pagal prielaidą funkcija ψ yra tolydi. Todėl

$$\max_{y\in B_r(x)} |\psi(y)-\psi(x)| \to 0,$$

kai $r\to 0$. Taigi $v(x,0)=\psi(x)$. $\rhd$

2. Tarkime, funkcija ψ yra diferencijuojama. Tada išvestinė v_r yra aprėžta, kai $r\to 0$.

$\lhd$ Kiekvieną tašką $y\in S_r(x)$ vienareikšmiškai atitinka taškas $\omega\in S_1(0)$, ir $y=x+r\omega$ (žr. 5.5 pav.).



5.5 pav.

Be to, $dS_y=r^2d\omega$; čia $d\omega$ – sferos $S_1(0)$ ploto elementas. Todėl (5.37) formulę galima perrašyti taip:

$$v(x,r)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1(0)}\psi(x+r\omega)d\omega. \tag{5.38}$$

Kadangi funkcija ψ yra diferencijuojama, tai

$$\big|v_r(x,r)\big|=\frac{1}{4\pi}\Big|\int\limits_{S_1(0)}\frac{\partial\psi(x+r\omega)}{\partial r}d\omega\Big|\le\max_{y\in B_1(x)}|\nabla\psi(y)|<\infty. \rhd$$

3. Tarkime, funkcija ψ yra dukart diferencijuojama. Tada

$$v_{rr}(x,r)+\frac{2}{r}v_r(x,r)=\Delta_x v(x,r).$$

$\lhd$ Pastebėsime, kad

$$v_r(x,r)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1(0)}\frac{\partial\psi(x+r\omega)}{\partial r}d\omega=\frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{S_r(x)}\frac{\partial\psi(y)}{\partial\mathbf{n}_y}\,dS_y;$$

čia $\mathbf{n}_y$ – sferos $S_r(x)$ vienetinis normalės vektorius taške y. Remiantis (4.5) formule,

$$\int\limits_{S_r(x)}\frac{\partial\psi(y)}{\partial\mathbf{n}_y}\,dS_y=\int\limits_{B_r(x)}\Delta\psi(y)\,dy=\int\limits_0^r\int\limits_{S_\rho(x)}\Delta\psi(y)\,dSd\rho$$

(pasirinkome sferines koordinates). Todėl

$$v_r(x,r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_0^r \int\limits_{S_\rho(x)} \Delta\psi(y)\, dS d\rho,$$

o išvestinė

$$v_{rr}(x,r) = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_0^r \int\limits_{S_\rho(x)} \Delta\psi(y)\, dS d\rho\Big) =$$

$$= -\frac{2}{r}\frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_0^r \int\limits_{S_\rho(x)} \Delta\psi(y)\, dS d\rho + \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S_r(x)} \Delta\psi(y)\, dS =$$

$$= -\frac{2}{r} v_r(x,r) + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1(0)} \Delta_x \psi(x + r\omega) d\omega = -\frac{2}{r} v_r(x,r) +$$

$$+\Delta_x\Big(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1(0)} \psi(x + r\omega) d\omega\Big) = -\frac{2}{r} v_r(x,r) + \Delta_x v(x,r).$$

Toliau funkcijos ψ reikšmių aritmetinį vidurkį sferoje $S_r(x)$ žymėsime

$$\{\psi\}_{x,r}.$$

Parodysime, kad funkcija $u(x,t) = t\{\psi\}_{x,at}$ yra (5.34), (5.35) Koši uždavinio sprendinys. Tiksliau, įrodysime teoremą.

5.2 teorema. *Tegu ψ – dukart diferencijuojama erdvėje $\mathbb{R}^3$ funkcija. Tada funkcija*

$$u(x,t) = t\{\psi\}_{x,at} = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \psi(y)\, dS$$

yra (5.34), (5.35) Koši uždavinio sprendinys.

◁ Pasinaudoję 1 ir 2 funkcijos v savybėmis, parodysime, kad funkcija u tenkina pradines sąlygas:

$$u|_{t=0} = 0 \cdot \psi(x) = 0,$$

$$u_t|_{t=0} = \{\psi\}_{x,at}|_{t=0} + at\frac{\partial}{\partial at}\{\psi\}_{x,at}|_{t=0} = \psi(x).$$

Pasinaudoję 3 funkcijos v savybe, įrodysime, kad funkcija u tenkina homogeninę bangavimo lygtį:

$$u_{tt} = 2a\frac{\partial}{\partial at}\{\psi\}_{x,at} + ta^2\frac{\partial^2}{\partial (at)^2}\{\psi\}_{x,at} =$$

$$= ta^2\left\{\frac{2}{at}\frac{\partial}{\partial at}\{\psi\}_{x,at} + \frac{\partial^2}{\partial (at)^2}\{\psi\}_{x,at}\right\} = ta^2\Delta_x\{\psi\}_{x,at} =$$

$$= a^2\Delta_x t\{\psi\}_{x,at} = a^2\Delta u. \triangleright$$

5.3 teorema. *Tegu φ yra triskart diferencijuojama erdvėje $\mathbb{R}^3$ funkcija. Tada funkcija*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\big(t\{\varphi\}_{x,at}\big)$$

yra (5.34), (5.36) *Koši uždavinio sprendinys.*

◁ Pasinaudoję 1 ir 2 funkcijos v savybe, gausime

$$u|_{t=0} = \{\varphi\}_{x,at}|_{t=0} + at\frac{\partial}{\partial at}\{\varphi\}_{x,at}|_{t=0} = \varphi(x).$$

Naudodamiesi 3 funkcijos v savybe, suskaičiuosime išvestinę

$$u_t = 2a\frac{\partial}{\partial at}\{\varphi\}_{x,at} + a^2t\frac{\partial^2}{\partial(at)^2}\{\varphi\}_{x,at} = a^2t\Delta_x\{\varphi\}_{x,at}.$$

Kai $t \to 0$, reiškinys $\Delta_x\{\varphi\}_{x,at}$ yra aprėžtas. Todėl išvestinė $u_t|_{t=0} = 0$. Be to, akivaizdu, kad

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\big[a^2t\Delta_x\{\varphi\}_{x,at}\big] = a^2\Delta_x\frac{\partial}{\partial t}\big(t\{\varphi\}_{x,at}\big) = a^2\Delta u.$$

Taigi funkcija u yra (5.34), (5.36) Koši uždavinio sprendinys. ▷

Tarkime, yra patenkintos 2 ir 3 teoremų sąlygos. Tada funkcija

$$u(x,t) = t\{\psi\}_{x,at} + \frac{\partial}{\partial t}\big(t\{\varphi\}_{x,at}\big) \tag{5.39}$$

tenkina (5.34) lygtį ir (5.33) pradines sąlygas.

I š v a d a. Tarkime, funkcijos φ ir ψ yra lygios nuliui aprėžtos srities $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ išorėje, o pačioje srityje Ω įgyja bet kokias reikšmes. Kadangi (5.39) formulėje integruojama sfera $S_{at}(x)$, kurios centras yra taške x, o spindulys lygus at, tai (5.34), (5.33) Koši uždavinio sprendinys:

$$\begin{aligned} u(x,t) &\equiv 0, \quad \text{kai} \quad at < d,\\ u(x,t) &\not\equiv 0, \quad \text{kai} \quad d < at < D,\\ u(x,t) &\equiv 0, \quad \text{kai} \quad D > at; \end{aligned}$$

čia: $d = \inf\limits_{y\in\Omega}|x-y|,\ D = \sup\limits_{y\in\Omega}|x-y|$.

Beliko rasti (5.32) lygties sprendinį, tenkinantį homogenines pradines sąlygas. Remdamiesi Diuamelio principu, suformuluosime pagalbinį Koši uždavinį:

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2\Delta w = 0, & x \in \mathbb{R}^3,\ t > \tau,\\ w|_{t=\tau} = 0,\ w_t|_{t=\tau} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{5.40}$$

Tarkime, funkcija $f(x,t)$ turi tolydžias antros eilės išvestines kintamųjų x atžvilgiu ir yra tolydi kintamojo t atžvilgiu. Tada pagal (5.39) formulę (5.40) uždavinio sprendinys

$$w(x,t,\tau) = (t-\tau)\{f\}_{x,a(t-\tau)}.$$

Akivaizdu, kad funkcija

$$u(x,t)=\int\limits_0^t w(x,t,\tau)\,d\tau$$

ir jos išvestinė

$$u_t=w(x,t,t)+\int\limits_0^t w_t(x,t,\tau)\,d\tau=\int\limits_0^t w_t(x,t,\tau)\,d\tau$$

taške $t=0$ lygios nuliui. Parodysime, kad funkcija u tenkina (5.32) lygtį. Iš tikrųjų

$$u_{tt}=w_t(x,t,t)+\int\limits_0^t w_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau=$$

$$=f(x,t)+a^2\Delta\int\limits_0^t w(x,t,\tau)\,d\tau=f(x,t)+a^2\Delta u.$$

Integrale

$$u(x,t)=\int\limits_0^t w(x,t,\tau)\,d\tau$$

vietoje kintamojo τ apibrėšime naują kintamąjį $r=a(t-\tau)$. Tada

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\Big\{\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\int\limits_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(y,\tau)\,dS_y\Big\}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^{at}\frac{1}{r}\int\limits_{S_r(x)} f(y,t-r/a)\,dSdr=\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{B_{at}(x)}\frac{1}{r}f(y,t-r/a)\,dy;$$

čia $r=|x-y|$.

Tegu funkcijos $\varphi,\ \psi$ ir f tenkina nurodytas sąlygas. Tada funkcija

$$u(x,t)=t\{\psi\}_{x,at}+\frac{\partial}{\partial t}\big(t\{\varphi\}_{x,at}\big)+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{B_{at}(x)}\frac{1}{r}f(y,t-r/a)\,dy \tag{5.41}$$

yra (5.32), (5.33) Koši uždavinio sprendinys. Formulė (5.41) yra vadinama *Kirchhofo* formule.

P a s t a b a. Jeigu funkcijos $\varphi,\ \psi$ ir f yra pakankamai glodžios, o funkcija u yra (5.32), (5.33) Koši uždavinio sprendinys, tai pagal vienaties teoremą šį sprendinį galima išreikšti (5.41) formule. Be to, iš pačios formulės matyti, kad maži tam tikra prasme funkcijų φ, ψ ir f pokyčiai duos mažą sprendinio pokytį. Jeigu funkcijų φ, ψ ir f glodumas yra mažesnis už tą, kuris reikalingas (5.41) formulei išvesti, tai funkcija u, apibrėžta (5.41) formule, jau nebus dukart diferencijuojama. Kartu ji nebus (5.32), (5.33) Koši uždavinio sprendinys. Tačiau tai dar nereiškia, kad (5.32), (5.33) Koši uždavinio sprendinys neegzistuoja. Šiuo atveju galime tvirtinti tik tai, kad jo negalima išreikšti (5.41) formule. Kitais metodais galima įrodyti (5.32), (5.33) Koši uždavinio sprendinio egzistavimą, reikalaujant iš funkcijų φ, ψ ir f mažesnio glodumo.

5.7. BANGAVIMO LYGTIES SPRENDIMAS DVIMAČIU ATVEJU. KOŠI UŽDAVINYS

Nagrinėsime Koši uždavinį:

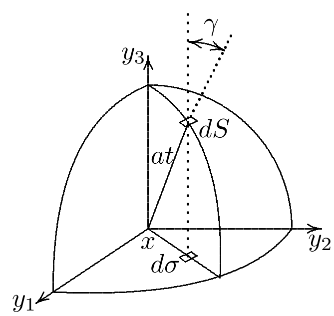
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{5.42}$$

Jo sprendinį išreikšime (5.39) formule. Funkcija

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \psi(y)\, dS + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S_{at}(x)} \varphi(y)\, dS \Big), \; x \in \mathbb{R}^3, \; t > 0,$$

tenkina trimatę bangavimo lygtį ir (5.33) pradines sąlygas. Tarkime, šioje formulėje funkcijos φ ir ψ nepriklauso nuo trečiojo argumento x_3, t.y. $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $\psi = \psi(x_1, x_2)$. Tada funkcija $u(x,t)$ taip pat nepriklausys nuo argumento x_3 ir tenkins dvimatę bangavimo lygtį. Tai leidžia (5.39) formulėje integralus sfera $S_{at}(x) \subset \mathbb{R}^3$ suvesti į integralus skrituliu $B_{at}(x) \subset \mathbb{R}^2$.

Tegu $d\sigma = dy_1 dy_2$ – sferos $S_{at}(x)$ elemento dS projekcija į plokštumą $y_3 = 0$. Tada (žr. 5.6 pav.)



5.6 pav.

$$\cos\gamma = \frac{d\sigma}{dS} = \frac{\sqrt{(at)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}{at}.$$

Todėl (5.39) formulę galima užrašyti taip:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{B_{at}(x)} \frac{\psi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{(at)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{B_{at}(x)} \frac{\varphi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{(at)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}}. \tag{5.43}$$

Jeigu φ yra triskart, o ψ – dukart diferencijuojamos erdvėje $\mathbb{R}^2$ funkcijos, tai funkcija u, apibrėžta (5.43) formule, yra ieškomasis (5.42) Koši uždavinio sprendinys. Formulė (5.43) yra vadinama *Puasono* formule.

I š v a d a. Funkcijos u reikšmė taške (x_1, x_2, t) yra apibrėžta (žr. (5.43)), jeigu funkcijų φ ir ψ reikšmės yra žinomos ne sferoje

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = (at)^2,$$

kaip yra trimačiu atveju, o visame skritulyje

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \leq (at)^2.$$

Tarkime, funkcijos φ ir ψ lygios nuliui aprėžtos srities $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ išorėje, o srities Ω viduje gali įgyti bet kokias reikšmes. Tada (5.43) formule apibrėžtas (5.42) Koši uždavinio sprendinys

$$u(x,t) \equiv 0, \quad \text{kai} \quad at < d,$$

$$u(x,t) \not\equiv 0, \quad \text{kai} \quad d < at < D,$$

$$u(x,t) \not\equiv 0, \quad \text{kai} \quad D > at;$$

čia: $d = \inf\limits_{y \in \Omega} |x - y|$, $D = \sup\limits_{y \in \Omega} |x - y|$.

Beliko išspręsti Koši uždavinį:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{5.44}$$

Jo sprendinį galima rasti taikant Diuamelio principą. Tegu $f(x,t)$ yra dukart diferencijuojama kintamojo x atžvilgiu funkcija ir tolydi kintamojo t atžvilgiu. Tada, lygiai taip pat kaip ir trimačiu atveju, galima įrodyti, kad (5.44) Koši uždavinio sprendinys

$$u(x_1, x_2, t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^t \int\limits_{B_{a(t-\tau)}(x)} \frac{f(y_1, y_2, \tau)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} d\tau. \tag{5.45}$$

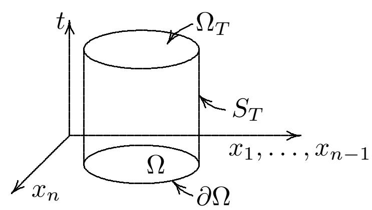
P a s t a b a. Jeigu (5.43) Puasono formulėje funkcijos φ ir ψ nepriklauso nuo antrojo argumento, t.y. $\varphi = \varphi(x_1)$, $\psi = \psi(x_1)$, tai sprendinys u taip pat nepriklausys nuo jo. Kartu jis tenkins vienmatę bangavimo lygtį. Galima parodyti, kad dvimatės bangavimo lygties sprendinys, apibrėžtas (5.43) formule, susiveda į vienmatės bangavimo lygties sprendinį, apibrėžtą (5.7) Dalambero formule.

6 SKYRIUS

Parabolinės lygtys. Koši uždavinys

6.1. MAKSIMUMO PRINCIPAS. VIENATIES TEOREMOS

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – aprėžta sritis, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ – cilindras, kurio apatinis pagrindas – Ω, o viršutinis pagrindas Ω_T, T – cilindro aukštis, $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$ – cilindro šoninis paviršius, $\Gamma_T = S_T \cup \Omega$ (žr. 6.1 pav.).



6.1 pav.

6.1 teorema. *Tegu funkcija $u \in \mathrm{C}^{2,1}(Q_T \cup \Omega_T) \cap \mathrm{C}(\overline{Q}_T)$ tenkina homogeninę šilumos laidumo lygtį*

$$u_t - a^2 \Delta u = 0. \tag{6.1}$$

Tada didžiausią ir mažiausią reikšmes ji įgyja arba cilindro šoniniame paviršiuje S_T, arba jo apatiniame pagrinde Ω, t.y.

$$\min_{\Gamma_T} u(x,t) \le u(x,t) \le \max_{\Gamma_T} u(x,t), \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{6.2}$$

◁ Pakanka įrodyti kurią nors vieną nelygybę. Iš tikrųjų, jeigu funkcija u tenkina (6.1) lygtį ir didžiausią reikšmę įgyja paviršiuje Γ_T, tai funkcija $-u$ taip pat tenkins (6.1) lygtį ir todėl didžiausią reikšmę įgys paviršiuje Γ_T. Tačiau funkcijos $-u$ didžiausia reikšmė sutampa su funkcijos u mažiausia reikšme. Vadinasi, funkcija u mažiausią reikšmę įgys paviršiuje Γ_T.

Įrodysime, kad funkcija u didžiausią reikšmę įgyja paviršiuje Γ_T. Pagal teoremos sąlygą $u \in \mathrm{C}(\overline{Q}_T)$. Todėl egzistuoja taškas $(x^0, t^0) \in \overline{Q}_T$, kuriame funkcija u įgyja didžiausią reikšmę. Tegu

$$\max_{(x,t) \in \Gamma_T} u(x,t) = m, \qquad \max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} u(x,t) = M.$$

Akivaizdu, kad $m \le M$. Reikia įrodyti, kad $m = M$. Tarkime priešingai, kad $m < M$. Tada taškas $(x^0, t^0) \notin \Gamma_T$, nes $u(x^0, t^0) = M$. Todėl (x^0, t^0) yra cilindro Q_T vidinis taškas arba viršutinio pagrindo Ω_T taškas.

Funkcija
$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon(t - t^0), \quad \forall \varepsilon > 0,$$
taške (x^0, t^0) lygi M. Taškuose $(x,t) \in \Gamma_T$ funkcija
$$v(x,t) \le m + \varepsilon T < M$$
visiems pakankamai mažiems ε. Todėl didžiausią reikšmę funkcija v įgyja arba cilindro Q_T viduje, arba jo viršutiniame pagrinde Ω_T. Tegu (x^*, t^*) yra taškas, kuriame funkcija v įgyja didžiausią reikšmę. Iš pradžių tarkime, $(x^*, t^*) \in Q_T$. Tada šitame taške
$$v_t = v_{x_i} = 0, \quad v_{x_i x_i} \le 0, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$
ir yra teisinga nelygybė
$$v_t - a^2 \Delta v \ge 0.$$
Tačiau
$$v_t - a^2 \Delta v = u_t - a^2 \Delta u - \varepsilon = -\varepsilon < 0.$$
Gauta prieštara įrodo, kad taškas (x^*, t^*) nėra cilindro Q_T vidinis taškas.

Tarkime, taškas $(x^*, t^*) \in \Omega_T$, t.y. $t^* = T$, ir x^* – vidinis srities Ω taškas. Tada šitame taške
$$v_t \ge 0, \quad v_{x_i} = 0, \quad v_{x_i x_i} \le 0, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$
ir yra teisinga nelygybė
$$v_t - a^2 \Delta v \ge 0.$$
Tačiau
$$v_t - a^2 \Delta v = u_t - a^2 \Delta u - \varepsilon = -\varepsilon < 0.$$
Gauta prieštara įrodo, kad taškas $(x^*, t^*) \notin \Omega_T$. Taigi prielaida, jog $m < M$, yra neteisinga ir $m = M$. $\triangleright$

Ši teorema kartais vadinama šilumos laidumo lygties *maksimumo principu*. Jį galima taikyti ir platesnei parabolinių lygčių klasei. Pavyzdžiui, 6.1 teorema yra teisinga lygčiai
$$u_t - Lu = 0,$$
kurioje
$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) u_{x_i},$$
o koeficientai a_{ij} tenkina nelygybę
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \ge \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Be to, maksimumo (minimumo) atveju pakanka reikalauti, kad funkcija u tenkintų ne lygtį
$$u_t - Lu = 0,$$

o nelygybę

$$u_t - Lu \le 0 \qquad (u_t - Lu \ge 0).$$

Šitos pastabos leidžia suformuluoti bendresnę teoremą.

6.2 teorema. *Tegu funkcija $u \in \mathrm{C}^{2,1}(Q_T \cup \Omega_T) \cap \mathrm{C}(\overline{Q}_T)$ tenkina nelygybę*

$$u_t - Lu \le 0 \qquad (u_t - Lu \ge 0.)$$

Tada didžiausią (mažiausią) reikšmę funkcija u įgyja paviršiuje Γ_T.

Pasinaudoję maksimumo principu, įrodysime mišriojo ir Koši uždavinių vienaties teoremas.

6.3 teorema. *Mišrusis uždavinys*

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=o} = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u\big|_{S_T} = \psi(x,t), & (x,t) \in S_T, \end{cases} \tag{6.3}$$

negali turėti dviejų skirtingų sprendinių $\mathrm{C}^{2,1}(Q_T \cup \Omega_T) \cap \mathrm{C}(\overline{Q}_T)$ erdvėje.

◁ Tarkime, u_1 ir u_2 – du (6.3) uždavinio sprendiniai. Tada jų skirtumas $u = u_1 - u_2$ yra mišriojo uždavinio

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = 0, & (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=o} = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{S_T} = 0, & (x,t) \in S_T, \end{cases}$$

sprendinys. Paviršiaus S_T ir srities Ω taškuose funkcija u lygi nuliui. Pagal maksimumo principą ji yra lygi nuliui bet kuriame cilindro Q_T taške. Taigi $u_1 = u_2$. ▷

6.4 teorema. *Koši uždavinys*

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u\big|_{t=o} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{6.4}$$

erdvėje $\mathrm{C}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap \mathrm{C}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ negali turėti dviejų skirtingų aprėžtų sprendinių.

◁ Tegu u_1 ir u_2 – du aprėžti (6.4) Koši uždavinio sprendiniai. Tada jų skirtumas $u = u_1 - u_2$ yra aprėžtas Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u|_{t=o} = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

sprendinys. Pažymėsime

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0} |u(x,t)|, \quad Q_{aR,T} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < aR,\ 0 < t < T\};$$

čia R ir T – fiksuoti teigiami skaičiai.

Tiesiogiai galima įrodyti, kad funkcija

$$v_R(x,t) = \frac{M}{R^2}\Big(\frac{|x|^2}{a^2} + 2nt\Big)$$

tenkina homogeninę šilumos laidumo lygtį ir

$$v_R(x,0) \geq 0, \quad \forall x : |x| \leq aR,$$

$$v_R(x,t) \geq M, \quad \forall t : t \in [0,T],\ |x| = aR.$$

Bet tada funkcija $v_R - u$ taip pat tenkins homogeninę šilumos laidumo lygtį ir

$$v_R(x,0) - u(x,0) \geq 0, \quad \forall x : |x| \leq aR,$$

$$v_R(x,t) - u(x,t) \geq 0, \quad \forall t : t \in [0,T],\ |x| = aR.$$

Pagal maksimumo principą funkcija $v_R - u$ įgyja mažiausią reikšmę cilindro $Q_{aR,T}$ šoniniame paviršiuje arba jo apatiniame pagrinde. Tačiau šituose taškuose funkcija $v_R - u$ yra neneigiama. Taigi ji yra neneigiama ir visame cilindre $\overline{Q_{aR,T}}$. Todėl

$$u(x,t) \leq v_R(x,t), \quad \forall (x,t) \in \overline{Q_{aR,T}}.$$

Kadangi funkcija $-u$ taip pat tenkina homogeninę šilumos laidumo lygtį ir taške $t = 0$ lygi nuliui, tai

$$-u(x,t) \leq v_R(x,t), \quad \forall (x,t) \in \overline{Q_{aR,T}}.$$

Paskutinės dvi nelygybės yra ekvivalenčios nelygybei

$$|u(x,t)| \leq v_R(x,t) = \frac{M}{R^2}\Big(\frac{|x|^2}{a^2} + 2nt\Big),\ \forall t \geq 0,\ \forall x : |x| \leq aR.$$

Laisvai pasirenkame taškus x ir t, o skaičių R artiname į begalybę. Tada iš pastarosios nelygybės išplaukia įvertis $|u(x,t)| \leq 0$. Kadangi taškus x ir t pasirinkome laisvai, tai galime tvirtinti, kad funkcija $u(x,t) = 0$ ir $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. $\triangleright$

6.2. ŠILUMOS LAIDUMO LYGTIS. KOŠI UŽDAVINYS

Iš pradžių nagrinėsime Koši uždavinį

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u|_{t=o} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{6.5}$$

Įrodysime, kad jo sprendinį galima išreikšti *Puasono* formule:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\, dy. \tag{6.6}$$

Išvesdami ją naudosime integralinį Furjė transformacijos metodą. Taikydami šį metodą, manysime, kad visi atliekami veiksmai yra teisėti. Kitame skyrelyje įrodysime, kad funkcija u, apibrėžta Puasono formule, yra (6.5) Koši uždavinio sprendinys, jeigu funkcija φ yra tik tolydi ir aprėžta.

Priminsime, kad tiesioginė ir atvirkštinė Furjė transformacijos erdvinių kintamųjų atžvilgiu apibrėžiamos formulėmis:

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u(x,t)\, dx,$$

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \widehat{u}(\xi,t)\, d\xi;$$

čia $x\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \xi_k$ – skaliarinė sandauga erdvėje $\mathbb{R}^n$.

Funkcijų u_t ir Δu Furjė transformacijos:

$$\widehat{u_t}\,(\xi,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u_t(x,t)\, dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u(x,t)\, dx \Big) = \widehat{u}_t(\xi,t),$$

$$\widehat{\Delta u}(\xi,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \Delta u(x,t)\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-i\xi_k) e^{ix\xi} u_{x_k}(x,t)\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-i\xi_k)^2 e^{ix\xi} u(x,t)\, dx = -\xi^2 \widehat{u}(\xi,t);$$

čia $\xi^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2$. Pritaikę Furjė transformacijos operatorių abiems šilumos laidumo lygties pusėms, gausime paprastąją diferencialinę kintamojo t atžvilgiu lygtį

$$\widehat{u}_t + a^2\xi^2\widehat{u} = 0.$$

Į kintamąjį ξ galima žiūrėti kaip į parametrą. Ši lygtis yra tiesinė pirmos eilės lygtis, ir jos bendrasis sprendinys

$$\widehat{u}(\xi, t) = C(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}.$$

Kadangi

$$\widehat{u}(\xi, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u(x, 0)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \varphi(x)\, dx = \widehat{\varphi}(\xi),$$

tai

$$\widehat{\varphi}(\xi) = C(\xi)$$

ir

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}.$$

Pritaikę šios lygybės abiems pusėms atvirkštinį Furjė transformacijos operatorių, gausime

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \widehat{\varphi}(\xi) e^{-a^2\xi^2 t}\, d\xi.$$

Vietoje funkcijos $\widehat{\varphi}$ įstatykime jos integralinę išraišką ir sukeiskime integravimo tvarką. Tada gausime formulę

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\xi - a^2\xi^2 t}\, d\xi \Big) \varphi(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x - y, t)\varphi(y)\, dy;$$

čia

$$G(x - y, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\xi - a^2\xi^2 t}\, d\xi.$$

Suskaičiuosime integralą

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi - a^2\xi^2 t}\, d\xi.$$

Tuo tikslu išskirsime pilnąjį kvadratą

$$-a^2\xi^2 t - ix\xi = -\sum_{k=1}^n (a^2\xi_k^2 t + ix_k\xi_k) = -\sum_{k=1}^n \Big[a^2 t \Big(\xi_k + i\frac{x_k}{2a^2 t} \Big)^2 + \frac{x_k^2}{4a^2 t} \Big]$$

ir integralą $G(x,t)$ perrašysime taip:

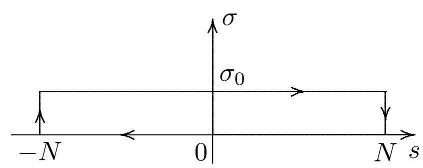
$$G(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t\left(\xi_k + i\frac{x_k}{2a^2t}\right)^2} d\xi_k. \tag{6.7}$$

Šitoje formulėje visi integralai yra to paties tipo. Kiekvieną iš jų galima užrašyti tokiu pavidalu:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t(s+i\sigma_0)^2}\, ds.$$

Parodysime, kad integralas I nepriklauso nuo parametro σ_0.

Tegu l – uždaras kontūras kompleksinėje kintamojo $z = s + i\sigma$ plokštumoje (žr. 6.2 pav.).



6.2 pav.

Pagal Koši teoremą

$$0 = \int_l e^{-a^2tz^2} dz = \int_{-N}^{N} e^{-a^2t(s+i\sigma_0)^2}\, ds + \int_{\sigma_0}^{0} e^{-a^2t(N+i\sigma)^2} d\sigma +$$

$$+ \int_{N}^{-N} e^{-a^2ts^2}\, ds + \int_{0}^{\sigma_0} e^{-a^2t(-N+i\sigma)^2} d\sigma. \tag{6.8}$$

Kadangi

$$\Big| \int_0^{\sigma_0} e^{-a^2t(\pm N+i\sigma)^2} d\sigma \Big| \le e^{-a^2tN^2} \int_0^{\sigma_0} e^{a^2t\sigma^2} d\sigma \to 0$$

kai $N \to \infty$, tai perėję (6.8) formulėje prie ribos, gausime

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t(s+i\sigma_0)^2}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2ts^2}\, ds.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad (6.7) formulėje visi integralai po sandaugos ženklu yra lygūs. Be to, integralas

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2ts^2}\, ds = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{2}{a\sqrt{t}} \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{a\sqrt{t}}\Big(\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dxdy\Big)^{1/2} = \frac{2}{a\sqrt{t}}\Big(\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\varphi dr\Big)^{1/2} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

Todėl funkcija

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \tag{6.9}$$

Tokiu būdu formalųjį (6.5) Koši uždavinio sprendinį galima išreikšti (6.6) formule. Užrašysime ją tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\varphi(y)\,dy. \tag{6.10}$$

Funkcija G yra vadinama šilumos laidumo lygties *fundamentaliuoju* sprendiniu (arba *Gryno* funkcija).

Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u|_{t=o} = 0, & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{6.11}$$

formalųjį sprendinį rasime taikydami Diuamelio principą. Tuo tikslu $\forall\tau > 0$ rasime formalųjį Koši uždavinio

$$\begin{cases} v_t - a^2\Delta v = 0, & x\in\mathbb{R}^n,\ t>\tau,\\ u|_{t=\tau} = f(x,\tau), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

sprendinį. Pagal (6.10) formulę

$$v(x,t,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\,dy.$$

Tiesiogiai galima patikrinti, kad funkcija

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\,dyd\tau \tag{6.12}$$

yra (6.11) Koši uždavinio formalusis sprendinys.

Sudėję (6.5) ir (6.11) Koši uždavinių sprendinius, gausime funkciją

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\,dyd\tau, \tag{6.13}$$

kuri yra formalusis Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

sprendinys.

6.3. PUASONO FORMULĖS PAGRINDIMAS

Tarkime, funkcija φ yra tolydi ir aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$. Įrodysime, kad funkcija

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy \tag{6.14}$$

yra aprėžtas Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u|_{t=o} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{6.15}$$

sprendinys. Iš pradžių įrodysime pagrindines funkcijos G savybes.

1. Srityje $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ funkcija G yra teigiama ir be galo diferencijuojama. Tai tiesiogiai išplaukia iš funkcijos G apibrėžimo.

2. Integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\,dy = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

$\triangleleft$ Kadangi

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

tai

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\,dy = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{y^2}{4a^2t}}\,dy = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y_k^2}{4a^2t}}\,dy_k =$$

$$= \frac{(2a\sqrt{t})^n}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \Big)^n = 1. \triangleright$$

3. Tegu $\delta > 0$ yra fiksuotas teigiamas skaičius. Tada

$$\int\limits_{|x|>\delta} G(x,t)\,dx \to 0,$$

kai $t \to 0$.

$\triangleleft$ Kadangi

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2}\,dx = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds \Big)^n = (\sqrt{\pi})^n < \infty,$$

tai

$$\int\limits_{|x|>\delta} G(x,t)\,dx = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int\limits_{|x|>\delta} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\,dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{|\xi|>\frac{\delta}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2}\,d\xi \ \to 0,$$

kai $t \to 0$. $\triangleright$

4. Tegu funkcija φ yra aprėžta ir tolydi erdvėje $\mathbb{R}^n$, $M = \max\limits_{x\,\in\,\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$ ir $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^n$ – kompaktas. Tada

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy \rightrightarrows \varphi(x), \quad x \in \mathrm{K},$$

kai $t \to 0$, ir

$$\max_{x\,\in\,\mathbb{R}^n,\,t\,\geq\,0} |u(x,t)| \leq M.$$

$\triangleleft$ Laisvai pasirenkame kompaktą K ir pakankamai mažą teigiamą skaičių ε. Tada

$$|u(x,t)-\varphi(x)| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\int\limits_{|x-y|<\delta} G(x-y,t)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy\Big| +$$

$$+ \Big|\int\limits_{|x-y|>\delta} G(x-y,t)(\varphi(y)-\varphi(x))\,dy\Big| \leq$$

$$\leq \max_{|x-y|\,\leq\,\delta} |\varphi(y)-\varphi(x)| + 2M \int\limits_{|x-y|>\delta} G(x-y,t)\,dy;$$

čia δ yra bet koks teigiamas skaičius. Parinksime jį taip, kad būtų patenkinta nelygybė

$$\max_{|x-y|\,\leq\,\delta,\,x\,\in\,\mathrm{K}} |\varphi(x)-\varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pagal 3 funkcijos G savybę egzistuoja skaičius t_0 toks, kad

$$2M \int\limits_{|x-y|>\delta} G(x-y,t)\,dy < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t < t_0.$$

Iš gautų įverčių išplaukia, kad

$$|u(x,t)-\varphi(x)| < \varepsilon \quad x \in \mathrm{K},\ t \in [0,t_0).$$

Taigi

$$u(x,t) \rightrightarrows \varphi(x), \quad x \in \mathrm{K},$$

kai $t \to 0$. Pasinaudoję 2 funkcijos G savybe, įvertinsime funkcijos u modulį:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0} |u(x,t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| = M. \triangleright$$

5. Funkcija G tenkina šilumos laidumo lygtį

$$G_t(x,t) - a^2 \Delta G(x,t) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0. \tag{6.16}$$

$\triangleleft$ Suskaičiuosime išvestines:

$$G_t = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\Big) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \Big(\frac{x^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t}\Big),$$

$$G_{x_k x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Big(\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\Big) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \Big(\frac{x_k^2}{4a^4 t^2} - \frac{1}{2a^2 t}\Big).$$

Įstatę jas į (6.16) lygtį, gausime tapatybę. $\triangleright$

6.5 teorema. *Tegu $\varphi \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ ir $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| = M$. Tada funkcija*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy$$

yra (6.15) Koši uždavinio sprendinys. Be to,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0} |u(x,t)| \leq M.$$

$\triangleleft$ Iš pradžių įsitikinsime, kad funkcija $u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Fiksuojame teigiamus skaičius R, τ ir T $(\tau < T)$. Įrodysime, kad funkcija u yra tolydi uždarame cilindre

$$\overline{Q_{R,\tau,T}} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \leq R, \ t \in [\tau, T]\}.$$

Kiekvienam baigtiniam teigiamam skaičiui δ

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_{|y|<\delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\,dy +$$

$$+ \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int_{|y|>\delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\,dy. \tag{6.17}$$

Pirmasis iš šių integralų yra tolydi cilindre $\overline{Q_{R,\tau,T}}$ funkcija. Įrodysime, kad antrasis integralas tolygiai artėja į nulį, kai $\delta \to \infty$.

Tegu $(x,t) \in \overline{Q_{R,\tau,T}}$, $|y| > \delta$ ir $\delta > 2R$. Tada

$$|x-y| \geq |y| - |x| = \frac{1}{2}|y| + \frac{1}{2}|y| - |x| \geq \frac{1}{2}|y|$$

ir yra teisingas įvertis

$$\Big|\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{n/2}} \int\limits_{|y|>\delta} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\, dy\Big| \leq \frac{M}{(4\pi a^2 \tau)^{n/2}} \int\limits_{|y|>\delta} e^{-\frac{|y|^2}{16a^2 T}}\, dy =$$

$$= \frac{M}{(4\pi a^2 \tau)^{n/2}} |S_1| \int\limits_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16a^2 T}}\ r^{n-1} dr.$$

Paskutinis reiškinys nepriklauso nei nuo x, nei nuo t. Be to, kai $\delta \to \infty$, integralas

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16a^2 T}}\ r^{n-1} dr\ \to 0,$$

nes toks pat integralas su rėžiais nuo 0 iki ∞ yra aprėžtas. Taigi antrasis integralas (6.17) formulėje tolygiai artėja į nulį, kai $\delta \to \infty$. Tačiau tada funkcija u cilindre $\overline{Q_{R,\tau,T}}$ yra tolydi kaip tolygiai konverguojančių tolydžių funkcijų riba. Artindami R ir T į ∞, o τ į 0, gausime, kad $u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Iš 4 funkcijos G savybės išplaukia, kad

$$u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)), \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x) \quad \text{ir} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0} |u(x,t)| \leq M.$$

Dabar įrodysime, kad funkcija u yra be galo diferencijuojama ir visas jos išvestines galima gauti diferencijuojant (6.14) formulę po integralo ženklu. Iš pradžių įrodysime, kad funkcija $u \in \mathrm{C}^\infty(\overline{Q_{R,\tau,T}})$; čia R, τ ir T $(\tau < T)$ – bet kokie fiksuoti teigiami skaičiai.

Laisvai pasirenkame multiindeksą $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$, sveiką neneigiamą skaičių α ir formaliai skaičiuojame išvestinę

$$D_t^\alpha D_x^\beta u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_t^\alpha D_x^\beta G(x-y,t)\varphi(y)\, dy. \tag{6.18}$$

Kadangi funkcija φ yra tolydi, o funkcija G – be galo diferencijuojama, tai (6.18) pointegralinė funkcija yra tolydi $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ir $t > 0$. Tegu δ yra fiksuotas teigiamas skaičius. Tada integralą (6.18) formulėje galima išskaidyti į dviejų integralų sumą:

$$\int\limits_{|y|<\delta} D_t^\alpha D_x^\beta G(x-y,t)\varphi(y)\, dy + \int\limits_{|y|>\delta} D_t^\alpha D_x^\beta G(x-y,t)\varphi(y)\, dy.$$

Pirmasis iš jų yra tolydi cilindre $\overline{Q_{R,\tau,T}}$ funkcija, nes sritis $\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \delta\}$ yra aprėžta. Įrodysime, kad antrasis integralas tolygiai artėja į nulį, kai $\delta \to \infty$.

Visų pirma pastebėsime, kad diferencijuojant funkciją $G(x-y,t)$ arba jos išvestinę kintamojo t atžvilgiu, jos vardiklyje t laipsnis padidės vienetu, o skaitiklyje $|x-y|$ laipsnis padidės dviem. Analogiškai, diferencijuojant ją arba jos išvestinę kintamojo x_k atžvilgiu, vardiklyje t laipsnis ir skaitiklyje $x_k - y_k$ laipsnis padidės vienetu. Todėl

$$D_t^\alpha D_x^\beta G(x-y,t) = \sum_{j=0}^{|\beta|} \sum_{i=0}^{\alpha} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \frac{P_{ij}(x-y)}{t^{n/2+i+j}};$$

čia P_{ij} yra $2i+j$ laipsnio polinomas.

Tegu $(x,t) \in \overline{Q_{R,\tau,T}}$, $|y| > \delta$ ir $\delta > 2R$. Tada

$$|x-y| \geq |y| - |x| \geq \frac{1}{2}|y|, \quad |x-y| \leq |y| + |x| \leq \frac{3}{2}|y|.$$

Pasinaudoję šiomis nelygybėmis, įvertinsime integralą

$$\Big| \int\limits_{|y|>\delta} D_t^\alpha D_x^\beta G(x-y,t)\varphi(y)\, dy \Big| \leq$$

$$\leq M \int\limits_{|y|>\delta} \sum_{j=0}^{|\beta|} \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{c_{ij}(|x-y|^{2i+j}+1)}{t^{n/2+i+j}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy \leq$$

$$\leq M \int\limits_{|y|>\delta} \sum_{j=0}^{|\beta|} \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{c'_{ij}(|y|^{2i+j}+1)}{\tau^{n/2+i+j}} e^{-\frac{|y|^2}{16a^2 T}} dy \leq$$

$$\leq Mc(\tau) \int\limits_{|y|>\delta} (|y|^{2\alpha+|\beta|}+1)\, e^{-\frac{|y|^2}{16a^2 T}} dy =$$

$$= Mc(\tau)|S_1| \int\limits_{\delta}^{\infty} (r^{2\alpha+|\beta|}+1) r^{n-1}\, e^{-\frac{r^2}{16a^2 T}} dr; \tag{6.19}$$

čia c_{ij}, c'_{ij} ir $c(\tau)$ – teigiamos konstantos.

Paskutinis reiškinys (6.19) nelygybėje nepriklauso nei nuo x, nei nuo t ir artėja į nulį, kai $\delta \to \infty$. Norint tuo įsitikinti, pakanka pastebėti, kad

$$\int\limits_0^\infty (r^{2\alpha+|\beta|}+1) r^{n-1}\, e^{-\frac{r^2}{16a^2 T}} dr < \infty.$$

Remiantis teorema apie integralų, priklausančių nuo parametro, diferencijavimą po integralo ženklu, funkcija $D_t^\alpha D_x^\beta u(x,t) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Skaičius α ir multiindeksas β pasirinkti laisvai. Todėl galime tvirtinti, kad $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

Beliko įrodyti, kad funkcija u tenkina homogeninę šilumos laidumo lygtį. Remiantis 5 funkcijos G savybe,

$$u_t - a^2\Delta u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (G_t(x-y,t) - a^2\Delta_x G(x-y,t))\varphi(y)\,dy = 0.$$

Teorema įrodyta. $\triangleright$

Tegu funkcija φ yra tolydi ir aprėžta. Tada funkcija

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy$$

yra aprėžtas (6.15) Koši uždavinio sprendinys. Pagal 6.4 teoremą jis yra vienintelis. Be to, paskutinę formulę galima perrašyti taip:

$$u(x,t) = \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\xi^2}\varphi(x + 2a\sqrt{t}\xi)\,d\xi.$$

Iš jos išplaukia, kad

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, t\geq 0} |u(x,t)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|.$$

Gauta nelygybė įrodo, kad sprendinys u tolygiai priklauso nuo pradinių sąlygų.

Tegu $n = 3$, o funkcija $\varphi \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^3)$ yra neneigiama ir nelygi nuliui tik mažoje taško x_0 aplinkoje. Pažymėkime šią aplinką $U(x_0)$. Tada (6.15) Koši uždavinio sprendinį u galima interpretuoti kaip kūno temperatūrą taške $x \in \mathbb{R}^3$ laiko momentu $t > 0$. Pagal (6.14) formulę

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy = \int\limits_{U(x_0)} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy.$$

Kadangi funkcija G yra teigiama, tai

$$u(x,t) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0.$$

Be to,

$$u(x,0) = \varphi(x) = 0,\ \forall x \,\overline{\in}\, U(x_0).$$

Šios funkcijos u savybės leidžia tvirtinti, kad šilumos sklidimo greitis yra begalinis. Gautą prieštarą galima paaiškinti tuo, kad prielaidos, kuriomis grindžiama šilumos laidumo teorija, nėra tikslios. Antra vertus, ši prieštara praktiniams skaičiavimams įtakos nedaro. Esant didelėms $|x|$ reikšmėms ir mažoms $t > 0$ reikšmėms, kūno temperatūra $u(x,t)$ yra be galo maža. Todėl praktiškai (6.14) formulė apibrėžia baigtinį šilumos sklidimo greitį ir pakankamai tiksliai aprašo įvairius šiluminius procesus.

6.6 teorema. *Tegu funkcija $f \in \mathrm{C}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ ir $\|f\|_{\mathrm{C}^{2,1}} \le M < \infty$. Tada funkcija*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t-\tau) f(y,\tau)\, dy d\tau \tag{6.20}$$

yra Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x,t), & \in \mathbb{R}^n,\ t>0, \\ u|_{t=o} = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{6.21}$$

sprendinys.

◁ Fiksuojame teigiamus skaičius R, h ir T, $(h < T)$. Įrodysime, kad funkcija $u \in \mathrm{C}^{2,1}(\overline{Q_{R,h,T}})$. Tuo tikslu (6.20) formulėje vietoje kintamųjų $y,\ \tau$ apibrėšime naujus nepriklausomus kintamuosius $z = y - x,\ s = t - \tau$. Rezultatą užrašysime taip:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(z,s) f(z+x,t-s)\, dz ds.$$

Formaliai suskaičiuosime funkcijos u išvestines:

$$u_{x_i}(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(z,s) f_{x_i}(z+x,t-s)\, dz ds,$$

$$u_{x_i x_j}(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(z,s) f_{x_i x_j}(z+x,t-s)\, dz ds, \tag{6.22}$$

$$u_t(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(z,t) f(z+x,0)\, dz + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(z,s) f_t(z+x,t-s)\, dz ds.$$

Kiekvienam $\delta > 0$ apibrėšime be galo diferencijuojamų funkcijų seką

$$u^\delta(x,t) = \int_0^{t-\delta} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t-\tau) f(y,\tau)\, dy d\tau =$$

$$= \int_\delta^t \int_{\mathbb{R}^n} G(z,s) f(z+x,t-s)\, dz ds.$$

Pasinaudoję 2 funkcijos G savybe, įvertinsime skirtumus:

$$|u^\delta(x,t) - u(x,t)| = \Big| \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^n} G(z,s) f(z+x,t-s)\, dz ds \Big| \le$$

$$\le \delta \|f\|_{\mathrm{C}} \le \delta M,$$

$$|u^\delta_{x_i}(x,t) - u_{x_i}(x,t)| = \Big| \int\limits_0^\delta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(z,s) f_{x_i}(z+x, t-s)\, dzds \Big| \le$$

$$\le \delta \|f_{x_i}\|_{\mathrm{C}} \le \delta M,$$

$$\Big| u^\delta_{x_i x_j}(x,t) - u_{x_i x_j}(x,t) \Big| = \Big| \int\limits_0^\delta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(z,s) f_{x_i x_j}(z+x, t-s)\, dzds \Big| \le$$

$$\le \delta \|f_{x_i x_j}\|_{\mathrm{C}} \le \delta M,$$

$$|u^\delta_t(x,t) - u_t(x,t)| = \Big| \int\limits_0^\delta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(z,s) f_t(z+x, t-s)\, dzds \Big| \le$$

$$\le \delta \|f_t\|_{\mathrm{C}} \le \delta M.$$

Iš šių įverčių išplaukia, kad integralai u, u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$ ir u_t konverguoja tolygiai cilindre $\overline{Q_{R,h,T}}$. Remiantis teorema apie integralų, priklausančių nuo parametro, diferencijavimą po integralo ženklu, funkcija $u \in \mathrm{C}^{2,1}(\overline{Q_{R,h,T}})$ ir yra teisingos (6.22) formulės. Kadangi cilindro parametrai r, h ir T pasirinkti laisvai, tai artindami R ir T į begalybę, o h – į nulį, gausime $u \in \mathrm{C}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

Beliko įrodyti, kad funkcija u yra (6.21) Koši uždavinio sprendinys. Pasinaudoję 5 funkcijos G savybe, gausime

$$u^\delta_t(x,t) - a^2 \Delta u^\delta(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,\delta) f(y, t-\delta)\, dy +$$

$$+ \int\limits_0^{t-\delta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(G_t(x-y, t-\tau) f(y,\tau) - a^2 \Delta_x G(x-y, t-\tau) \big) f(y,\tau)\, dy d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,\delta) f(y, t-\delta)\, dy. \tag{6.23}$$

Tegu $\delta \to 0$. Įrodysime, kad integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,\delta) f(y,t-\delta)\, dy \rightrightarrows f(x,t)$$

cilindre $\overline{Q_{R,h,T}}$.

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Pasinaudoję 2 funkcijos G savybe, įvertinsime skirtumą

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,\delta) f(y,t-\delta)\, dy - f(x,t) \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,\delta)(f(y,t-\delta)-f(x,t))\,dy \Big| \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,\delta)|f(y,t-\delta)-f(y,t)|\,dy + \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,\delta)|f(y,t)-f(x,t)|\,dy \le$$

$$\le \max_{y\in\mathbb{R}^n,t\in[h,T]} |f(y,t-\delta)-f(y,t)| + \max_{|x-y|<d,t\in[h,T]} |f(y,t)-f(x,t)| +$$

$$+2M \int\limits_{|x-y|>d} G(x-y,\delta)\,dy;$$

čia d – bet koks teigiamas skaičius. Jį parinksime taip, kad būtų patenkinta nelygybė

$$\max_{|x-y|<d,t\in[h,T]} |f(y,t)-f(x,t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pagal 3 funkcijos G savybę egzistuoja skaičius $\delta > 0$ toks, kad

$$2M \int\limits_{|x-y|>d} G(x-y,\delta)\,dy < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Jeigu reikia, jį dar sumažinsime tiek, kad

$$\max_{y\in\mathbb{R}^n,t\in[h,T]} |f(y,t-\delta)-f(y,t)| = \max_{y\in\mathbb{R}^n,t\in[h,T]} \Big| \int\limits_{t-\delta}^{t} f_\tau(y,\tau)d\tau \Big| \le \delta M < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Iš šių nelygybių išplaukia, kad

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,\delta)f(y,t-\delta)\,dy - f(x,t) \Big| < \varepsilon, \quad \forall (x,t)\in\overline{Q_{R,h,T}}.$$

Taigi, kai $\delta \to 0$, integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,\delta)f(y,t-\delta)\,dy \rightrightarrows f(x,t)$$

cilindre $\overline{Q_{R,h,T}}$. Be to, kai $\delta \to 0$,

$$u_t^\delta(x,t) \rightrightarrows u_t(x,t), \quad \Delta u^\delta(x,t) \rightrightarrows \Delta u(x,t)$$

cilindre $\overline{Q_{R,h,T}}$. Perėję (6.23) formulėje prie ribos, kai $\delta \to 0$, gausime lygtį

$$u_t(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = f(x,t), \quad \forall (x,t)\in\overline{Q_{R,h,T}}.$$

Tegu R ir $T \to \infty$, o $h \to 0$. Tada funkcija u tenkins šią lygtį $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

Įrodysime, kad funkcija u tenkina pradinę sąlygą. Remiantis 2 funkcijos G savybe,

$$|u(x,t)| \le t\|f\|_{\mathrm{C}} \le tM.$$

Paėmę $t=0$, gausime $u(x,0)=0$. ▹

Jei yra patenkintos 6.5 ir 6.6 teoremų sąlygos, tai funkcija

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\varphi(y)\,dy + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\,dyd\tau$$

yra Koši uždavinio

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0, \\ u|_{t=o} = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{6.24}$$

sprendinys. Be to,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n, t\in[0,T]} |u(x,t)| \le \|\varphi\|_{\mathrm{C}} + T\|f\|_{\mathrm{C}}, \quad \forall T>0.$$

Iš šio įverčio ir 6.4 teoremos išplaukia, kad (6.24) uždavinys yra suformuluotas korektiškai.

Pastabos:

1. Įrodydami 6.6 teoremą, reikalavome, kad funkcija

$$f \in \mathrm{C}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)).$$

   Iš tikrųjų teoremą galima įrodyti esant daug mažesnėms prielaidoms (žr. [13], [24]). Iš funkcijos f pakanka reikalauti, kad ji būtų tolydi, aprėžta ir pagal erdvines koordinates tenkintų Helderio sąlygą, t.y. egzistuotų konstantos $A>0$ ir $\alpha \in (0,1]$ tokios, kad

$$|f(y,t) - f(x,t)| \le A|x-y|^\alpha, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

   Antra vertus, sprendiniui egzistuoti nepakanka vien tik funkcijos f tolydumo ir aprėžtumo. Tiksliau, galima sukonstruoti funkciją f (žr. [13], [14]), kuri yra tolydi ir aprėžta, tačiau juostoje $\mathbb{R}^n \times (0,T),\ T>0$ (6.24) Koši uždavinys sprendinio neturi.

2. Integralinį Furjė transformacijos metodą galima taikyti įvairioms lygtims.

7 SKYRIUS

Paprasčiausios elipsinės lygtys

7.1. DUKART DIFERENCIJUOJAMŲ FUNKCIJŲ INTEGRALINĖ IŠRAIŠKA

Paprasčiausia ir kartu viena iš svarbiausių elipsinių lygčių yra Laplaso lygtis

$$\Delta u = 0. \tag{7.1}$$

Ją nagrinėsime srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$. Priminsime, kad

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}.$$

Apibrėžimas. Sakysime, kunkcija u yra *harmoninė* aprėžtoje srityje Ω, jeigu $u \in C^2(\Omega)$ ir $\forall x \in \Omega$ tenkina Laplaso lygtį. Funkcija u yra harmoninė neaprėžtoje[1] srityje Ω, jeigu $u \in C^2(\Omega)$, $\forall x \in \Omega$ tenkina Laplaso lygtį ir

$$u(x) = O\big(|x|^{2-n}\big), \tag{7.2}$$

kai $|x| \to \infty$.

Pavyzdžiai:

1. Funkcija $u(x) \equiv 1$ yra harmoninė bet kokioje srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Jeigu $n > 2$, tai funkcija $u(x) \equiv 1$ yra harmoninė tik aprėžtoje srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

2. Funkcija
$$u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$
yra harmoninė visoje plokštumoje $\mathbb{R}^2$, išskyrus koordinačių pradžios tašką.

3. Funkcija
$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad x, y \in \mathbb{R},$$
yra harmoninė bet kokioje aprėžtoje srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Neaprėžtoje srityje ji nėra harmoninė.

[1] Šis harmoninės funkcijos apibrėžimas nėra visuotinai priimtas. Kartais sakoma, kad funkcija u yra harmoninė kokioje nors srityje Ω, jeigu ji šioje srityje yra dukart diferencijuojama ir tenkina Laplaso lygtį. Jeigu funkcija u dar tenkina (7.2) sąlygą, tai sakoma, kad ji yra harmoninė ∞. Be to, vietoje (7.2) sąlygos kartais reikalaujama, kad

$$u(x) \to 0, \text{ kai } |x| \to \infty, n \geq 3,$$

$$u(x) = o(\ln|x|), \text{ kai } |x| \to \infty, n = 2.$$

Naudojantis teorema apie harmoninės funkcijos pašalinamą ypatingą tašką (žr. 7.10 teoremą), galima įrodyti, kad šios sąlygos yra ekvivalenčios.

4. Tegu $x \in \mathbb{R}^n$. Funkcija

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)|S_1|}|x|^{2-n}, & n > 2, \\ -\dfrac{1}{|S_1|}\ln|x|, & n = 2, \end{cases}$$

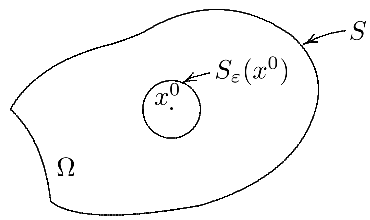
kai $x \neq 0$, tenkina Laplaso lygtį (patikrinkite). Todėl, kai $n = 2$, ji yra harmoninė bet kokioje aprėžtoje srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jeigu tik $0 \notin \Omega$. Neaprėžtoje srityje ji nėra harmoninė. Kai $n > 2$, funkcija $E(x)$ yra harmoninė tiek aprėžtoje srityje, tiek ir neaprėžtoje srityje Ω, jeigu tik taškas $0 \notin \Omega$.

Funkcija E yra vadinama *fundamentaliuoju* (kartais *singuliariuoju*) Laplaso lygties sprendiniu. Jį galima rasti ieškant Laplaso lygties sprendinio, priklausančio tik nuo spindulio $r = |x|$.

Tegu Ω yra aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$ sritis, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, o funkcijos $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Tada yra teisinga Gryno formulė

$$\int\limits_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int\limits_S \Big(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big)\,dS.$$

Laisvai pasirenkame tašką $x^0 \in \Omega$. Pakankamai mažiems ε rutulys $\overline{B_\varepsilon(x^0)} \subset \Omega$. Tokiems ε apibrėšime sritį $\Omega_\varepsilon(x^0) = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x^0)}$. Jos paviršius $\partial\Omega_\varepsilon(x^0) = S \cup S_\varepsilon(x^0)$ (žr. 7.1 pav).



7.1 pav.

Kadangi $u, v \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon(x^0)})$, tai srityje $\Omega_\varepsilon(x^0)$ yra teisinga Gryno formulė

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon(x^0)} (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int\limits_{S\cup S_\varepsilon(x^0)} \Big(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big)\,dS. \tag{7.3}$$

Nagrinėjant ją, patogu išskirti atvejus: $n > 2$ ir $n = 2$. Tarkime, $n > 2$, o $v = r^{2-n}$, $r = |x - x^0|$. Akivaizdu, kad $v \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon(x^0)})$. Be to, srityje $\Omega_\varepsilon(x^0)$ ji tenkina Laplaso lygtį. Todėl

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon(x^0)} u\Delta v\,dx = 0.$$

Kadangi $u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$, tai egzistuoja konstanta c tokia, kad

$$\Big| \int\limits_{B_\varepsilon(x^0)} v\Delta u\, dx \Big| \le c \int\limits_{B_\varepsilon(x^0)} \frac{1}{r^{n-2}}\, dx = c\int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{S_r} \frac{1}{r^{n-2}}\, dS dr =$$

$$= c|S_1| \int\limits_0^\varepsilon r\, dr = c|S_1|\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Todėl

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon(x^0)} v\Delta u\, dx \to \int\limits_\Omega v\Delta u\, dx,$$

kai $\varepsilon \to 0$. Sferos $S_\varepsilon(x^0)$ taškuose $v = \varepsilon^{2-n}$. Todėl

$$\Big| \int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS \Big| \le c \int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\, dS = \varepsilon c|S_1| \ \to 0,$$

kai $\varepsilon \to 0$. Be to, funkcijos v išvestinė normalės kryptimi

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial r}(r^{2-n}) = (n-2)r^{1-n} = (n-2)\varepsilon^{1-n}.$$

Todėl

$$\int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\, dS = \int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} (n-2)ur^{1-n}\, dS = (n-2)|S_1|\frac{1}{|S_\varepsilon|} \int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} u\, dS.$$

Pagal vidutinių reikšmių teoremą egzistuoja taškas $\widehat{x} \in S_\varepsilon(x^0)$ toks, kad

$$\frac{1}{|S_\varepsilon|} \int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} u\, dS = u(\widehat{x}).$$

Kadangi funkcija u yra tolydi, tai $u(\widehat{x}) \to u(x^0)$, kai $\varepsilon \to 0$. Perėję (7.3) formulėje prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$, gausime formulę

$$\int\limits_\Omega v\Delta u\, dx = \int\limits_S \Big(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big)\, dS - (n-2)|S_1|u(x^0)|.$$

Padalinę ją iš $(n-2)|S_1|$ ir x^0 pakeitę x, o $x - y$, rezultatą užrašysime taip:

$$u(x) = -\int\limits_\Omega E(|x-y|)\Delta u(y)\, dy +$$

$$+ \int\limits_S \Big(E(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)\, dS_y. \qquad (7.4)$$

Jeigu srityje Ω funkcija u yra harmoninė, tai (7.4) formulėje integralas sritimi Ω yra lygus nuliui. Todėl harmoninėms funkcijoms yra teisinga paprastesnė formulė

$$u(x) = \int\limits_S \Big(E(|x-y|) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y) \frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} \Big) \, dS_y. \tag{7.5}$$

P a s t a b o s:

1. Paskutinės dvi formulės išlieka teisingos ir, kai $n = 2$. Norint tuo įsitikinti, pakanka (7.3) formulėje paimti $v = \ln r$ ir pereiti prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$.

2. Galima įrodyti, kad (7.5) formulė išlieka teisinga ir aprėžtos srities išorėje, jeigu tik šioje srityje funkcija u tenkina Laplaso lygtį ir $u(x) \to 0$, kai $|x| \to \infty$ (žr. [17]).

7.2. PAPRASČIAUSIOS HARMONINIŲ FUNKCIJŲ SAVYBĖS

7.1 teorema. *Tarkime, kokioje nors srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ funkcija u yra dukart diferencijuojama ir tenkina Laplaso lygtį. Tada šioje srityje ji yra be galo diferencijuojama.*

$\triangleleft$ Laisvai pasirenkame tašką $x^0 \in \Omega$. Tegu $\Omega' \subset \Omega$ — griežtai vidinė sritis; $S' = \partial\Omega'$ – glodus paviršius; $x^0 \subset \Omega'$. Pagal teoremos sąlygą $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$. Todėl funkcija $u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega'})$ ir ją galima išreikšti fundamentaliu Laplaso lygties sprendiniu, t.y.

$$u(x) = \int\limits_{S'} \Big(E(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)\, dS_y, \quad \forall x \in \overline{\Omega'}.$$

Tegu Ω'' taško x^0 aplinka tokia, kad $\overline{\Omega''} \subset \Omega'$. Pastarojoje formulėje pointegralinė funkcija yra tolydi kintamųjų $x \in \overline{\Omega''}$, $y \in S'$ atžvilgiu ir be galo diferencijuojama kintamųjų $x \in \overline{\Omega''}$ atžvilgiu. Remiantis teorema apie integralų, priklausančių nuo parametro, diferencijavimą po integralo ženklu, $u \in \mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega''})$. Kadangi taškas $x^0 \in \Omega$ pasirinktas laisvai, tai funkcija $u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$. $\triangleright$

7.2 teorema (vidurinės reikšmės teorema). *Tarkime, srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ funkcija u yra dukart diferencijuojama ir tenkina Laplaso lygtį. Tada*

$$u(x) = \frac{1}{|S_R|}\int\limits_{S_R(x)} u(y)\, dS_y, \quad \forall x \in \Omega,\ R > 0:\ \overline{B_R(x)} \subset \Omega. \tag{7.6}$$

$\triangleleft$ Tegu $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$. Tada funkcija $u \in \mathrm{C}^2(\overline{B_R(x)})$ ir yra teisinga formulė

$$u(x) = \int\limits_{S_R(x)} \Big(E(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)\, dS_y. \tag{7.7}$$

Sferos $S_R(x)$ taškuose funkcija

$$E(|x-y|) = E(R),$$

o jos normalinė išvestinė

$$\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} = -\frac{1}{|S_R|}.$$

Be to,

$$\int\limits_{S_R(x)} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\, dS_y = \int\limits_{B_R(x)} \Delta u(y)\, dy = 0.$$

Todėl (7.7) formulę galima perrašyti taip:

$$u(x) = \frac{1}{|S_R|}\int\limits_{S_R(x)} u(y)\, dS_y. \triangleright$$

7.3 teorema (atvirkštinė vidurinės reikšmės teorema). *Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yra aprėžta sritis, $u \in \mathrm{C}(\Omega)$ ir (7.6) formulė yra teisinga $\forall x \in \Omega,\ R > 0 :\ \overline{B_R(x)} \subset \Omega$. Tada srityje Ω funkcija u yra harmoninė.*

$\lhd$ Iš pradžių įrodysime, kad $u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$. Tegu δ yra pakankamai mažas teigiamas skaičius, o f – kokia nors intervale $(-\delta, \delta)$ be galo diferencijuojama neneigiama ir finiti funkcija. Akivaizdu, kad $\forall x \in \Omega \setminus \{x \in \Omega\ : \mathrm{dist}(x, S) \le \delta\}$ rutulys $\overline{B_\delta(x)} \subset \Omega$. Todėl $\forall x \in \Omega \setminus \{x \in \Omega\ : \mathrm{dist}(x, S) \le \delta\}$, ir $\forall R \le \delta$ yra teisinga (7.6) formulė. Padauginę ją iš $R^{n-1} f(R)$ ir rezultatą suintegravę parametro R atžvilgiu nuo 0 iki δ, gausime

$$u(x) \int_0^\delta R^{n-1} f(R)\, dR = \int_0^\delta \frac{1}{|S_R|} R^{n-1} f(R) \int_{S_R(x)} u(y)\, dS_y\, dR =$$

$$= \frac{1}{|S_1|} \int_{B_\delta(x)} f(|x-y|) u(y)\, dy = \frac{1}{|S_1|} \int_\Omega f(|x-y|) u(y)\, dy.$$

Padaliję šią formulę iš

$$\int_0^\delta R^{n-1} f(R)\, dR,$$

rezultatą užrašysime taip:

$$u(x) = \Big(|S_1| \int_0^\delta R^{n-1} f(R)\, dR\Big)^{-1} \int_\Omega f(|x-y|) u(y)\, dy. \tag{7.8}$$

Esminis skirtumas tarp (7.6) ir (7.8) formulių yra tas, kad (7.8) formulėje integravimo sritis nepriklauso nuo kintamojo x. Todėl galime pasinaudoti teorema apie integralų, priklausančių nuo parametro, diferencijavimą po integralo ženklu. Nagrinėjamuoju atveju pointegralinė funkcija yra be galo diferencijuojama kintamųjų x atžvilgiu ir tolydi abiejų kintamųjų x, y atžvilgiu. Be to, integravimo sritis Ω yra aprėžta. Todėl funkcija u, apibrėžta (7.8) formule, srityje $\Omega \setminus \{x \in \Omega\ : \mathrm{dist}(x, S) \le \delta\}$ yra be galo diferencijuojama. Artindami δ į nulį, gausime, kad $u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$.

Įrodysime, kad funkcija u tenkina Laplaso lygtį. Laisvai pasirenkame tašką $x \in \Omega$ ir teigiamą skaičių R tokį, kad $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$. Tada funkcija $u \in \mathrm{C}^2(\overline{B_R(x)})$ ir yra teisinga formulė

$$u(x) = -\int_{B_R(x)} E(|x-y|) \Delta u(y)\, dy +$$

$$+ \int_{S_R(x)} \Big(E(|x-y|) \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y) \frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)\, dS_y. \tag{7.9}$$

Sferos $S_R(x)$ taškuose $|x-y| = R$. Todėl

$$\int\limits_{S_R(x)} E(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y = E(R)\int\limits_{S_R(x)} \frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y = E(R)\int\limits_{B_R(x)} \Delta u(y)\,dy.$$

Be to,

$$\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} = -\frac{1}{|S_R|}.$$

Pasinaudoję (7.6) formule, gausime

$$-\int\limits_{S_R(x)} u(y)\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y}\,dS_y = \frac{1}{|S_R|}\int\limits_{S_R(x)} u(y)\,dS_y = u(x).$$

Įstatę gautas integralų išraiškas į (7.9) formulę, perrašysime ją tokiu pavidalu:

$$\int\limits_{B_R(x)} \big(E(R)-E(r)\big)\Delta u(y)\,dy = 0; \tag{7.10}$$

čia $r = |x-y|$. Akivaizdu, kad $\forall y \in B_R(x)$ reiškinys $E(R)-E(r)$ yra neigiamas. Todėl (7.10) lygybė yra galima tik tuo atveju, kai rutulyje $B_R(x)$ funkcija Δu keičia ženklą. Vadinasi, egzistuoja taškas $\widehat{x} \in B_R(x)$ toks, kad

$$\Delta u(\widehat{x}) = 0. \tag{7.11}$$

Savaime aišku, kad kiekvieną konkretų skaičių R atitinka savas taškas $\widehat{x} \in B_R(x)$ ir $\widehat{x} \to x$, kai $R \to 0$. Kadangi $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$, tai (7.11) lygybėje galima pereiti prie ribos, kai $R \to 0$. Taigi taške $x \in \Omega$ funkcija u tenkina Laplaso lygtį. Kadangi tašką $x \in \Omega$ pasirinkome laisvai, tai

$$\Delta u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

o tai ir reiškia, kad srityje Ω funkcija u yra harmoninė. $\triangleright$

7.4 teorema (harmoninių funkcijų maksimumo principas). *Tegu u yra harmoninė funkcija aprėžtoje srityje Ω, $S = \partial\Omega$ ir $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Tada mažiausią ir didžiausią reikšmes ji įgyja paviršiuje S.*

$\triangleleft$ Pagal teoremos sąlygą funkcija $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Todėl ji yra aprėžta ir egzistuoja taškas $x^0 \in \overline{\Omega}$, kuriame funkcija u įgyja didžiausią reikšmę. Tegu $u(x^0) = M = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$. Reikia įrodyti, kad $x^0 \in S$. Tarkime priešingai, kad $x^0 \in \Omega$. Tada pakankamai mažiems R rutulys $\overline{B_R(x^0)} \subset \Omega$. Remiantis 7.2 teorema,

$$u(x^0) = \frac{1}{|S_R|}\int\limits_{S_R(x^0)} u(y)\,dS_y.$$

Tačiau šita lygybė yra galima tik tuo atveju, kai

$$u|_{S_R(x^0)} = u(x^0) = M.$$

Pasirinkę vietoje R skaičių $R' < R$, gausime

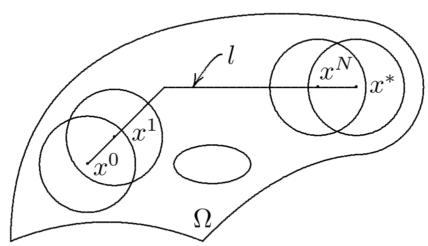
$$u|_{S_{R'}(x^0)} = u(x^0) = M.$$

Todėl galima tvirtinti, kad

$$u(x) = M, \quad \forall x \in \overline{B_R(x^0)}.$$

Įrodysime, kad $u(x) = M$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

Laisvai pasirenkame tašką $x^* \in \Omega$. Tegu l yra kokia nors laužtė, gulinti srityje Ω ir jungianti taškus x^*, x^0 (žr. 7.2 pav.).



7.2 pav.

Tegu

$$\delta = \tfrac{1}{2}\text{dist}\{l, \partial\Omega\}.$$

Laužtėje l parenkame taškus $x^1, \dots, x^N$ taip, kad būtų patenkintos nelygybės

$$\frac{1}{2}\delta < |x^{i+1} - x^i| < \delta, \quad \forall i = 0, 1, \dots, N;$$

čia $x^{N+1} = x^*$. Taškas $x^1 \in B_\delta(x^0)$ ir rutulys $\overline{B_\delta(x^0)} \subset \Omega$. Todėl

$$u(x) = u(x^0) = M, \quad \forall x \in \overline{B_\delta(x^0)}.$$

Taškas $x^2 \in B_\delta(x^1)$ ir rutulys $\overline{B_\delta(x^1)} \subset \Omega$. Todėl

$$u(x) = M, \quad \forall x \in \overline{B_\delta(x^1)}.$$

Tęsdami šitą procesą N-uoju žingsniu gausime, kad

$$u(x) = M, \quad \forall x \in \overline{B_\delta(x^{N+1})}.$$

Tačiau $x^* = x^{N+1} \in B_\delta(x^{N+1})$. Todėl $u(x^*) = u(x^0) = M$. Kadangi taškas $x^* \in \Omega$ pasirinktas laisvai, tai $u(x) = M$, $\forall x \in \Omega$. Pagal teoremos sąlygą funkcija

$u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Todėl $u(x) = M$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Taigi, jeigu funkcija u didžiausią reikšmę įgyja srities Ω vidiniame taške, tai ji yra konstanta (šiuo atveju teorema yra triviali). Priešingu atveju, kai $u(x) \neq \mathrm{const}$, didžiausią reikšmę funkcija u įgyja taške $x^0 \in S$.

Šiame įrodyme funkciją u pakeitę $-u$, gausime, kad mažiausią reikšmę funkcija u įgyja paviršiuje S. $\triangleright$

Išvada. Jeigu harmoninė funkcija yra konstanta paviršiaus S taškuose, tai ji yra konstanta visoje uždaroje srityje Ω.

Pastaba. Neaprėžtos srities atveju yra teisingas analogiškas teiginys. Jeigu funkcija u yra dukart diferencijuojama neaprėžtoje srityje $\overline{\Omega}$ ir tenkina šioje srityje Laplaso lygtį, tai funkcija u srityje Ω negali turėti nei lokalaus minimumo, nei lokalaus maksimumo taškų. Tiksliau, jeigu taške x_0 yra teisinga nelygybė

$$u(x_0) \geq u(x) \quad \forall x : |x - x_0| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0$$

arba

$$u(x_0) \leq u(x),\ \forall x : |x - x_0| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0,$$

tai funkcija u yra pastovi visoje srityje Ω.

7.3. DIRICHLĖ IR NOIMANO UŽDAVINIŲ FORMULAVIMAS

Kraštinį uždavinį elipsinei lygčiai vadinsime vidiniu, jeigu jo sprendiniai ieškomi aprėžtoje srityje, ir išoriniu, jeigu jo sprendiniai ieškomi aprėžtos srities išorėje. Svarbiausi kraštiniai uždaviniai antros eilės elipsinėms lygtims yra Dirichlė (pirmasis kraštinis) ir Noimano (antrasis kraštinis) uždaviniai.

Bendros antros eilės elipsinių lygčių teorijos čia nenagrinėsime, o apsiribosime Laplaso lygtimi. Ją nagrinėsime arba aprėžtoje srityje $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$, arba jos išorėje $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_i$. Bendrą sričių Ω_i ir Ω_e paviršių žymėsime raide S

Vidinis Dirichlė uždavinys Laplaso lygčiai formuluojamas taip:
Rasti funkciją $u \in \mathrm{C}^2(\Omega_i) \cap \mathrm{C}(\overline{\Omega_i})$, kuri srityje Ω_i tenkintų Laplaso lygtį

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega_i, \tag{7.12}$$

ir pirmą kraštinę sąlygą

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in S; \tag{7.13}$$

čia: S – dalimis glodus paviršius, φ – tolydi funkcija.

Išorinis Dirichlė uždavinys Laplaso lygčiai formuluojamas taip pat kaip vidinis. Reikia tik papildomai pareikalauti, kad funkcija u tenkintų sąlygą

$$u(x) = O(|x|^{2-n}), \quad \text{kai } |x| \to \infty. \tag{7.14}$$

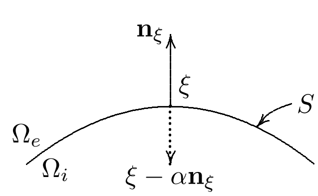
Tegu funkcija $u \in \mathrm{C}^1(\Omega_i)$, taškas $\xi \in S$ ir α – pakankamai mažas teigiamas skaičius. Tada taškas $\xi - \alpha \mathbf{n}_\xi$ yra vidinis srities Ω_i taškas (žr. 7.3 pav.) ir egzistuoja kryptinė išvestinė

$$\frac{\partial u(\xi - \alpha \mathbf{n}_\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}.$$

Apibrėžimas. Tegu $S \in \mathrm{C}^1$. Sakysime, funkcija $u \in \mathrm{C}^1(\Omega_i)$ paviršiuje S turi *taisyklingą* normalinę išvestinę, jeigu artinant α į $+0$ normalinė išvestinė

$$\frac{\partial u(\xi - \alpha \mathbf{n}_\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}$$

tolygiai konverguoja (taškų $\xi \in S$ atžvilgiu) į savo ribinę reikšmę.



7.3 pav.

Šitą ribinę reikšmę žymėsime $\left[\dfrac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right]_i$, t.y.

$$\left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right]_i = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\partial u(\xi-\alpha\mathbf{n}_\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}.$$

Remiantis apibrėžimu galima tvirtinti, kad taisyklinga normalinė išvestinė paviršiuje S yra tolydi. Tarkime, paviršiuje S egzistuoja funkcijos u taisyklinga normalinė išvestinė. Įrodysime, kad $u\in \mathrm{C}(\overline{\Omega_i})$. Pagal Niutono–Leibnico formulę

$$u(\xi) = u(\xi-\alpha\mathbf{n}_\xi) + \int\limits_0^\alpha \frac{\partial}{\partial t}u(t\mathbf{n}_\xi+\xi-\alpha\mathbf{n}_\xi)dt, \quad \forall \xi\in S.$$

Kadangi

$$\left|\frac{\partial u(\xi-\tau\mathbf{n}_\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right| \le \mathrm{const}, \quad \forall\xi\in S,\ \tau\in[0,\alpha],$$

tai

$$u(\xi-\alpha\mathbf{n}_\xi)-u(\xi) \rightrightarrows 0, \quad \xi\in S,$$

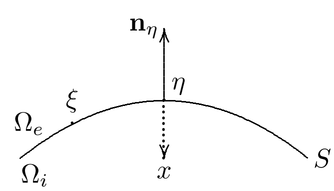
kai $\alpha\to+0$, ir $u\in \mathrm{C}(S)$. Tegu dabar $\xi\in S,\ x\in\Omega_i$ ir $\eta\in S:\ x=\eta-\alpha\mathbf{n}_\eta$ (žr. 7.4 pav.). Kai $\alpha\to+0$, taškas $x\to\xi$. Be to, išvestinė

$$\frac{\partial u(\eta-\alpha\mathbf{n}_\xi)}{\partial \mathbf{n}_\eta}$$

yra aprėžta ir $u\in \mathrm{C}(S)$. Todėl

$$|u(x)-u(\xi)| \le |u(\xi)-u(\eta)| + |u(\eta)-u(x)| \le |u(\xi)-u(\eta)| + \alpha C \ \to\ 0,$$

kai $x\ \to\ \xi$. Pagal apibrėžimą tai ir reiškia, kad $u\in \mathrm{C}(\overline{\Omega_i})$.



7.4 pav.

Jeigu funkcija $u\in \mathrm{C}^1(\Omega_e)$, tai jos taisyklinga normalinė išvestinė paviršiuje S apibrėžiama analogiškai, t.y.

$$\left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right]_e = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\partial u(\xi+\alpha\mathbf{n}_\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}.$$

Formuluojant vidinį ir išorinį Noimano uždavinius, reikalausime, kad $S\in \mathrm{C}^1$. Vidinis Noimano uždavinys Laplaso lygčiai formuluojamas taip:

Rasti funkciją $u \in \mathrm{C}^2(\Omega_i)$, kuri srityje Ω_i tenkintų Laplaso lygtį

$$\Delta u = 0,$$

ir paviršiuje S egzistuotų jos taisyklinga normalinė išvestinė

$$\left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right]_i = \psi(\xi); \tag{7.15}$$

čia ψ – tolydi paviršiuje S funkcija.

Išorinis Noimano uždavinys Laplaso lygčiai formuluojamas taip pat. Reikia tik papildomai pareikalauti, kad dideliems $|x|$ funkcija u tenkintų (7.14) sąlygą.

P a s t a b a. Nagrinėjant Noimano uždavinį, galima atsisakyti prielaidos $S \in \mathrm{C}^1$ ir reikalauti, kad paviršius S būtų tik dalimis glodus. Šiuo atveju kraštinė sąlyga turi būti patenkinta tuose paviršiaus S taškuose, kuriuose normalė egzistuoja.

P a s t a b a. Tiesinei antrosios eilės lygčiai

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x)$$

vidinis ir išorinis Dirichlė uždaviniai formuluojami lygiai taip pat kaip ir Laplaso lygčiai. Formuluojant Noimano uždavinį, kraštinė sąlyga apibrėžiama taip:

$$\lim_{x \to \xi} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_j} \cos(\mathbf{n}(\xi), x_i) = \psi(\xi), \quad \xi \in S;$$

čia: $x = \xi - \alpha \mathbf{n}_\xi \in \Omega_i$, $\alpha > 0$ vidinio Noimano uždavinio atveju ir $x = \xi + \alpha \mathbf{n}_\xi \in \Omega_e$, $\alpha > 0$ išorinio Noimano uždavinio atveju.

7.4. VIENATIES TEOREMOS

7.5 teorema. *Vidinis (išorinis) Dirichlė uždavinys*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega_i \ (x \in \Omega_e), \\ u(x) = \varphi(x), & x \in S, \end{cases}$$

negali turėti dviejų skirtingų sprendinių.

$\triangleleft$ Tarkime, vidinis (išorinis) Dirichlė uždavinys turi du sprendinius u_1 ir u_2. Tada jų skirtumas $u = u_1 - u_2$ srityje Ω_i (srityje Ω_e) tenkina Laplaso lygtį ir homogeninę kraštinę sąlygą

$$u(x) = 0, \ x \in S.$$

Išnagrinėsime vidinio Dirichlė uždavinio atvejį. Pagal maksimumo principą didžiausią ir mažiausią reikšmes funkcija u įgyja paviršiuje S. Tačiau paviršiuje S ji lygi nuliui. Todėl $u(x) = 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}_i$. Taigi bet kokie du vidinio Dirichlė uždavinio sprendiniai sutampa.

Nagrinėjant Dirichlė uždavinį srityje Ω_e, patogu išskirti du atvejus: $n = 2$ ir $n > 2$. Tegu $n = 2$. Dideliems $|x|$ kiekviena iš funkcijų u_1, u_2 yra aprėžta. Todėl egzistuoja teigiamos konstantos M_1 ir M_2 tokios, kad

$$\max_{x \in \overline{\Omega}_e} |u_1(x)| \leq M_1, \quad \max_{x \in \overline{\Omega}_e} |u_2(x)| \leq M_2$$

ir

$$\max_{x \in \overline{\Omega}_e} |u(x)| \leq M_1 + M_2 \equiv M.$$

Laisvai pasirenkame tašką $x^0 \in \Omega_i$ ir skritulį $\overline{B_{R_0}(x^0)} \subset \Omega_i$. Akivaizdu, kad funkcija $\ln(|x - x^0|/R_0)$ srityje Ω_e yra teigiama ir tenkina Laplaso lygtį. Be to, pakankamai dideliems R sritis $\Omega_i \subset B_R(x^0)$. Tokiems R funkcija

$$u_R = M \left(\ln \frac{|x - x^0|}{R_0} \Big/ \ln \frac{R}{R_0} \right)$$

srityje $\Omega_R(x^0) = \Omega_e \cap B_R(x^0)$ yra teigiama ir harmoninė. Be to,

$$u(x) = 0, \quad u_R(x) > 0, \quad x \in S,$$

ir

$$|u(x)| \leq M, \quad u_R(x) = M, \quad x \in S_R.$$

Todėl pagal harmoninės funkcijos maksimumo principą

$$|u(x)| \leq u_R(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}_R.$$

Laisvai pasirenkame tašką $x \in \overline{\Omega}_e$. Artindami skaičių R į $+\infty$, gausime nelygybę

$$|u(x)| \leq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}_e.$$

Ši nelygybė yra galima tik tuo atveju, kai $u(x) = 0$. Taigi $u_1(x) = u_2(x)$.

Liko išnagrinėti atvejį, kai $n > 2$. Šiuo atveju funkcija u tenkina srityje Ω_e Laplaso lygtį, lygi nuliui paviršiaus S taškuose ir tenkina (7.14) sąlygą. Pakankamai dideliems R sritis $\Omega_i \subset B_R(0)$ ir $u(x) = O(R^{2-n})$, kai $x \in S_R$. Srityje $\Omega_R(0) = \Omega_e \cap B_R(0)$ funkcija u yra harmoninė. Todėl didžiausią ir mažiausią reikšmes ji įgyja arba paviršiuje S arba sferos $S_R(0)$ taškuose. Taigi

$$|u(x)| \leq C/R^{n-2}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}_R.$$

Laisvai pasirenkame tašką $x \in \overline{\Omega}_e$. Artindami skaičių R į $+\infty$, gausime, kad $u(x) = 0$ ir $u_1(x) = u_2(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}_e$. ▷

7.6 teorema. *Tegu $S \in \mathrm{C}^2$. Tada bet kokie du vidinio Noimano uždavinio*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega_i, \\ \left[\dfrac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right]_i = \psi(x), & x \in S, \end{cases}$$

sprendiniai, jeigu jie egzistuoja, gali skirtis tik konstanta.

◁ Tegu u_1, u_2 yra du nagrinėjamo uždavinio sprendiniai. Tada funkcija $u = u_1 - u_2$ srityje Ω_i tenkina Laplaso lygtį, o jos taisyklinga normalinė išvestinė

$$\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right]_i = 0.$$

Kadangi S yra paviršius klasės C^2, tai (žr. [1], 12 skyrelį)

$$\int\limits_{\Omega_i} \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2 \, dx = \int\limits_{S} u \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right]_i dS = 0. \tag{7.16}$$

Ši lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $u(x) = \mathrm{const}$, $\forall x \in \overline{\Omega}_i$, t.y. $u_1(x) - u_2(x) = \mathrm{const}$. ▷

7.7 teorema. *Tegu $S \in \mathrm{C}^2$. Tada bet kokie du išorinio Noimano uždavinio*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega_e, \\ \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right]_e = \psi(x), & x \in S, \\ u(x) = O(|x|^{2-n}), & |x| \to \infty, \end{cases}$$

sprendiniai, jeigu jie egzistuoja, kai $n = 2$, gali skirtis tik konstanta ir, kai $n > 2$, sutampa.

$\triangleleft$ Tegu $u_1,\ u_2$ yra du išorinio Noimano uždavinio sprendiniai. Tada funkcija $u = u_1 - u_2$ srityje Ω_e tenkina Laplaso lygtį, jos taisyklinga normalinė išvestinė

$$\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x}\right]_e = 0$$

ir $u(x) = O(|x|^{2-n})$, kai $|x| \to \infty$.

Pakankamai dideliems R sritis Ω_i guli sferos S_R viduje. Tokiems R apibrėšime sritį $\Omega_R = \Omega_e \cap B_R(0)$. Jos paviršius $\partial\Omega_R = S \cup S_R$. Sritis Ω_R yra aprėžta. Be to, S yra paviršius klasės C^2. Todėl (žr. [1], 12 skyrelį)

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2\, dx = \int\limits_S u \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]_e dS + \int\limits_{S_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS.$$

Kadangi funkcijos u taisyklinga normalinė išvestinė lygi nuliui, tai pastarąją formulę galime perrašyti taip:

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2\, dx = \int\limits_{S_R} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS.$$

Dideliems $|x|$ harmoninės funkcijos išvestinė

$$D^\alpha u(x) = \begin{cases} O(|x|^{2-n-|\alpha|}), & n > 2, \\ O(|x|^{-1-|\alpha|}), & n = 2 \end{cases}$$

(šį teiginį įrodysime 7.9 skyrelyje). Todėl

$$\int\limits_{\Omega_R(0)} \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2 dx = \begin{cases} O(|R|^{2-n|}), & n > 2, \\ O(|R|^{-1}), & n = 2. \end{cases}$$

Artindami šioje lygybėje R į ∞, gausime

$$u(x) = \text{const}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}_e.$$

Kadangi $u(x) = O(|x|^{2-n})$, kai $|x| \to \infty$, tai

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x) = \begin{cases} 0, & n > 2, \\ \text{const}, & n = 2. \end{cases}$$

Taigi bet kokie du išorinio Noimano uždavinio sprendiniai sutampa, jeigu $n > 2$, ir gali skirtis tik konstanta, jeigu $n = 2$. $\triangleright$

P a s t a b a. Paskutinės dvi teoremos yra teisingos, kai $S \in \mathrm{C}^{1+\alpha}, 0 < \alpha < 1$ (žr. [14]). Be to, jeigu yra žinoma, kad ieškomasis sprendinys yra dukart diferencijuojama uždaroje srityje funkcija, tai 7.6 ir 7.7 teoremos išlieka teisingos, kai paviršius S yra tik dalimis glodus.

7.5. FORMALUS DIRICHLĖ UŽDAVINIO SPRENDIMAS. GRYNO FUNKCIJA

Iš pradžių išnagrinėsime vidinį Dirichlė uždavinį:

$$\Delta u(x) = f(x),\ x\in\Omega_i, \quad u(x) = \varphi(x),\ x\in S. \tag{7.17}$$

Tarkime, kad šio uždavinio sprendinys egzistuoja ir jį galima išreikšti formule

$$u(x) = -\int_\Omega E(|x-y|)\Delta u(y)\,dy + \\ + \int_S \left(E(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y}\right) dS_y. \tag{7.18}$$

Be to, tegu $\forall x\in\Omega_i$ egzistuoja funkcija $g(x,y)$ tokia, kad

$$\Delta_y g(x,y) = 0,\ y\in\Omega_i, \quad g(x,y) = -E(|x-y|),\ y\in S, \tag{7.19}$$

ir yra teisinga *Gryno* formulė:

$$\int_{\Omega_i} [g(x,y)\Delta u(y) - u(y)\Delta g(x,y)]\,dy = \\ = \int_S \left[g(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\right] dS. \tag{7.20}$$

Tada (7.17) uždavinio sprendinys

$$u(x) = -\int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy - \int_S \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi(y)\,dS; \tag{7.21}$$

čia $G(x,y) = g(x,y) + E(|x-y|)$. Funkcija $G(x,y)$ yra vadinama *Gryno* funkcija. Ją naudojant, bendrojo pavidalo Dirichlė uždavinio sprendimas susiveda į konkretaus (7.19) Dirichlė uždavinio sprendimą.

Jeigu $f(x)\equiv 0$, t.y. funkcija u tenkina Laplaso lygtį, tai (7.17) Dirichlė uždavinio sprendinys

$$u(x) = -\int_S \frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\varphi(y)\,dS. \tag{7.22}$$

Išvesdami (7.21) formulę, reikalavome, kad funkcijos u ir g tenkintų (7.18) ir (7.20) integralines formules. Šios formulės yra teisingos, jeigu paviršius S ir funkcijos u, g tenkina reikiamas glodumo sąlygas. Pavyzdžiui, pakanka reikalauti, kad paviršius S būtų dalimis glodus, o funkcijos $u, g\in C^2(\overline{\Omega}_i)$.

Arba galima pareikalauti, kad paviršius $S \in \mathrm{C}^2$, o funkcijos u, $g \in \mathrm{C}^2(\Omega_i)$ ir paviršiuje S egzistuotų taisyklingos normalinės išvestinės:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right]_i \quad \text{ir} \quad \left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right]_i.$$

Taigi, jeigu yra žinoma, kad (7.17) ir (7.19) Dirichlė uždavinių sprendiniai yra pakankamai glodžios funkcijos, tai visi atlikti veiksmai yra teisėti ir (7.21) formulė apibrėžia (7.17) Dirichlė uždavinio sprendinį.

Laplaso lygčiai toks pats rezultatas yra teisingas ir išorinio Dirichlė uždavinio atveju (kai $n > 2$). Norint tuo įsitikinti pakanka pastebėti, kad formulės

$$u(x) = \int\limits_S \left(E(|x-y|)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial E(|x-y|)}{\partial \mathbf{n}_y} \right) dS_y$$

ir

$$0 = \int\limits_S \left(g(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \mathbf{n}_y} - u(y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y} \right) dS$$

yra teisingos tiek vidinėje, tiek ir išorinėse srityse.

Išorinio Dirichlė uždavinio atveju (7.21) formulė išlieka teisinga, jeigu pareikalausime, kad funkcija u tenkintų papildomas sąlygas

$$u(x) = O(|x|^{2-n}),\ u_{x_i} = O(|x|^{1-n}),\ i = 1, \dots, n, \quad |x| \ \to \ \infty$$

ir integralas sritimi Ω_e konverguotų. Atvejį $n = 2$ rekomenduojame išnagrinėti savarankiškai.

7.6. DIRICHLĖ UŽDAVINIO SPRENDIMAS RUTULYJE

Ieškosime funkcijos $u \in \mathrm{C}^2(B_R(0)) \cap \mathrm{C}(\overline{B_R(0)})$, kuri rutulyje $B_R(0)$ tenkintų Laplaso lygtį

$$\Delta u(x) = 0$$

ir taškuose $x \in S$ kraštinę sąlygą

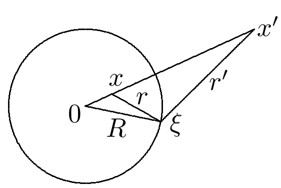
$$u(x) = \varphi(x), \quad \varphi \in \mathrm{C}(S_R)\,.$$

Pastaba. Puasono lygties atveju Dirichlė uždavinys susiveda į Dirichlė uždavinį Laplaso lygčiai. Todėl čia nagrinėsime tik Dirichlė uždavinį Laplaso lygčiai.

Sprendžiant šį uždavinį, panaudosime (7.22) formulę. Tiksliau, tarsime, kad Dirichlė uždavinys rutulyje $B_R(0)$ turi sprendinį ir jis yra pakankamai glodus. Po to išvesime integralinę formulę, apibrėžiančią sprendinį. Pabaigoje įrodysime, kad tokiu būdu sukonstruota funkcija iš tikrųjų yra ieškomasis Dirichlė uždavinio sprendinys.

Tarkime, kad nagrinėjamo Dirichlė uždavinio sprendinys egzistuoja. Pažymėkime jį raide u ir tegu $u \in \mathrm{C}^2(\overline{B_R(0)})$. Sukonstruosime Gryno funkciją $G(x, y)$. Tuo tikslu laisvai pasirenkame tašką $x \in B_R(0)$. Raide x' pažymėsime tašką, simetrinį taškui x sferos S_R atžvilgiu. Tai reiškia, kad taškai x ir x' guli viename spindulyje, išeinančiame iš koordinačių pradžios, ir $|x||x'| = R^2$. Raide ξ pažymėkime tašką sferoje S_R. Taškus 0, x, x' ir ξ sujunkime atkarpomis (žr. 7.5 pav.).

Trikampiai $\Delta_{0x\xi}$ ir $\Delta_{0x'\xi}$ yra panašūs, nes taške 0 jie turi bendrą kampą ir prie jo proporcingas kraštines.



7.5 pav.

Šią kraštinių proporcingumo sąlygą galima užrašyti taip:

$$\frac{|x|}{R} = \frac{R}{|x'|}.$$

Kitos trikampių $\Delta_{0x\xi}$, $\Delta_{0x'\xi}$ kraštinės taip pat yra proporcingos. Pažymėję $r = |x - \xi|$, $r' = |x' - \xi|$, šių kraštinių proporcingumo sąlygą užrašysime taip:

$$\frac{r}{r'} = \frac{|x|}{R}. \tag{7.23}$$

Toliau nagrinėsime atvejį $n > 2$. Atkreipsime dėmesį į tai, kad dydžiai r ir r' yra proporcingi, o

$$E(r) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} E(r').$$

Tegu $y \in \overline{B_R(0)}$ ir $r' = |x' - y$. Tada funkcija $E(r')$, kaip kintamojo y funkcija, $\forall x \in B_R(0)$ yra harmoninė rutulyje $B_R(0)$. Todėl funkcija

$$g(x,y) \equiv -\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} E(r')$$

yra Dirichle uždavinio

$$\Delta_y g(x,y) = 0,\ y \in B_R(0), \quad g(x,y) = -E(r),\ r = |x-y|,\ y \in S_R(0),$$

sprendinys. Taigi Gryno funkcija

$$G(x,y) = E(r) - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} E(r').$$

Pagal (7.22) formulę formalų Dirichlė uždavinio sprendinį rutulyje $B_R(0)$ galima užrašyti taip:

$$u(x) = -\int\limits_{S_R(0)} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} \varphi(\xi) dS_\xi. \tag{7.24}$$

Suskaičiuosime Gryno funkcijos normalinę išvestinę

$$-\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi}\Big[E(r) - \Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2} E(r')\Big] =$$

$$= \frac{1}{|S_1|}\Big[\frac{1}{r^{n-1}}\cos(r,\mathbf{n}_\xi) - \Big(\frac{R}{|x|}\Big)^{n-2}\frac{1}{r'^{n-1}}\cos(r',\mathbf{n}_\xi)\Big]. \tag{7.25}$$

Pagal kosinusų teoremą

$$\cos(r,\mathbf{n}_\xi) = \frac{R^2 + r^2 - |x|^2}{2rR},$$

$$\cos(r',\mathbf{n}_\xi) = \frac{R^2 + r'^2 - |x'|^2}{2r'R} = \frac{R^2 + R^2|x|^{-2}r^2 - R^4|x|^{-2}}{2rR^2|x|^{-1}}.$$

Įstatę šias išraiškas į (7.25) formulę ir suprastinę panašius narius, gausime

$$-\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi} = \frac{1}{|S_1|}\frac{R^2 - |x|^2}{Rr^n} \equiv K(x,\xi).$$

Taigi (7.24) formulę galima perrašyti taip:

$$u(x) = \int\limits_{S_R} K(x,\xi)\varphi(\xi) dS_R, \quad x \in B_R(0). \tag{7.26}$$

Funkcija K yra vadinama *Puasono branduoliu*, o (7.26) formulė — *Puasono formule*.

Pastaba. Puasono formulė išvesta, kai $n > 2$. Atvejis $n = 2$ nagrinėjamas analogiškai. Reikia tik atkreipti dėmesį į tai, kad (7.24) formulė yra teisinga ir, kai $n = 2$.

7.8 teorema. *Tegu $\varphi \in \mathrm{C}(S_R)$. Tada funkcija u, apibrėžta (7.26) formule, rutulyje $B_R(0)$ tenkina Laplaso lygtį ir sferos $S_R(0)$ taškuose sutampa su funkcija φ.*

$\triangleleft$ Iš pradžių įrodysime paprasčiausias funkcijos K savybes.
1. Funkcija $K(x,\xi) \geq 0, \ \forall x \in B_R(0), \ \xi \in S_R(0)$.
2. Rutulyje $B_R(0)$ funkcija $K(x,\xi)$ tenkina Laplaso lygtį

$$\Delta_x K(x,\xi) = 0, \quad \forall \xi \in S_R(0).$$

$\triangleleft$ Fiksuokime tašką $\xi \in S_R(0)$. Funkcija K nuo funkcijos

$$V(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{r^n}$$

skiriasi tik pastoviu daugikliu. Todėl pakanka įrodyti, kad funkcija V tenkina Laplaso lygtį. Suskaičiuosime jos išvestines:

$$V_{x_i}(x) = -\frac{2x_i}{r^n} - n\frac{(R^2 - |x|^2)(x_i - \xi_i)}{r^{n+2}},$$

$$V_{x_i x_i}(x) = -\frac{2}{r^n} + 4n\frac{x_i(x_i - \xi_i)}{r^{n+2}} - n\frac{R^2 - |x|^2}{r^{n+2}} +$$
$$+ n(n+2)\frac{(R^2 - |x|^2)(x_i - \xi_i)^2}{r^{n+4}}.$$

Susumavę išvestines $V_{x_i x_i}$ nuo 1 iki n, gausime

$$\Delta V(x) = -\frac{2n}{r^n} + 4n\frac{|x|^2}{r^{n+2}} - 4n\frac{(x,\xi)}{r^{n+2}} - n^2\frac{R^2 - |x|^2}{r^{n+2}} + n(n+2)\frac{(R^2 - |x|^2)}{r^{n+2}} =$$
$$= n\frac{-2r^2 + 4|x|^2 - 4(x,\xi) + 2R^2 - 2|x|^2}{r^{n+2}} = 0 \ \triangleright.$$

3. Integralas

$$\int\limits_{S_R(0)} K(x,\xi)\, dS_R = 1, \quad \forall x \in B_R(0). \tag{7.27}$$

$\triangleleft$ Funkcija $u(x) \equiv 1 \in \mathrm{C}^2(\overline{B_R(0)})$. Be to, rutulyje $B_R(0)$ ji yra harmoninė ir sferos $S_R(0)$ taškuose lygi vienetui. Todėl ją galima išreikšti (7.26) formule, kuri, kai $\varphi = 1$, virsta (7.27) lygybe. $\triangleright$

Kintamųjų $x \in B_R(0), \ \xi \in S_R(0)$ atžvilgiu funkcija $K(x,\xi)$ yra be galo diferencijuojama, o funkcija φ sferoje $S_R(0)$ yra tolydi. Remiantis teorema apie integralų, priklausančių nuo parametro, diferencijavimą po integralo ženklu, funkcija u, apibrėžta (7.26) formule, rutulyje $B_R(0)$ yra be galo diferencijuojama ir jos išvestines galima skaičiuoti po integralo ženklu. Pasinaudoję antra funkcijos K savybe, galime tvirtinti, kad funkcija u tenkina Laplaso lygtį. Įrodysime, kad funkcija $u \in \mathrm{C}(\overline{B_R(0)})$ ir $u(\xi) = \varphi(\xi), \ \forall \xi \in S_R(0)$. Laisvai pasirenkame tašką $\xi \in S_R(0)$, skaičių $\varepsilon > 0$ ir tašką $x \in B_R(0)$, artimą taškui ξ. Remiantis trečia funkcijos K savybe, skirtumas

$$u(x) - \varphi(\xi) = \int\limits_{S_R(0)} K(x, \eta)(\varphi(\eta) - \varphi(\xi))\; dS_\eta.$$

Tegu ρ yra koks nors teigiamas skaičius ir $\Sigma_\rho(\xi) = S_R(0) \cap B_\rho(\xi)$. Tada

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \le \Big| \int\limits_{\Sigma_\rho(\xi)} K(x, \eta)(\varphi(\eta) - \varphi(\xi))\; dS_\eta \Big| +$$

$$+ \Big| \int\limits_{S_R(0)\setminus\Sigma_\rho(\xi)} K(x, \eta)(\varphi(\eta) - \varphi(\xi))\, dS_\eta \Big|.$$

Pažymėkime paskutinių dviejų integralų modulius atitinkamai I_1 ir I_2. Pasinaudoję 1 ir 3 funkcijos K savybėmis, įvertinsime I_1 :

$$I_1 \le \max_{\eta \in \Sigma_\rho(\xi)} |\varphi(\eta) - \varphi(\xi)| \int\limits_{\Sigma_\rho(\xi)} K(x, \eta)\; dS_\eta \le \max_{\eta \in \Sigma_\rho(\xi)} |\varphi(\eta) - \varphi(\xi)|.$$

Skaičių ρ parinksime taip, kad $I_1 \le \varepsilon/2$. Tai padaryti galima, nes $\varphi \in \mathrm{C}(S_R(0))$. Kadangi funkcija φ yra aprėžta, tai

$$I_2 \le 2 \max_{\eta \in S_R(0)} |\varphi(\eta)| \max_{\eta \in S_R(0)\setminus\Sigma_\rho(\xi)} \frac{1}{|x - \eta|^n} \frac{(R^2 - |x|^2)|S_R|}{|S_1| R} \le$$

$$\le \frac{C}{\rho^n}(R^2 - |x|^2) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

jeigu tik taškas x yra pakankamai arti taško $\xi \in S$. Tokiems x yra teisinga nelygybė

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \le \varepsilon, \quad \forall x \in S_R(0).$$

Taigi funkcija $u \in \mathrm{C}(\overline{B_R(0)})$ ir $u(\xi) = \varphi(\xi),\ \forall \xi \in S_R(0)$. $\triangleright$

7.7. HARNAKO NELYGYBĖ IR LIUVILIO TEOREMA

Tarkime, neneigiama funkcija $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$ ir rutulyje $B_R(0)$ tenkina Laplaso lygtį. Pagal Puasono formulę

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{|S_1|R} \int\limits_{S_R(0)} \frac{u(\xi)}{r^n}\, dS_\xi, \quad \forall x \in \overline{B_R(0)};$$

čia $r = |x - \xi|$. Kadangi

$$R - |x| \le r \le R + |x|,$$

tai

$$u(x) \ge \frac{(R - |x|)R^{n-2}}{(R + |x|)^{n-1}} \frac{1}{|S_R|} \int\limits_{S_R(0)} u(\xi)\, dS_\xi$$

ir

$$u(x) \le \frac{(R + |x|)R^{n-2}}{(R - |x|)^{n-1}} \frac{1}{|S_R|} \int\limits_{S_R(0)} u(\xi)\, dS_\xi.$$

Pagal vidurinės reikšmės teoremą

$$\frac{1}{|S_R|} \int\limits_{S_R(0)} u(\xi)\, dS_\xi = u(0).$$

Todėl

$$\frac{(R - |x|)R^{n-2}}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \le u(x) \le \frac{(R + |x|)R^{n-2}}{(R - |x|)^{n-1}} u(0).$$

Šios nelygybės vadinamos *Harnako* nelygybėmis.

7.9 teorema (Liuvilio). *Tarkime, funkcija u erdvėje $\mathbb{R}^n$ yra aprėžta iš apačios (arba iš viršaus) ir $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tenkina Laplaso lygtį. Tada ji yra konstanta.*

◁ Jeigu funkcija u yra aprėžta iš viršaus ir tenkina Laplaso lygtį, tai funkcija $-u$ yra aprėžta iš apačios ir taip pat tenkina Laplaso lygtį. Todėl pakanka išnagrinėti atvejį, kai funkcija u yra aprėžta iš apačios.

Tarkime, $u(x) \ge -C$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Akivaizdu, kad funkcija $u^*(x) = u(x) + C$ yra neneigiama ir $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tenkina Laplaso lygtį. Todėl $\forall R > 0$ yra teisingos Harnako nelygybės:

$$\frac{(R - |x|)R^{n-2}}{(R + |x|)^{n-1}} u^*(0) \le u^*(x) \le \frac{(R + |x|)R^{n-2}}{(R - |x|)^{n-1}} u^*(0).$$

Perėję prie ribos, kai $R \to 0$, gausime nelygybes

$$u^*(0) \le u^*(x) \le u^*(0).$$

Iš jų išplaukia, kad $u^*(x) = u^*(0)$. Taigi $u(x) = u(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. ▷

7.8. HARMONINĖS FUNKCIJOS PAŠALINAMASIS YPATINGAS TAŠKAS

Tarkime, taškas $x^0 \in \Omega$ ir funkcija u yra harmoninė srityje $\Omega \setminus \{x^0\}$. Taškas x^0 yra funkcijos u *pašalinamasis ypatingas* taškas, jeigu artinant x į x^0 funkcija u didėja lėčiau už fundamentalų Laplaso lygties sprendinį, t.y. $u(x) = o\big(E(|x - x^0|)\big)$, kai $|x - x^0| \to 0$.

7.10 teorema. *Tarkime, funkcija u yra harmoninė srityje $\Omega \setminus \{x^0\}$, o taškas x^0 yra jos pašalinamasis ypatingas taškas. Tada funkciją u taške x^0 galima apibrėžti taip, kad ji būtų harmoninė visoje srityje Ω.*

$\triangleleft$ Koordinačių ašis visada galima perkelti taip, kad taškas x^0 pereitų į koordinačių pradžią. Tarkime, kad tai jau yra padaryta ir $x^0 = 0$. Tada pakankamai mažiems $R > 0$ rutulys $B_R(0) \subset \Omega$. Tokiems R funkcija

$$U(x) = \int\limits_{S_R(0)} K(x, \xi) u(\xi)\, dS_\xi$$

rutulyje $B_R(0)$ tenkina Laplaso lygtį ir sferos $S_R(0)$ taškuose sutampa su funkcija u (žr. 7.8 teoremą). Kadangi funkcija $U \in C\big(\overline{B_R(0)}\big)$, tai ji rutulyje $\overline{B_R(0)}$ yra aprėžta. Todėl $U(x) = o\big(E(|x|)\big)$, kai $|x| \to 0$. Tačiau tada funkcija $v = U - u$ srityje $B_R(0) \setminus \{0\}$ yra harmoninė, sferos $S_R(0)$ taškuose lygi nuliui ir $v(x) = o\big(E(|x|)\big)$, kai $|x| \to 0$.

Tarkime, $n > 2$. Tada egzistuoja funkcija $\omega(\delta)$ tokia, kad $\omega(\delta) \to 0$, kai $\delta \to 0$, ir

$$|v(x)| \le \frac{\omega(\delta)}{|x|^{n-2}}, \quad \forall x : |x| < \delta.$$

Funkcija

$$\omega_\delta(x) = 2\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right)\omega(\delta)$$

yra harmoninė srityje $\{x : \delta < |x| < R\}$. Be to, sferos $S_R(0)$ taškuose $v(x) = \omega_\delta(x) = 0$, o sferos S_δ taškuose (pakankamai mažiems δ)

$$v(x) \le \frac{\omega(\delta)}{\delta^{n-2}} \le 2\left(\frac{1}{\delta^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}}\right)\omega(\delta) = \omega_\delta(x).$$

Pagal maksimumo principą $v(x) \le \omega_\delta(x), \quad \forall x : \delta \le |x| \le R$. Šį įrodymą pakartoję funkcijai $-v$, gausime $-v(x) \le \omega_\delta(x), \quad \forall x : \delta \le |x| \le R$. Paskutines dvi nelygybes galima užrašyti taip:

$$|v(x)| \le \omega_\delta(x), \quad \forall x : \delta \le |x| \le R.$$

Artindami skaičių δ į 0, gausime, $v(x) = 0$, $\forall x \in B_R(0) \setminus \{0\}$. Taigi funkcija u srityje $B_R(0) \setminus \{0\}$ sutampa su harmonine visame rutulyje B_R funkcija U. Apibrėžkime funkcijos u reikšmę taške $x = 0$ lygybe $u(0) = U(0)$. Tada funkcija u bus harmoninė visame rutulyje $B_R(0)$, kartu ir visoje srityje Ω. $\triangleright$

Kai $n = 2$, šią teoremą rekomenduojame įrodyti savarankiškai.

7.9. KELVINO TRANSFORMACIJA

Tarkime, funkcija u yra apibrėžta srityje $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Fiksuokime skaičių $R > 0$ tokį, kad $\Omega \subset B_R(0)$. Kiekvienam taškui $x \in \Omega$ priskirkime tašką

$$y = \frac{x}{|x|^2} R^2,$$

simetrinį sferos $S_R(0)$ atžvilgiu. Tada sritį Ω atitiks sritis

$$Q = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \frac{x}{|x|^2} R^2, \ x \in \Omega \Big\}.$$

Tegu

$$v(y) = \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} \, u\Big(\frac{y}{|y|^2} R^2\Big), \quad y \in Q.$$

Taip apibrėžtą funciją v vadinsime funkcijos u *Kelvino transformacija.*

Įrodysime, kad funkcija u tenkina Laplaso lygtį srityje Ω tada ir tik tada, kai funkcija v tenkina Laplaso lygtį srityje Q. Tuo tikslu suskaičiuosime išvestines:

$$v_{y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} u\Big) = R^{n-2}\Big\{ \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\frac{1}{|y|^{n-2}}\Big) u + \frac{1}{|y|^{n-2}} \sum_{k=1}^n u_{x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \Big\},$$

$$v_{y_i y_i} = R^{n-2}\Big\{ \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\Big(\frac{1}{|y|^{n-2}}\Big) u + 2 \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\frac{1}{|y|^{n-2}}\Big) \sum_{k=1}^n u_{x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \Big\} +$$
$$+ R^{n-2}\Big\{ \frac{1}{|y|^{n-2}} \sum_{k=1}^n u_{x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_i^2} + \frac{1}{|y|^{n-2}} \sum_{k,l=1}^n u_{x_k x_l} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \Big\}.$$

Sumuodami antros eilės išvestines nuo 1 iki n, gausime

$$\Delta v = R^{n-2}\Big\{ \sum_{k=1}^n u_{x_k} \Big[2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\frac{1}{|y|^{n-2}}\Big) \frac{\partial x_k}{\partial y_i} + \frac{1}{|y|^{n-2}} \Delta_y x_k \Big] \Big\} +$$
$$+ R^{n-2}\Big\{ \frac{1}{|y|^{n-2}} \sum_{k,l=1}^n u_{x_k x_l} \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \Big) \Big\}. \tag{7.28}$$

Funkcijų

$$x_k = \frac{y_k}{|y|^2} R^2, \ k = 1, \ldots, n,$$

išvestinės

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \left(\frac{\delta_{ik}}{|y|^2} - \frac{2 y_k y_i}{|y|^4} \right) R^2,$$

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial y_i^2} = \left(\frac{-4 y_i \delta_{ik}}{|y|^2} - \frac{2 y_k}{|y|^4} + \frac{8 y_i^2 y_k}{|y|^6} \right) R^2.$$

Pasinaudoję šiomis formulėmis, lengvai galime įsitikinti, kad

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{|y|^{n-2}}\right)\frac{\partial x_k}{\partial y_i}=\frac{2(n-2)y_k}{|y|^{n+2}}R^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\frac{\partial x_l}{\partial y_i}=\frac{\delta_{kl}}{|y|^4},\quad \Delta_y x_k=-\frac{2(n-2)y_k}{|y|^{n+2}}R^2.$$

Įstatę šias išraiškas į (7.28) formulę, gausime, kad visi koeficientai prie pirmos eilės išvestinių u_{x_k} ir prie mišriųjų antros eilės išvestinių $u_{x_k x_l}$ lygūs nuliui. Todėl pastarąją formulę galime perrašyti taip:

$$\Delta_y v=\frac{R^{n+2}}{|y|^{n+2}}\Delta_x u.$$

Taigi funkcija v tenkina Laplaso lygtį tada ir tik tada, kai ją tenkina funkcija u.

Tarkime, sritis Q yra neaprėžta (taip bus tada, kai taškas $0\in\Omega$) ir funkcija v srityje Q yra harmoninė. Tada funkcija

$$u(x)=\frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}}\,v\Big(\frac{x}{|x|^2}R^2\Big)$$

tenkina Laplaso lygtį srityje $\Omega\setminus\{0\}$ ir taškas $x=0$ yra funkcijos u pašalinamasis ypatingas taškas. Todėl funkciją u taške $x=0$ galima apibrėžti taip, kad ji būtų harmoninė visoje srityje Ω.

7.11 teorema. *Tarkime, funkcija v aprėžtos srities išorėje tenkina Laplaso lygtį ir*

$$v(y)\ \to\ 0,\ \text{kai } |y|\ \to\ \infty,\ (n>2),$$

$$|v(y)|\le const,\ \text{kai } |y|\ \to\ \infty\ (n=2).$$

(Šios sąlygos kartais yra vadinamos reguliarumo sąlygomis.) Tada

$$D^\alpha v(y)=\begin{cases}O(|y|^{2-n-|\alpha|}), & \text{kai } |y|\ \to\ \infty\ (n>2),\\ O(|y|^{-1-|\alpha|}), & \text{kai } |y|\ \to\ \infty\ (n=2).\end{cases}$$

$\triangleleft$ Fiksuokime skaičių $R>0$ tokį, kad funkcija v tenkintų Laplaso lygtį rutulio $B_R(0)$ išorėje. Tada funkcija

$$u(x)=\frac{1}{|x|^{n-2}}\,v\Big(\frac{x}{|x|^2}\Big)$$

tenkins Laplaso lygtį srityje $B_{1/R}(0)\setminus\{0\}$. Be to, $u(x)=o\big(E(|x|)\big)$, kai $|x|\ \to\ 0$. Taškas $x=0$ yra funkcijos u pašalinamasis ypatingas taškas. Tai leidžia (žr. 7.10 teoremą) funkciją u taške $x=0$ apibrėžti taip, kad gautoji funkcija (ją žymėsime ta pačia raide u) būtų harmoninė visame rutulyje $B_{1/R}(0)$. Kartu rutulyje $B_{1/R}(0)$ ji bus be galo diferencijuojama. Tačiau tada funkcija

$$v(y) = \frac{1}{|y|^{n-2}}\, u\Big(\frac{y}{|y|^2}\Big), \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)},$$

taip pat bus be galo diferencijuojama.

Taško $x = 0$ aplinkoje funkcija u yra aprėžta ir turi aprėžtas bet kurios eilės dalines išvestines kintamųjų $x_k,\ k = 1, \dots, n$, atžvilgiu. Kai $|y| \to \infty$, funkcijų $|y|^{2-n}$ ir $y_i|y|^{-2},\ i = 1, \dots, n$, dalinės išvestinės

$$D^\alpha\big(|y|^{2-n}\big) = O(|y|^{2-n-|\alpha|}),$$

$$D^\alpha\big(y_i|y|^{-2}\big) = O(|y|^{-1-|\alpha|}).$$

Todėl, kai $|y| \to \infty$, išvestinė

$$D^\alpha v(y) = \begin{cases} O(|y|^{2-n-|\alpha|}), & (n > 2), \\ O(|y|^{-1-|\alpha|}), & (n = 2). \end{cases} \quad \triangleright$$

7.12 teorema. *Tegu $\varphi \in \mathrm{C}(S_R(0))$. Tada funkcija*

$$v(y) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R(0)} \frac{|y|^2 - R^2}{R\,|y-\xi|^n} \varphi(\xi)\, dS_\xi, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}$$

yra išorinio Dirichlė uždavinio

$$\Delta v(y) = 0, \qquad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)},$$
$$v(y) = \varphi(y), \qquad y \in S_R(0),$$
$$v(y) = O(|y|^{2-n}), \qquad |y| \to \infty,$$

sprendinys.

$\triangleleft$ Vidinio Dirichlė uždavinio

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in B_R(0), \quad u(x) = \varphi(x),\ x \in S_R(0),$$

sprendinys

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R(0)} \frac{R^2 - |x|^2}{R\,|x-\xi|^n} \varphi(\xi)\, dS_\xi$$

(žr. (7.26) formulę). Funkcijos u Kelvino transformacija

$$v(y) = \frac{R^{n-2}}{|y|^{n-2}} u\Big(\frac{y}{|y|^2}R^2\Big) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R(0)} \frac{|y|^2 - R^2}{R\,|y-\xi|^n} \varphi(\xi)\, dS_\xi$$

yra Dirichlė uždavinio rutulio $B_R(0)$ išorėje sprendinys. Pastarojoje formulėje pereidami nuo kintamųjų x prie kintamųjų y, pasinaudojome tuo, kad $|x| = R^2|y|^{-1}$ ir $|x-\xi| = |y-\xi||x|R^{-1} = |y-\xi|R|y|^{-1}$. $\triangleright$

8 SKYRIUS

Šturmo–Liuvilio uždavinys

8.1. ŠTURMO–LIUVILIO OPERATORIUS. KRAŠTINIO UŽDAVINIO SPRENDINIŲ EGZISTAVIMO IR VIENATIES TEOREMOS

Operatorių

$$\mathrm{A}u = -\frac{d}{dx}\big(p(x)u'(x)\big) + q(x)u(x)$$

vadinsime *reguliariuoju Šturmo–Liuvilio* operatoriumi (arba tiesiog Šturmo–Liuvilio operatoriumi) segmente $[a,b]$, jeigu funkcijos $p, p', q \in \mathrm{C}[a,b]$ ir

$$p(x) \geq p_0 > 0,\ \forall x \in [a,b].$$

Aibę funkcijų $\{u\}$ tokių, kad u ir u' yra absoliučiai tolydžios segmente $[a,b]$, o $u'' \in \mathrm{L}_2(a,b)$, vadinsime operatoriaus A apibrėžimo sritimi ir žymėsime $D(\mathrm{A})$.

Tegu A yra Šturmo–Liuvilio operatorius. Aibėje $D(\mathrm{A})$ ieškosime lygties

$$\mathrm{A}u = f(x), \quad x \in (a,b) \tag{8.1}$$

sprendinio, tenkinančio kraštines sąlygas

$$\begin{cases} u(a) + \alpha u'(a) = 0, \\ u(b) + \beta u'(b) = 0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Čia: $f \in \mathrm{L}_2(a,b)$, o α ir β – bet kokie realūs skaičiai (neišskiriant ir simbolių $\pm\infty$).

Įrodysime pagalbinį teiginį.

8.1 lema. *Tegu u – absoliučiai tolydi segmente $[a,b]$ funkcija, $u' \in \mathrm{L}_2(a,b)$. Tada $\forall \varepsilon > 0$ ir $\forall x \in [a,b]$ yra teisinga nelygybė*

$$u^2(x) \leq \varepsilon \int_a^b u'^2(y)\,dy + \Big(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}\Big) \int_a^b u^2(y)\,dy. \tag{8.3}$$

◁ Laisvai pasirenkame taškus $x, x_0 \in [a,b]$. Pagal Niutono–Leibnico formulę

$$u^2(x) - u^2(x_0) = \int_{x_0}^{x} du^2(y) = 2\int_{x_0}^{x} u(y)u'(y)\,dy. \tag{8.4}$$

Pasinaudoję nelygybe

$$2ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0,\ a, b \in \mathbb{R},$$

įvertinsime paskutinio integralo modulį

$$\Big| 2 \int_{x_0}^{x} u(y) u'(y)\, dy \Big| \le 2 \int_a^b |u(y)||u'(y)|\, dy \le \varepsilon \int_a^b {u'}^2(y)\, dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b u^2(y)\, dy.$$

Iš šio įverčio ir (8.4) formulės išplaukia nelygybė

$$u^2(x) \le u^2(x_0) + \varepsilon \int_a^b {u'}^2(y)\, dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b u^2(y)\, dy.$$

Suintegravę ją nuo a iki b kintamojo x_0 atžvilgiu ir rezultatą padaliję iš $b - a$, gausime (8.3) nelygybę. ▹

8.1 teorema. *Tegu $q(x) \ge q_0$, $\forall x \in [a, b]$; čia $q_0 \ge 0$ pakankamai didelis skaičius (jį sukonkretinsime įrodydami teoremą). Tada* (8.1), (8.2) *uždavinys funkcijų klasėje $D(\mathrm{A})$ negali turėti dviejų skirtingų sprendinių.*

◃ Tegu funkcijų klasėje $D(\mathrm{A})$ yra du (8.1), (8.2) kraštinio uždavinio sprendiniai u_1 ir u_2. Tada jų skirtumas $u = u_1 - u_2 \in D(\mathrm{A})$, tenkina lygtį

$$\mathrm{A}u = 0 \tag{8.5}$$

ir (8.2) kraštines sąlygas. Įrodysime, kad $u = 0$.

Kadangi funkcija u tenkina (8.5) lygtį, tai

$$\int_a^b u \mathrm{A} u\, dx = 0.$$

Panaudoję integravimo dalimis formulę, perrašysime šią tapatybę taip:

$$\int_a^b \big(p\, {u'}^2 + q\, u^2\big)\, dx - p\, u\, u'\big|_a^b = 0. \tag{8.6}$$

Atskirai išnagrinėsime du paprasčiausius atvejus.

1. Tegu $\alpha = \beta = 0$. Tada

$$\int_a^b \big(p\, {u'}^2 + q\, u^2\big)\, dx = 0. \tag{8.7}$$

Šiuo atveju galime imti $q_0 = 0$. Iš tikrųjų, jeigu $q(x) \geq q_0 = 0$ ir funkcija u tenkina (8.2) kraštines sąlygas, tai (8.7) tapatybė yra galima tik tuo atveju, kai $u = 0$.

2. Tegu $\alpha < 0$, $\beta > 0$ ir bent vienas iš šių skaičių yra baigtinis. Tada (8.6) tapatybę galima perrašyti taip:

$$\int_a^b \big(p\,u'^2 + q\,u^2\big)\,dx + p(b)\frac{u^2(b)}{\beta} - p(a)\frac{u^2(a)}{\alpha} = 0. \tag{8.8}$$

Šiuo atveju galime imti $q_0 = 0$. Iš tikrųjų, jeigu $q(x) \geq q_0 = 0$, tai (8.8) tapatybė yra galima tik tuo atveju, kai $u = 0$.

Išnagrinėsime bendrąjį atvejį. Tarkime, koeficientai α ir β nelygūs nuliui (atvejis, kai vienas koeficientas lygus nuliui, nagrinėjamas analogiškai). Įvertinsime neintegralinius (8.8) tapatybės narius. Funkcijos u^2 reikšmės taškuose a ir b (žr. (8.3) įvertį) neviršija

$$\varepsilon\int_a^b u'^2(x)\,dx + \Big(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\int_a^b u^2(x)\,dx, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Paėmę

$$\varepsilon = \frac{1}{2}p_0\Big(\frac{p(b)}{|\beta|} + \frac{p(a)}{|\alpha|}\Big)^{-1}$$

ir pažymėję

$$q_0 = \Big(\frac{p(b)}{|\beta|} + \frac{p(a)}{|\alpha|}\Big)\Big(\frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}\Big),$$

gausime nelygybę

$$\int_a^b \Big(\frac{1}{2}p_0\,u'^2 + (q - q_0)\,u^2\Big)\,dx \leq 0. \tag{8.9}$$

Pagal teoremos sąlygą $q(x) \geq q_0$. Be to, $p_0 > 0$. Todėl (8.9) nelygybė yra galima tik tuo atveju, kai $u = 0$. $\triangleright$

8.2 teorema. *Tegu $q(x) \geq q_0$, $\forall x \in [a,b]$ (čia skaičius q_0 iš 8.1 teoremos). Tada $\forall f \in \mathrm{L}_2(a,b)$ egzistuoja vienintelis* (8.1), (8.2) *kraštinio uždavinio sprendinys $u \in D(\mathrm{A})$.*

$\triangleleft$ Tegu $u_1 \not\equiv 0$ ir $u_2 \not\equiv 0$ paprastosios diferencialinės lygties $\mathrm{A}u = 0$ sprendiniai, tenkinantys sąlygas:

$$u_1(a) + \alpha u_1'(a) = 0, \quad u_2(b) + \beta u_2'(b) = 0.$$

Iš paprastųjų diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad tokie sprendiniai egzistuoja. Jų galima ieškoti tarp lygties $\mathrm{A}u = 0$ sprendinių, tenkinančių tam tikras pradines sąlygas. Pavyzdžiui, jeigu $\alpha \neq 0$, tai u_1 galima ieškoti tarp lygties $\mathrm{A}u = 0$ sprendinių, tenkinančių pradines sąlygas: $u(a) = 1$, $u'(a) = -1/\alpha$. Be to, sprendiniai u_1 ir $u_2 \in \mathrm{C}^2[a,b]$ (smulkiau apie tai žr. [12] knygoje).

Įrodysime, kad sprendiniai u_1 ir u_2 yra tiesiškai nepriklausomi. Tarkime priešingai, $u_1 = cu_2$. Tada funkcija u_1 tenkins (8.5) lygtį ir (8.2) kraštines sąlygas. Kadangi $q(x) \geq q_0$, tai (žr. 8.1 teoremos įrodymą) $u_1 = 0$. Tačiau $u_1(a) = 1$. Taigi padaryta prielaida yra neteisinga ir funkcijos u_1, u_2 yra tiesiškai nepriklausomos.

Tegu

$$G(x,y) = \frac{1}{C}\begin{cases} u_1(x)u_2(y), & kai x \leq y, \\ u_1(y)u_2(x), & kai x \geq y. \end{cases}$$

Konstantą C sukonkretinsime vėliau. O dabar įrodysime keletą funkcijos G savybių.

1. Kvadrate $[a,b] \times [a,b]$ funkcija G yra tolydi ir simetrinė. Tai tiesiogiai išplaukia iš jos apibrėžimo.

2. Funkcija G tenkina (8.2) kraštines sąlygas. Norint tuo įsitikinti, pakanka pastebėti, kad

$$\big[G(x,y) + \alpha G_x(x,y)\big]_{x=a} = \frac{u_1(a) + \alpha u_1'(a)}{C} u_2(y) = 0,$$

$$\big[G(x,y) + \beta G_x(x,y)\big]_{x=b} = \frac{u_2(b) + \beta u_2'(b)}{C} u_1(y) = 0.$$

3. Kiekviena iš funkcijų u_1 ir u_2 tenkina (8.5) lygtį. Todėl, kai $x \neq y$, šią lygtį tenkina ir funkcija G.

4. Konstantą C galima parinkti taip, kad

$$G_x(x,y)\Big|_{y=x-0}^{y=x+0} = \frac{1}{p(x)}. \tag{8.10}$$

◁ Pagal funkcijos G apibrėžimą

$$G_x(x,y)\Big|_{y=x-0}^{y=x+0} = \frac{u_1'(x)u_2(x)}{C} - \frac{u_1(x)u_2'(x)}{C} = -\frac{1}{C}\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Determinanto

$$w(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}$$

išvestinė

$$w'(x) = u_1(x)u_2''(x) - u_2(x)u_1''(x).$$

Kadangi

$$u_i''(x) = \frac{1}{p(x)}\big(-p'(x)u_i'(x) + q(x)u_i(x)\big), \quad \forall i = 1,2,$$

tai

$$w'(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)}\big(u_2'(x)u_1(x) - u_2(x)u_1'(x)\big) = -\frac{p'(x)}{p(x)} w(x).$$

Taigi funkcija w yra lygties

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -\frac{p'(x)}{p(x)}$$

sprendinys. Suintegravę šią lygtį, gausime

$$w(x) = w(a)p(a)\frac{1}{p(x)}.$$

Todėl

$$G_x(x,y)\Big|_{y=x-0}^{y=x+0} = -\frac{1}{C}w(a)p(a)\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{p(x)},$$

kai $C = -p(a)w(a)$.

Funkcija, kuri tenkina visas $1-4$ punktuose nurodytas sąlygas, vadinama *Gryno* funkcija. Ji yra susijusi su operatoriumi A ir (8.2) kraštinėmis sąlygomis.

Apibrėšime funkciją

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)\,dy, \quad f \in \mathrm{L}_2(a,b)\,.$$

Įrodysime, kad ji priklauso operatoriaus A apibrėžimo sričiai $D(\mathrm{A})$, tenkina (8.1) lygtį ir (8.2) kraštines sąlygas.

Iš pradžių įsitikinsime, kad funkcija u yra absoliučiai tolydi. Pagal Niutono–Leibnico formulę

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_a^b \int_{x_1}^{x_2} G_x(x,y)f(y)\,dydx, \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]. \tag{8.11}$$

Kadangi funkcijos G išvestinė G_x yra aprėžta, o $f \in \mathrm{L}_2(a,b)$, tai pointegralinė funkcija $G_x(x,y)f(y)$, kaip dviejų kintamųjų funkcija, yra sumuojama kvadrate $(a,b)\times(a,b)$. Tačiau tada funkcija

$$\int_a^b G_x(x,y)f(y)\,dy$$

yra sumuojama intervale (a,b) ir (8.11) formulėje galima sukeisti integravimo tvarką. Taigi skirtumas

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2}\Big(\int_a^b G_x(x,y)f(y)\,dy\Big)dx, \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b].$$

Pagal apibrėžimą funkcija u yra absoliučiai tolydi segmente $[a,b]$ ir b.v. $x \in (a,b)$ egzistuoja sumuojama išvestinė

$$u'(x) = \int_a^b G_x(x,y)f(y)\,dy.$$

Įrodysime, kad funkcija u' yra absoliučiai tolydi. Iš pradžių įsitikinsime, kad funkcija $p\,u'$ yra absoliučiai tolydi. Laisvai pasirenkame $x_1,\ x_2 \in [a,b]$. Tada skirtumas

$$p(x)u'(x)\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = \int_a^b p(x)G_x(x,y)\Big|_{x_1}^{x_2} f(y)\,dy = \int_a^{x_1} p(x)G_x(x,y)\Big|_{x_1}^{x_2} f(y)\,dy +$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} p(x)G_x(x,y)\Big|_{x_1}^{x_2} f(y)\,dy + \int_{x_2}^{b} p(x)G_x(x,y)\Big|_{x_1}^{x_2} f(y)\,dy. \tag{8.12}$$

Paskutinius tris integralus pažymėsime atitinkamai I_1, I_2 ir I_3. Pasinaudoję Niutono–Leibnico formule, taip pat 3 ir 4 funkcijos G savybėmis, perrašysime juos taip:

$$I_1 = \int_a^{x_1}\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\big(p(x)G_x(x,y)\big)\,f(y)\,dxdy = \int_a^{x_1}\int_{x_1}^{x_2} q(x)G(x,y)f(y)\,dxdy =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\Big(\int_a^{x_1} G(x,y)f(y)\,dy\Big)\,q(x)\,dx,$$

$$I_3 = \int_{x_2}^{b}\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\big(p(x)G_x(x,y)\big)\,f(y)\,dxdy = \int_{x_2}^{b}\int_{x_1}^{x_2} q(x)G(x,y)f(y)\,dxdy =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\Big(\int_{x_2}^{b} G(x,y)f(y)\,dy\Big)\,q(x)\,dx,$$

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2}\left\{p(x)G_x(x,y)\Big|_{x=x_1}^{x=y-0} - p(x)G_x(x,y)\Big|_{x=y-0}\right\} f(y)\,dy +$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left\{p(x)G_x(x,y)\Big|_{x=y+0}^{x=x_2} + p(x)G_x(x,y)\Big|_{x=y+0}\right\} f(y)\,dy =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{y} \frac{d}{dx}\big(p(x)G_x(x,y)\big)\,f(y)\,dxdy + \int_{x_1}^{x_2}\int_{y}^{x_2} \frac{d}{dx}\big(p(x)G_x(x,y)\big)\,f(y)\,dxdy -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} f(y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x_2} q(x)G(x,y)f(y)\,dxdy - \int_{x_1}^{x_2} f(y)\,dy.$$

Įstatę gautas integralų I_1, I_2 ir I_3 reikšmes į (8.12) lygybę, gausime

$$p(x)u'(x)\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = \int\limits_{x_1}^{x_2}\Big(\int\limits_a^b G(x,y)f(y)\,dy\Big)q(x)\,dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2}\big(u(x)q(x) - f(x)\big)\,dx.$$

Kadangi intervale (a,b) funkcija $uq - f$ yra sumuojama, tai pagal apibrėžimą funkcija $p\,u'$ yra absoliučiai tolydi segmente $[a,b]$ ir b.v. $x \in (a,b)$ turi išvestinę

$$\big(p\,u'\big)' = qu - f, \tag{8.13}$$

kuri yra sumuojama intrvale (a,b). Pagal teoremos sąlygą $p \in \mathrm{C}^1[a,b]$ ir $p(x) > p_0 > 0$. Todėl funkcija $p^{-1} \in \mathrm{C}^1[a,b]$ ir yra absoliučiai tolydi segmente $[a,b]$. Tačiau tada funkcija u', kaip dviejų absoliučiai tolydžių funkcijų $p\,u'$ ir p^{-1} sandauga, yra absoliučiai tolydi segmente $[a,b]$, o išvestinė u'' yra sumuojama intervale (a,b). Todėl galima atskliausti (8.13) lygybėje skliaustus ir perrašyti ją taip:

$$u'' = \frac{q\,u - p'u' - f}{p}. \tag{8.14}$$

Kadangi funkcija $f \in \mathrm{L}_2(a,b)$, tai dešinė (8.14) lygybės pusė yra erdvės $\mathrm{L}_2(a,b)$ elementas. Taigi $u'' \in \mathrm{L}_2(a,b)$, o $u \in D(\mathrm{A})$. Beliko įrodyti, kad funkcija u tenkina (8.1) lygtį ir (8.2) kraštines sąlygas. Tačiau tai faktiškai jau įrodyta. Perstatę (8.13) lygybės narius, lengvai galime įsitikinti, kad funkcija u tenkina (8.1) lygtį. Remiantis 2 funkcijos G savybe, galima tvirtinti, kad funkcija u tenkina (8.2) kraštines sąlygas. Be to, sukonstruotas sprendinys u yra vienintelis, nes yra patenkintos 8.1 teoremos sąlygos. ▹

P a s t a b o s:

1. Jeigu funkcija $f \in \mathrm{C}[a,b]$, tai $u'' \in \mathrm{C}[a,b]$. Norint tuo įsitikinti, pakanka pastebėti, kad (8.14) formulės dešinės pusės glodumas sutampa su funkcijos f glodumu.

2. Nehomogeninių kraštinių sąlygų

$$u(a) + \alpha u'(a) = \sigma_a, \quad u(b) + \beta u'(b) = \sigma_b \tag{8.15}$$

atveju (8.1), (8.15) kraštinį uždavinį galima suvesti į to paties pavidalo kraštinį uždavinį su homogeninėmis kraštinėmis sąlygomis. Iš tikrųjų imkime kokią nors funkciją $h \in D(\mathrm{A})$, kuri tenkina (8.15) kraštines sąlygas. Tada funkcija $u = v + h \in D(\mathrm{A})$, tenkins (8.1) lygtį ir (8.15) kraštines sąlygas, jeigu funkcija $v \in D(\mathrm{A})$, tenkins lygtį

$$\mathrm{A}v = f - \mathrm{A}h, \quad f - \mathrm{A}h \in \mathrm{L}_2(a,b)$$

ir homogenines kraštines sąlygas

$$v(a) + \alpha v'(a) = 0, \quad v(b) + \beta v'(b) = 0.$$

8.2. TIKRINĖS REIKŠMĖS IR TIKRINĖS FUNKCIJOS

Iš pradžių nagrinėsime kraštinį uždavinį

$$\mathrm{A}u = f(x), \quad x \in (a,b), \tag{8.16}$$

$$u(a) + \alpha u'(a) = 0, \quad u(b) + \beta u'(b) = 0, \tag{8.17}$$

kai q yra bet kokia tolydi segmente $[a,b]$ funkcija (žr. 8.1 skyrelį). Tuo tikslu perrašysime (8.16) lygtį taip:

$$\mathrm{A}u + \lambda_0 u = f + \lambda_0 u;$$

čia: $\lambda_0 : q(x) + \lambda_0 \geq q_0,\ \forall x \in [a,b]$.

Tegu G yra Gryno funkcija, atitinkanti operatorių $\mathrm{A} + \lambda_0 \mathrm{I}$ ir (8.17) kraštines sąlygas. Iš 8.2 teoremos įrodymo išplaukia:

1. Jeigu funkcija $u \in D(\mathrm{A})$ yra (8.16), (8.17) kraštinio uždavinio sprendinys, tai ji priklauso $\mathrm{L}_2(a,b)$ ir yra integralinės lygties

$$u(x) = \int\limits_a^b G(x,y)\big(f(y) + \lambda_0 u(y)\big)\, dy \tag{8.18}$$

   sprendinys;

2. Jeigu funkcija $u \in \mathrm{L}_2(a,b)$ yra (8.18) lygties sprendinys, tai $u \in D(\mathrm{A})$, tenkina (8.16) lygtį ir (8.17) kraštines sąlygas.

Taigi (8.16), (8.17) kraštinis uždavinys turi sprendinį funkcijų klasėje $D(\mathrm{A})$ tada ir tik tada, kai (8.18) integralinė lygtis turi sprendinį erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$.

Tegu G yra integralinis operatorius, kurio branduolys yra Gryno funkcija $G(x,y)$, t.y.

$$\mathrm{G}u(x) = \int\limits_a^b G(x,y)u(y)\, dy.$$

Tada (8.18) lygtį galime perrašyti taip:

$$u = \lambda_0 \mathrm{G}u + F; \tag{8.19}$$

čia $F = \mathrm{G}f$. Kadangi Gryno funkcija yra tolydi ir simetrinė, tai

$$(\mathrm{G}u, v) = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_a^b G(x,y)u(y)\, dy\Big) v(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b u(y) \Big(\int\limits_a^b G(x,y)v(x)\, dx\Big)\, dy = (u, \mathrm{G}v).$$

Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad operatorius

$$\mathrm{G} : \mathrm{L}_2(a,b) \to \mathrm{L}_2(a,b)$$

yra savijungis. Be to, funkcija $G \in \mathrm{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$. Todėl operatorius **G**, veikiantis iš erdvės $\mathrm{L}_2(a,b)$ į erdvę $\mathrm{L}_2(a,b)$, yra visiškai tolydus (žr. [1], 1.3 skyrelį). Vadinasi, (8.19) lygtis yra Fredholmo lygtis ir jai galima taikyti žinomas Fredholmo teoremas (žr. [1], 1.3 skyrelį). Iš šių teoremų išplaukia, kad yra galimos tik tokios dvi situacijos:

1. Homogeninė lygtis
$$u - \lambda_0 \mathrm{G} u = 0 \tag{8.20}$$
erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$ turi tik trivialų sprendinį. Tada (8.19) lygtis su kiekviena funkcija $F \in \mathrm{L}_2(a,b)$ turi sprendinį erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$ ir jis yra vienintelis.

2. Jeigu (8.20) lygtis turi netrivialų sprendinį, tai (8.19) lygtis turi sprendinį erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$ tik tokioms funkcijoms $F \in \mathrm{L}_2(a,b)$, kurios yra ortogonalios jungtinės homogeninės lygties $u - \lambda_0 \mathrm{G}^* u = 0$ sprendiniams. Kadangi operatorius G yra savijungis, tai ši lygtis sutampa su (8.20) lygtimi.

Taigi norint išsiaiškinti, kada (8.16), (8.17) kraštinis uždavinys funkcijų klasėje $D(\mathrm{A})$ turi sprendinį, reikia žinoti, kokioms parametro λ_0 reikšmėms egzistuoja netrivialus (8.20) lygties sprendinys erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$. Parodysime, kad šis uždavinys yra ekvivalentus *Šturmo–Liuvilio* uždaviniui: *rasti tas parametro λ reikšmes, kurioms egzistuoja netrivialus lygties*

$$\mathrm{A} u = \lambda u \tag{8.21}$$

sprendinys $u \in D(\mathrm{A})$, tenkinantis (8.17) kraštines sąlygas. Tokios parametro λ reikšmės yra vadinamos *tikrinėmis reikšmėmis,* o jas atitinkantys netrivialūs sprendiniai vadinami *tikrinėmis funkcijomis.* Toliau trumpumo dėlei (8.21), (8.17) uždavinio tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas vadinsime operatoriaus A tikrinėmis reikšmėmis ir tikrinėmis funkcijomis.

Tegu G yra Gryno funkcija, atitinkanti operatorių $\mathrm{A} + \lambda_0 \mathrm{I}$ ir (8.17) kraštines sąlygas; skaičius $\lambda_0 : q(x) + \lambda_0 \geq q_0$, $\forall x \in [a,b]$; G – integralinis operatorius su branduoliu $G(x,y)$. Perrašykime (8.21) lygtį taip:

$$\mathrm{A} u + \lambda_0 u = (\lambda + \lambda_0) u.$$

Jeigu funkcija $u \in D(\mathrm{A})$ yra netrivialus (8.21), (8.17) uždavinio sprendinys kokiai nors parametro λ reikšmei, tai (žr. 8.2 teoremos įrodymą) ji yra operatorinės lygties

$$u = (\lambda + \lambda_0) \mathrm{G} u = 0 \tag{8.22}$$

sprendinys erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$. Ir atvirkščiai. Jeigu kokiai nors parametro λ reikšmei u yra netrivialus (8.22) lygties sprendinys erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$, tai funkcija $u \in D(\mathrm{A})$ ir yra (8.21), (8.17) uždavinio sprendinys.

P a s t a b a. Skaičius λ yra (8.21), (8.17) uždavinio tikrinė reikšmė tada ir tik tada, kai skaičius $\lambda + \lambda_0$ yra operatoriaus $\mathbf{G}$ *charakteristinė reikšmė.*

Tegu λ yra operatoriaus A tikrinė reikšmė. Tada $\lambda + \lambda_0$ yra operatoriaus $\mathrm{A}+\lambda_0\mathrm{I}$ tikrinė reikšmė. Įrodysime, kad $\lambda+\lambda_0 \neq 0$. Tarkime priešingai, $\lambda+\lambda_0 = 0$. Tada egzistuoja funkcija $u \not\equiv 0$, tenkinanti (8.17) kraštines sąlygas ir lygtį $\mathrm{A}u+\lambda_0 u = 0\cdot u = 0$. Pagal 8.1 teoremą vienintelis tokio uždavinio sprendinys yra funkcija $u \equiv 0$. Gauta prieštara įrodo, kad skaičius $\lambda+\lambda_0 = 0$ nėra operatoriaus $\mathrm{A} + \lambda_0\mathrm{I}$ tikrinė reikšmė.

Kiekvieną operatoriaus $\mathrm{A} + \lambda_0\mathrm{I}$ tikrinę reikšmę $\lambda + \lambda_0$ atitinka tik viena tiesiškai nepriklausoma tikrinė funkcija. Jeigu kokią nors tikrinę reikšmę atitinka dvi tikrinės funkcijos, tai taške a jos tenkina (8.17) kraštinę sąlygą ir iš jų sudarytas Vronskio determinantas w taške a lygus nuliui. Tačiau tada jis yra lygus nuliui $\forall x \in [a, b]$, o tikrinės funkcijos yra tiesiškai priklausomos.

Priminsime, kad $q(x) + \lambda_0 \geq q_0$, $\forall x \in [a, b]$. Todėl (žr. 8.1 teoremos įrodymą) yra teisinga nelygybė $(\mathrm{A}u + \lambda_0 u, u) \geq 0, \quad \forall u \in D(\mathrm{A})$. Be to, lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $u \equiv 0$.

Tarkime, $\lambda + \lambda_0$ yra operatoriaus $\mathrm{A} + \lambda_0\mathrm{I}$ tikrinė reikšmė ir u – ją atitinkanti tikrinė funkcija. Tada

$$0 \;\leq\; (\mathrm{A}u + \lambda_0 u, u) = \big((\lambda + \lambda_0)u, u\big) = (\lambda + \lambda_0)(u, u). \tag{8.23}$$

Kadangi $(u, u) > 0$ ir $\lambda+\lambda_0 \neq 0$, tai iš (8.23) nelygybės gauname, kad $\lambda+\lambda_0 > 0$. Taigi visos operatoriaus $\mathrm{A} + \lambda_0\mathrm{I}$ tikrinės reikšmės yra teigiamos.

Tegu $\lambda + \lambda_0$ ir $\sigma + \lambda_0$ yra operatoriaus $\mathrm{A} + \lambda_0\mathrm{I}$ tikrinės reikšmės, o u ir v – jas atitinkančios tikrinės funkcijos. Tada

$$(\lambda + \lambda_0)(u, v) = \big((\mathrm{A} + \lambda_0\mathrm{I})u, v\big) = \big(u, (\mathrm{A} + \lambda_0\mathrm{I})v\big) = (\sigma + \lambda_0)(u, v).$$

Sulyginę kairę ir dešinę šių lygybių puses, gausime $(\lambda - \sigma)(u, v) = 0$. Iš šios lygybės išplaukia, kad skirtingas tikrines reikšmes atitinkančios tikrinės funkcijos yra ortogonalios erdvėje $\mathrm{L}_2(a, b)$.

Priminsime, kad operatorius $\mathrm{G} : \mathrm{L}_2(a, b) \to \mathrm{L}_2(a, b)$ yra visiškai tolydus. Tada (žr. [1], 1.3 skyrelį) jo tikrinių reikšmių aibė yra baigtinė arba skaičioji. Be to, jeigu ji yra skaičioji, tai sudaro artėjančių į nulį skaičių seką. Įrodysime, kad nulis nėra tikrinė operatoriaus G reikšmė. Tarkime priešingai, kad erdvėje $\mathrm{L}_2(a, b)$ egzistuoja funkcija $f \not\equiv 0$ tokia, kad

$$\int_a^b G(x, y)f(y)\, dy = 0 \cdot f(x) = 0. \tag{8.24}$$

Kadangi funkcija $u \equiv 0 \in D(\mathrm{A})$ ir ją galima išreikšti (8.24) integralu, tai ji turi tenkinti lygtį

$$-\frac{d}{dx}\big(p(x)u'(x)\big) + \big(q(x) + \lambda_0\big)u(x) = f(x).$$

Kairė šios lygties pusė yra lygi nuliui, nes $u \equiv 0$. Todėl ir dešinė šios lygties pusė lygi nuliui, t.y. funkcija $f \equiv 0$. Gauta prieštara įrodo, kad skaičius nulis nėra operatoriaus G tikrinė reikšmė.

Įrodysime, kad operatoriaus G tikrinių reikšmių aibė nėra baigtinė. Kiekvieną tikrinę operatoriaus G reikšmę atitinka viena tiesiškai nepriklausoma tikrinė funkcija, kuri apibrėžia vienmatį tiesinį erdvėje $L_2(a,b)$ poerdvį. Šių poerdvių tiesioginė suma sutampa su visa erdve $L_2(a,b)$. Kadangi nulis nėra tikrinė operatoriaus G reikšmė, tai tikrinių reikšmių aibė negali būti baigtinė (priešingu atveju erdvė $L_2(a,b)$ būtų baigtinės dimensijos erdvė). Be to, operatoriaus G tikrinių funkcijų sistema yra pilna ir ortogonali erdvėje $L_2(a,b)$. Akivaizdu, kad ją visada galima ortonormuoti.

Tegu $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra operatoriaus G tikrinių reikšmių sistema. Tada skaičiai $\lambda_k+\lambda_0=\mu_k^{-1}$, $k=1,2,\dots$, yra operatoriaus $\mathrm{A}+\lambda_0\mathrm{I}$ tikrinės reikšmės. Kadangi operatoriaus G tikrinės reikšmės $\mu_k\to 0$, kai $k\to\infty$, tai operatoriaus $\mathrm{A}+\lambda_0\mathrm{I}$ tikrinės reikšmės $\lambda_k+\lambda_0\to+\infty$. Be to, tikrinės reikšmės $\lambda_k+\lambda_0>0$, $\forall k=1,2,\dots$. Todėl jas galima sunumeruoti taip:

$$0<\lambda_1+\lambda_0<\lambda_2+\lambda_0<\cdots<\lambda_k+\lambda_0<\cdots.$$

Kiekvieną tikrinę reikšmę $\lambda_k+\lambda_0$, $k=1,2,\dots$, atitinka vienintelė normuota erdvėje $L_2(a,b)$ tikrinė funkcija u_k. Pagal apibrėžimą tikrinė funkcija u_k yra integralinės lygties $u_k=(\lambda_k+\lambda_0)\mathrm{G}u_k$ sprendinys. Todėl (žr. 8.2 teoremos įrodymą) funkcija $u_k\in D(\mathrm{A})$, tenkina lygtį $\mathrm{A}u_k+\lambda_0u_k=(\lambda_k+\lambda_0)u_k$ ir (8.17) kraštines sąlygas. Išreiškę iš šios lygties išvestinę u_k'', gausime, kad tikrinė funkcija $u_k\in C^2[a,b]$.

Įrodytus teiginius suformuluosime teorema.

8.3 teorema. *Tegu A yra Šturmo–Liuvilio operatorius, o $\{\lambda_k\}$ ir $\{u_k\}$ yra jį atitinkančių tikrinių reikšmių ir tikrinių funkcijų aibės. Tada:*

1. *Tikrinių reikšmių aibė yra skaičioji artėjančių į $+\infty$ realių skaičių seka, kurioje neigiamų tikrinių reikšmių gali būti tik baigtinis skaičius (nes $\lambda_k+\lambda_0>0$, $\forall k=1,2,\dots$ ir $\lambda_k\to+\infty$).*

2. *Kiekvieną tikrinę reikšmę λ_k atitinka vienintelė ortonormuota erdvėje $L_2(a,b)$ tikrinė funkcija u_k.*

3. *Tikrinių funkcijų sistema $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra pilna ortonormuota erdvėje $L_2(a,b)$ funkcijų sistema. Be to, $u_k\in C^2[a,b]$, $\forall k=1,2,\dots$.*

Išvada. Tegu $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ortonormuota erdvėje $L_2(a,b)$ operatoriaus A tikrinių funkcijų sistema. Tada kiekvieną funkciją $u\in L_2(a,b)$ galima skleisti eilute

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}(u,u_k)u_k(x),$$

konverguojančia erdvėje $L_2(a,b)$. Be to, funkcijos u normos[1] kvadratas

$$\|u\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}(u,u_k)^2<\infty.$$

[1] Šiame ir septintame skyriuose rašydami $\|\cdot\|$, turėsime omenyje normą erdvėje $L_2(a,b)$.

8.3. ENERGETINĖ ERDVĖ

Tegu $q(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$ ir $\alpha=\beta=0$. Nagrinėsime Šturmo–Liuvilio uždavinį:

$$\mathrm{A}u=\lambda u,\quad x\in(a,b), \tag{8.25}$$

$$u(a)=0,\ u(b)=0. \tag{8.26}$$

Šiuo atveju (žr. 8.1 teoremą) galima imti $\lambda_0=0$. Kartu galime tvirtinti, kad visos operatoriaus A tikrinės reikšmės λ_k yra teigiamos.

Tegu $\mathrm{H_A}$ yra aibė funkcijų, kurios segmente $[a,b]$ yra absoliučiai tolydžios, tenkina (8.26) kraštinę sąlygą ir kurių pirmos eilės išvestinės priklauso erdvei $\mathbf{L}_2(a,b)$. Akivaizdu, kad aibė $\mathrm{H_A}$ yra tiesinė. Imkime aibėje $\mathrm{H_A}$ kokią nors seką $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Sakysime, kad

$$u_k\xrightarrow{\mathrm{H_A}}0,\quad\text{kai}\quad k\to\infty,\text{jeigu}u_k'\xrightarrow{\mathrm{L}_2(a,b)}0,\quad\text{kai}\quad k\to\infty.$$

Įrodysime, kad aibė $\mathrm{H_A}$ su taip apibrėžta topologija yra pilna erdvė. Remiantis apibrėžimu, reikia įrodyti, kad bet kokia fundamentali erdvėje $\mathrm{H_A}$ seka konverguoja.

Tegu $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – fundamentali erdvėje $\mathrm{H_A}$ seka, t.y.

$$u_k'-u_m'\xrightarrow{\mathrm{L}_2(a,b)}0,\quad\text{kai}\quad k,\,m\to\infty.$$

Kadangi erdvė $\mathrm{L}_2(a,b)$ yra pilna, tai egzistuoja elementas $v\in\mathrm{L}_2(a,b)$ toks, kad

$$u_k'\xrightarrow{\mathrm{L}_2(a,b)}v,\quad\text{kai}\quad k\to\infty.$$

Įrodysime, kad funkcija

$$u=\int_a^x v(y)\,dy$$

priklauso erdvei $\mathrm{H_A}$. Akivaizdu, kad funkcija u yra absoliučiai tolydi. Be to, jos išvestinė $u'=v\in\mathrm{L}_2(a,b)$ ir $u(a)=0$. Beliko įrodyti, kad $u(b)=0$. Pasinaudoję Helderio nelygybe, įvertinsime skirtumą

$$|u_k(x)-u(x)|=\Big|\int_a^x\big(u_k'(y)-v(y)\big)\,dy\Big|\leq\sqrt{b-a}\|u_k'-v\|.$$

Šis įvertis yra teisingas $\forall x\in[a,b]$. Taške $x=b$ kiekviena iš funkcijų u_k lygi nuliui. Be to,

$$u_k'\xrightarrow{\mathrm{L}_2(a,b)}v,\quad\text{kai}\quad k\to\infty.$$

Todėl $u(b)=0$ ir galime tvirtinti, kad funkcija $u\in\mathrm{H_A}$ ir $u_k\xrightarrow{\mathrm{H_A}}u,\quad$ kai $\quad k\to\infty$. Vadinasi, erdvė $\mathrm{H_A}$ yra pilna.

Iš šio įrodymo taip pat išplaukia, kad, jeigu

$$u_k \xrightarrow{\mathrm{H_A}} u, \quad \text{kai} \quad k \to \infty,$$

tai segmente $[a, b]$

$$u_k(x) \rightrightarrows u(x), \quad \text{kai} \quad k \to \infty,$$

t.y. seka $\{u_k\}$ konverguoja tolygiai segmente $[a, b]$ į funkciją u. Be to, $\forall u \in \mathrm{H_A}$ yra teisingi įverčiai:

$$|u(x)| = \Big| \int_a^x u'(y)\,dy \Big| \le \sqrt{b-a}\|u'\|, \ \forall x \in [a, b], \tag{8.27}$$

$$\|u(x)\| \le (b-a)\|u'\|. \tag{8.28}$$

Erdvėje $\mathrm{H_A}$ apibrėšime skaliarinę sandaugą

$$[u, v] = \int_a^b (pu'v' + quv)\,dx$$

ir ją atitinkančią normą

$$|\!|\!| u |\!|\!| = \sqrt{[u, u]}.$$

Tiesiogiai galima įrodyti, kad taip apibrėžta skaliarinė sandauga tenkina visas skaliarinės daugybos apibrėžimo sąlygas. Norma $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ yra vadinama *energetine norma*, o erdvė $\mathrm{H_A}$ su joje apibrėžta energetine norma – *energetine erdve*.

Įrodysime, kad įvesta topologija erdvėje $\mathrm{H_A}$ yra ekvivalenti topologijai, kurią indukuoja energetinė norma. Kadangi aibė $\mathrm{H_A}$ yra tiesinė, tai pakanka įrodyti tokį teiginį: seka $\{u_k\}$ konverguoja į nulį erdvėje $\mathrm{H_A}$ tada ir tik tada, kai ši seka konverguoja į nulį energetinėje erdvėje.

Tarkime $|\!|\!| u_k |\!|\!| \to 0$, kai $k \to \infty$. Tada

$$|\!|\!| u_k |\!|\!|^2 = \int_a^b (p{u'_k}^2 + qu_k^2)\,dx \to 0.$$

Pagal prielaidą $p(x) \ge p_0 > 0$ ir $q(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, b]$. Todėl

$$\int_a^b {u'_k}^2\,dx \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Taigi seka $\{u'_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguoja į nulį erdvėje $\mathrm{L}_2(a, b)$.

Tegu seka $\{u'_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguoja į nulį erdvėje $\mathrm{L}_2(a, b)$. Pagal energetinės normos apibrėžimą

$$|\!|\!| u_k |\!|\!|^2 = [u_k, u_k] = \int_a^b (p{u'_k}^2 + qu_k^2)\,dx.$$

Kadangi funkcijos p ir q yra aprėžtos, o

$$\int_a^b u_k^2\,dx \le (b-a)^2 \int_a^b {u_k'}^2\,dx$$

(žr. (8.28) nelygybę), tai egzistuoja konstanta $C>0$ tokia, kad

$$|\!|\!|u_k|\!|\!|^2 \le C\|u_k'\|^2.$$

Tačiau tada $|\!|\!|u_k|\!|\!| \to 0$, kai $k\to\infty$.

P a s t a b a. Jeigu $u \in \mathrm{H_A}$, $v \in D(\mathrm{A})$, tai $[u,v]=(u,\mathrm{A}v)$. Įstatę vietoje v tikrinę operatoriaus A reikšmę u_k, gausime

$$[u,u_k]=(u,\mathrm{A}u_k)=\lambda_k(u,u_k).$$

8.4 teorema. *Tegu $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra operatoriaus A tikrinių funkcijų sistema, ortonormuota erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$. Tada ji yra pilna ortogonali funkcijų sistema erdvėje $\mathrm{H_A}$.*

◁ Tikrinės funkcijos $u_k \in D(\mathrm{A})$, $\forall k=1,2,\ldots$. Todėl

$$[u_n,u_k]=(\mathrm{A}u_n,u_k)=\lambda_n(u_n,u_k)=\lambda_n\delta_n^k,\ \forall n,k=1,2,\ldots.$$

Kadangi tikrinės reikšmės λ_k yra teigiamos, tai skaliarinė sandauga

$$[u_n,u_k]=0,$$

kai $n\neq k$. Taigi tikrinių funkcijų sistema $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra ortogonali erdvėje $\mathrm{H_A}$. Įrodysime, kad erdvėje $\mathrm{H_A}$ ji yra pilna. Tarkime priešingai. Tada egzistuoja funkcija $u\in\mathrm{H_A}$ (nelygi nuliui) tokia, kad

$$[u,u_k]=0,\quad \forall k=1,2,\ldots. \tag{8.29}$$

Tačiau

$$[u,u_k]=\lambda_k(u,u_k),\quad \lambda_k>0,\quad \forall k=1,2,\ldots. \tag{8.30}$$

Todėl

$$(u,u_k)=0\quad \forall k=1,2,\ldots.$$

Taigi elementas u yra ortogonalus kiekvienam sistemos $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ elementui. Tačiau ši sistema yra pilna erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$. Todėl $u=0$. Gauta prieštara įrodo, kad tikrinių funkcijų sistema $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra pilna erdvėje $\mathrm{H_A}$. ▷

I š v a d a. Tegu $u\in\mathrm{H_A}$. Tada

$$|\!|\!|u|\!|\!|^2=[u,u]=\Big[\sum_{k=1}^{\infty}(u,u_k)u_k,\sum_{k=1}^{\infty}(u,u_k)u_k\Big]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(u,u_k)^2[u_k,u_k]=\sum_{k=1}^{\infty}C_k^2\lambda_k<\infty; \tag{8.31}$$

čia $C_k=(u,u_k)$, $\forall k=1,2,\ldots$.

8.4. FURJĖ EILUČIŲ DIFERENCIJAVIMAS PANARIUI

Tegu $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra Šturmo–Liuvilio uždavinio

$$\mathbf{A}u = \lambda u, \quad x \in (a, b), \tag{8.32}$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0 \tag{8.33}$$

tikrinių reikšmių sistema, o $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ją atitinkanti ortonormuota erdvėje $\mathrm{L}_2(a, b)$ tikrinių funkcijų sistema. Be to, tegu $q(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ ir $\alpha = \beta = 0$. Įrodysime pagalbinę lemą.

8.2 lema. *Egzistuoja konstantos M_1 ir M_2 tokios, kad*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} u_k^2(x) \leq M_1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} u_k'^2(x) \leq M_2, \quad \forall x \in [a, b].$$

◁ Tegu G yra Gryno funkcija, atitinkanti operatorių A ir (8.33) kraštines sąlygas. Funkcija $G(x, y) \in \mathrm{H}_\mathrm{A}$, o jos išvestinė $G_x(x, y) \in \mathrm{L}_2(a, b)$, kiekvienam fiksuotam $x \in [a, b]$. Be to, kai $x \neq y$, funkcija $G_x(x, y)$ yra tolydi, o kai $x = y$, turi baigtinį trūkį. Todėl integralai

$$|\!|\!| G |\!|\!|^2 = \int_a^b \left[p(y) G_y^2(x, y) + q(y) G^2(x, y)\right] dy, \quad \|G_x\|^2 = \int_a^b G_x^2(x, y)\, dy$$

kintamojo x atžvilgiu yra tolydžios segmente $[a, b]$ funkcijos. Tačiau tada segmente $[a, b]$ jos yra aprėžtos. Taigi egzistuoja konstantos M_1 ir M_2 tokios, kad

$$|\!|\!| G |\!|\!|^2 \leq M_1, \quad \|G_x\|^2 \leq M_2.$$

Antra vertus,

$$|\!|\!| G |\!|\!|^2 = [G, G] = \sum_{k=1}^{\infty} (G, u_k)^2 [u_k, u_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} u_k^2(x) \cdot \lambda_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} u_k^2(x),$$

$$\|G_x\|^2 = (G_x, G_x) = \sum_{k=1}^{\infty} (G_x, u_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} u_k'^2(x).$$

Lema įrodyta. ▷

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, eilutė $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$ segmente $[a, b]$ konverguoja *reguliariai,* jeigu eilutė $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\psi_k(x)|$ segmente $[a, b]$ konverguoja tolygiai.

Tegu $u \in \mathrm{L}_2(a,b)$. Tada

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k(x), \quad C_k = (u, u_k), \quad \forall k = 1, 2, \dots, \tag{8.34}$$

ir

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < \infty.$$

Tikrinės funkcijos $u_k \in \mathrm{C}^2[a,b]$, $\forall k = 1, 2, \dots$. Todėl galime sudaryti eilutes

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k'(x), \tag{8.35}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k''(x). \tag{8.36}$$

Ištirsime šių eilučių konvergavimą.

8.5 teorema (apie Furjė eilučių diferencijavimą panariui).

1. *Tegu funkcija $u \in \mathrm{H_A}$. Tada (8.34) eilutė segmente $[a,b]$ konverguoja reguliariai, o (8.35) eilutė konverguoja $\mathrm{L}_2(a,b)$ erdvėje ir*

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k'(x).$$

2. *Tegu funkcija $u \in D(\mathrm{A})$ ir tenkina (8.33) kraštines sąlygas. Tada (8.35) eilutė segmente $[a,b]$ konverguoja reguliariai, o (8.36) eilutė konverguoja $\mathrm{L}_2(a,b)$ erdvėje ir*

$$u''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k''(x).$$

3. *Tegu $u \in D(\mathrm{A})$, $\mathrm{A}u \in \mathrm{H_A}$ ir funkcija u tenkina (8.33) kraštines sąlygas. Tada (8.36) eilutė segmente $[a,b]$ konverguoja reguliariai.*

◃ 1. Tegu $u \in \mathrm{H_A}$. Įrodysime, kad (8.34) eilutė segmente $[a,b]$ konverguoja reguliariai. Pasinaudoję Koši–Buniakovskio nelygybe, įvertinsime baigtinę sumą

$$\sum_{k=n}^{m+n} |C_k||u_k(x)| \le$$

$$\le \Big(\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k C_k^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k^{-1} u_k^2(x)\Big)^{1/2} \le M_1^{1/2} \Big(\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k C_k^2\Big)^{1/2}. \tag{8.37}$$

Kadangi $u \in \mathrm{H_A}$, tai

$$|\!|u|\!|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k C_k^2 < \infty$$

ir

$$\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k C_k^2 \to 0,$$

kai $m, n \to \infty$. Iš čia ir (8.37) įverčio išplaukia, kad (8.34) eilutė segmente $[a, b]$ konverguoja reguliariai. Be to,

$$\Big|\!\Big|\sum_{k=1}^{n} C_k u_k - u\Big|\!\Big|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k C_k^2 \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Todėl (8.34) eilutė konverguoja į funkciją u tolygiai, o (8.35) eilutė konverguoja į u' erdvėje $\mathrm{L}_2(a, b)$.

2. Tegu funkcija $u \in D(\mathrm{A})$ ir tenkina (8.33) kraštines sąlygas. Tada

$$\mathrm{A}u = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{A}u, u_k) u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \mathrm{A}u_k) u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k C_k u_k \in \mathrm{L}_2(a, b)$$

ir

$$\|\mathrm{A}u\|^2 = (\mathrm{A}u, \mathrm{A}u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 C_k^2 < \infty. \tag{8.38}$$

Pasinaudoję Koši–Buniakovskio nelygybe, įvertinsime baigtinę sumą:

$$\sum_{k=n}^{m+n} |C_k| |u_k'(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k^2 C_k^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k^{-2} u_k'^2(x)\Big)^{1/2} \leqslant M_2^{1/2} \Big(\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k^2 C_k^2\Big)^{1/2}. \tag{8.39}$$

Kadangi (8.38) eilutė konverguoja, tai $\sum\limits_{k=n}^{m+n} \lambda_k^2 C_k^2 \to 0$, kai $m, n \to \infty$. Iš čia ir (8.39) įverčio išplaukia, kad (8.35) eilutė segmente $[a, b]$ konverguoja reguliariai.

Įrodysime, kad (8.36) eilutė konverguoja erdvėje $\mathrm{L}_2(a, b)$. Priminsime, kad tikrinės funkcijos $u_k \in \mathrm{C}^2[a, b]$. Todėl lygybėje

$$-\frac{d}{dx}\big(p u_k'\big) + q u_k = \lambda_k u_k$$

galima atskliausti skliaustus ir perrašyti ją taip:

$$u_k'' = -\frac{p'}{p} u_k' + \frac{q}{p} u_k - \frac{1}{p} \lambda_k u_k.$$

Padauginę šią lygybę iš C_k ir susumavę pagal k nuo n iki $n+m$, gausime

$$\sum_{k=n}^{m+n} C_k u_k'' = -\frac{p'}{p}\sum_{k=n}^{m+n} C_k u_k' + \frac{q}{p}\sum_{k=n}^{m+n} C_k u_k - \frac{1}{p}\sum_{k=n}^{m+n} C_k \lambda_k u_k. \tag{8.40}$$

Kadangi eilutė $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k C_k u_k$ konverguoja erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$, o (8.34) ir (8.35) eilutės konverguoja segmente $[a,b]$ reguliariai, tai (8.36) eilutė konverguoja erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$ ir

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k u_k'' = -\frac{p'}{p}u' + \frac{q}{p}u - \frac{1}{p}\mathrm{A}u \equiv u''.$$

3. Tegu $u\in D(\mathrm{A})$, $\mathrm{A}u\in \mathrm{H}_\mathrm{A}$ ir funkcija u tenkina (8.33) kraštines sąlygas. Tada

$$\|\mathrm{A}u\|^2 = [\mathrm{A}u,\mathrm{A}u] = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 C_k^2 [u_k,u_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 C_k^2 < \infty. \tag{8.41}$$

Norint įrodyti (8.36) eilutės reguliarų konvergavimą segmente $[a,b]$, pakanka įrodyti eilutės (žr. (8.40))

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k C_k u_k \tag{8.42}$$

reguliarų konvergavimą segmente $[a,b]$. Pasinaudoję Koši–Buniakovskio nelygybe, įvertinsime baigtinę sumą

$$\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k |C_k||u_k(x)| \le$$

$$\le \Big(\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k^3 C_k^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k^{-1} u_k^2(x)\Big)^{1/2} \le M_1^{1/2} \Big(\sum_{k=n}^{m+n} \lambda_k^3 C_k^2\Big)^{1/2}. \tag{8.43}$$

Kadangi (8.41) eilutė konverguoja, tai $\sum\limits_{k=n}^{m+n} \lambda_k^3 C_k^2 \to 0$, kai $m,n\to\infty$. Iš čia ir (8.43) įverčio išplaukia, kad (8.42) eilutė, kartu ir (8.36) eilutė segmente $[a,b]$ konverguoja reguliariai. Teorema įrodyta. ▹

P a s t a b a. Trečio ir ketvirto skyrelių pradžioje suformuluotos prielaidos nėra esminės. Pavyzdžiui, jeigu q yra bet kokia tolydi segmente $[a,b]$ funkcija, tai prie abiejų lygties $\mathrm{A}u = \lambda u$ pusių reikia pridėti narį $\lambda_0 u$, o skaičių λ_0 parinkti taip, kad $q(x) + \lambda_0 \ge 0$, $\forall x\in[a,b]$. Koeficientai α ir β taip pat gali įgyti bet kokias reikšmes. Šiuo atveju skaičių λ_0 reikia parinkti taip, kad $q(x)+\lambda_0 \ge q_0$, $\forall x\in[a,b]$, o vietoje skaliarinės sandaugos

$$[u,v] = \int_a^b (pu'v' + quv)\,dx$$

reikia įvesti skaliarinę sandaugą

$$[u,v] = \int_a^b \big(pu'v' + (q+\lambda_0)uv\big)\,dx + p\frac{uv}{\beta}\Big|_{x=b} - p\frac{uv}{\alpha}\Big|_{x=a}.$$

Patikrinkite, kad taip apibrėžta skaliarinė sandauga tenkina visas skaliarinės daugybos apibrėžimo sąlygas.

8.5. APIBENDRINTASIS ŠTURMO–LIUVILIO UŽDAVINYS

Tarkime, operatoriaus A koeficientai p ir q tenkina 6.1 skyrelio sąlygas, o funkcija

$$\rho \in \mathbf{C}[a,b], \quad \rho(x) \geq \rho_0 > 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

Apibendrintas Šturmo–Liuvilio uždavinys formuluojamas taip: *rasti tas parametro λ reikšmes, kurioms egzistuoja netrivialus lygties*

$$\mathrm{A}u = \lambda \rho u, \quad x \in (a,b), \tag{8.44}$$

sprendinys $u \in D(\mathrm{A})$, tenkinantis kraštines sąlygas

$$u(a) + \alpha u'(a) = 0, \quad u(b) + \beta u'(b) = 0. \tag{8.45}$$

Tegu G yra Gryno funkcija, atitinkanti operatorių A ir (8.45) kraštines sąlygas. Be to, tegu[1] $q(x) \geq q_0$, $\forall x \in [a,b]$. Tada apibendrintą Šturmo–Liuvilio uždavinį galima suvesti į integralinę lygtį

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x,y)\rho(y)u(y)\,dy := \lambda \mathrm{G}u. \tag{8.46}$$

Bendruoju atveju funkcija $G(x,y)\rho(y)$ nėra simetrinė. Vadinasi, operatorius G nėra savijungis. Tačiau (8.46) lygtį lengvai galima suvesti į integralinę simetrinio branduolio lygtį. Norint tuo įsitikinti, reikia abi (8.46) lygties puses padauginti iš $\sqrt{\rho(x)}$ ir rezultatą užrašyti taip:

$$v(x) = \lambda \int_a^b \widetilde{G}(x,y)v(y)\,dy \equiv \lambda \widetilde{\mathrm{G}}v;$$

čia: $v(x) = \sqrt{\rho(x)}u(x)$, $\widetilde{G}(x,y) = G(x,y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}$. Funkcija $\widetilde{G}$ kvadrate $[a,b] \times [a,b]$ yra tolydi ir simetrinė. Todėl $\widetilde{\mathrm{G}}$ yra visiškai tolydus savijungis operatorius, veikiantis erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$. Lengvai galima įsitikinti (žr. 8.3 teoremos įrodymą), kad: operatoriaus $\widetilde{\mathrm{G}}$ tikrinių reikšmių aibė $\{\mu_k\}$ yra skaičioji ir sudaro artėjančių į nulį skaičių seką; kiekvieną tikrinę reikšmę μ_k atitinka vienintelė ortonormuota erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$ tikrinė funkcija v_k; aibė tikrinių funkcijų $\{v_k\}$ yra pilna ortonormuota erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$ funkcijų sistema. Tačiau tada $\lambda_k = \mu_k^{-1}$ yra apibendrinto Šturmo–Liuvilio uždavinio tikrinės reikšmės, o $u_k = v_k/\sqrt{\rho}$ – jas atitinkančios tikrinės funkcijos. Tikrinės funkcijos $\{u_k\}$ yra ortogonali erdvėje $\mathrm{L}_{2,\rho}(a,b)$ funkcijų sistema, t.y.

$$\int_a^b u_k(x)u_m(x)\rho(x)\,dx = \delta_k^m.$$

Be to, erdvėje $\mathrm{L}_{2,\rho}(a,b)$ ji yra pilna.

[1] Ši prielaida nėra esminė (žr. 8.4 skyrelio pabaigą).

8.6. SINGULIARUSIS ŠTURMO–LIUVILIO UŽDAVINYS

Operatorių

$$\mathrm{A}u = -\frac{d}{dx}\big(p(x)u'(x)\big) + q(x)u, \quad x \in (a,b),$$

vadinsime *singuliariuoju*, jeigu bent viename iš intervalo (a,b) kraštinių taškų funkcija p lygi nuliui arba funkcija q yra neaprėžta, arba bent vienas iš taškų a, b lygus ∞. Taškus, kuriuose patenkinta nors viena iš šių sąlygų, vadinsime *singuliariaisiais* taškais. Singuliariajame taške kraštinės sąlygos laisvai pasirinkti negalima. Tam, kad ją tinkamai apibrėžtume, turime atlikti papildomus tyrimus. Bendrosios singuliariųjų kraštinių uždavinių teorijos čia nenagrinėsime, o ištirsime specialųjį atvejį, kai

$$p(x) = (x-a)\varphi(x), \quad \varphi(x) > 0, \forall x \in [a,b].$$

Be to, reikalausime, kad funkcijos p, p' ir $q \in \mathrm{C}(a,b)$.

Tegu u_1 ir $u_2 \in \mathrm{C}^2(a,b)$ – du tiesiškai nepriklausomi lygties

$$\mathrm{A}u = 0, \quad x \in (a,b), \tag{8.47}$$

sprendiniai. Įrodysime keletą pagalbinių teiginių.

8.3 lema. *Jeigu sprendinys u_1 yra aprėžtas taško $x = a$ aplinkoje ir*

$$u_1(x) = (x-a)^\sigma \psi(x), \quad \sigma \geq 0, \quad \psi(a) \neq 0, \tag{8.48}$$

tai sprendinys u_2 taške $x = a$ turi ypatumą.

◁ Kadangi funkcijos u_1 ir u_2 yra (8.47) lygties sprendiniai, tai reiškinys

$$u_1\mathrm{A}u_2 - u_2\mathrm{A}u_1 = 0.$$

Tačiau

$$u_1\mathrm{A}u_2 - u_2\mathrm{A}u_1 = \big(p(u_2u_1' - u_1u_2')\big)'.$$

Todėl

$$p(u_2u_1' - u_1u_2') = C. \tag{8.49}$$

Čia konstanta $C \neq 0$, nes sprendiniai u_1 ir u_2 yra tiesiškai nepriklausomi. Pagal lemos sąlygą $\psi(a) \neq 0$. Todėl egzistuoja taško $x = a$ aplinka, kurioje funkcija ψ nelygi nuliui. Tarkime, $\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, x_1]$. Tada (8.49) lygybę galima perrašyti taip:

$$\Big(\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\Big)' = -\frac{C}{p(x)\,u_1^2(x)}, \quad x \in (a, x_1].$$

Iš jos išplaukia, kad

$$u_2(x) = u_1(x)\Big(\int\limits_{x_1}^{x} \frac{-C\,dy}{\varphi(y)\,\psi^2(y)(y-a)^{2\sigma+1}} + C_1\Big), \quad x \in (a, x_1]. \tag{8.50}$$

Pritaikę vidurinių reikšmių teoremą, (8.50) lygybę perrašysime taip:

$$u_2(x) = u_1(x)\Big(\frac{-C}{\varphi(\widehat{x})\,\psi^2(\widehat{x})}\int\limits_{x_1}^{x}\frac{dy}{(y-a)^{2\sigma+1}} + C_1\Big), \quad \widehat{x}\in[x,x_1].$$

Kadangi $u_1(x) = (x-a)^\sigma\psi(x)$, tai

$$u_2(x) = w_1(x)\,\ln(x-a) + w_2(x),$$

kai $\sigma = 0$, ir

$$u_2(x) = w_1(x)\,(x-a)^{-\sigma} + w_2(x),$$

kai $\sigma > 0$. Čia w_1 ir w_2 – aprėžtos taško $x = a$ aplinkoje funkcijos. Taigi bet kuriuo atveju sprendinys u_2 taške $x = a$ turi ypatumą. ▹

I š v a d a. Sprendinių u_1 ir u_2 sandauga taške $x = a$ daugiausiai gali turėti tik logaritminę ypatumą.

8.4 lema. *Tarkime, patenkintos 8.3 lemos sąlygos ir*

$$q(x) = \frac{q_0(x)}{(x-a)^s}, \quad q_0(a)\neq 0, \quad q_0\in \mathrm{C}(a,b), \quad 0\leq s<\sigma+1.$$

Tada

$$\lim_{x\to a} p(x)u_1'(x) = 0.$$

Be to, jeigu reiškinys $q\,u_1$ yra aprėžtas taško $x = a$ aplinkoje, tai šioje aplinkoje išvestinė $u_1'(x)$ taip pat yra aprėžta.

Šio teiginio įrodymą galima rasti [1] knygoje.

Tegu u_1 ir u_2 – du tiesiškai nepriklausomi lygties $\mathrm{A}u = 0$ sprendiniai. Be to, tegu sprendinys u_1 yra aprėžtas ir tenkina (8.48) sąlygą. Tada sprendinys u_2 taške $x = a$ yra neaprėžtas. Sprendinių $u_1,\ u_2$ tiesinis darinys $u = C_1\,u_1 + C_2\,u_2$ yra bendrasis (8.47) lygties sprendinys. Taško $x = a$ aplinkoje jis yra aprėžtas tik tuo atveju, kai $C_2 = 0$. Kadangi lieka tik viena laisva konstanta, tai negalima reikalauti, kad aprėžtas sprendinys taške $x = a$ tenkintų dvi laisvai pasirinktas pradines sąlygas. Kartu negalima reikalauti, kad aprėžtas sprendinys taške $x = a$ tenkintų laisvai pasirinktą kraštinę sąlygą. Todėl natūralu patį sprendinio aprėžtumą pateikti kaip kraštinę sąlygą. Užrašyti šią sąlygą galima įvairiai. Praktiniuose uždaviniuose dažniausiai ją užrašo taip:

$$|u(a)| < \infty.$$

P a s t a b a. Jeigu abu taškai a ir b yra singuliarūs (pavyzdžiui, kai $p(a) = 0$ ir $p(b) = 0$), tai sprendinio aprėžtumo sąlygas taškuose a ir b galima užrašyti taip:

$$|u(a)| < \infty, \quad |u(b)| < \infty.$$

Tarkime, taškas a yra singuliarusis, taškas b – reguliarusis, o ρ – teigiama tolydi funkcija (singuliariajame taške ji gali būti lygi nuliui). Tada *singuliarųjį*

Šturmo–Liuvilio uždavinį galima suformuluoti taip: *rasti tas parametro λ reikšmes, kurioms egzistuoja netrivialus lygties*

$$\mathrm{A}u = \lambda\, \rho\, u, \quad x \in (a, b) \tag{8.51}$$

sprendinys, tenkinantis kraštines sąlygas

$$|u(a)| < \infty, \quad u(b) + \beta\, u'(b) = 0. \tag{8.52}$$

Operatorių A nagrinėsime erdvėje $\mathrm{L}_{2,\rho}(a, b)$. Jo apibrėžimo sritį $D(\mathrm{A})$ apibrėšime kaip aibę funkcijų u erdvėje $\mathrm{L}_{2,\rho}(a, b)$ tokių, kad:

1. $\forall \varepsilon > 0$ funkcija u ir jos išvestinė u' yra absoliučiai tolydžios segmente $[a + \varepsilon, b]$.

2. Funkcija u tenkina (8.52) kraštines sąlygas.

3. Reiškinys $\frac{1}{\rho}\,\mathrm{A}u \in \mathrm{L}_{2,\rho}(a, b)$ ir egzistuoja riba
$$\lim_{x \to a} p(x)\, u'(x) = 0.$$

Srityje $D(\mathrm{A})$ operatorius A yra savijungis, t.y.

$$(\mathrm{A}u, v) = (u, \mathrm{A}v), \quad \forall u,\, v \in D(\mathrm{A}). \tag{8.53}$$

Norint įrodyti šią lygybę, reikia du kartus pritaikyti integravimo dalimis formulę ir pastebėti, kad
$$p\, u' v\Big|_a^b - p\, u\, v'\Big|_a^b = 0.$$

Iš (8.53) formulės išplaukia, kad tikrinės funkcijos, atitinkančios skirtingas tikrines reikšmes, yra ortogonalios erdvėje $\mathrm{L}_{2,\rho}(a, b)$.

P a s t a b a. Nagrinėjant (8.51) lygtį, išlieka teisingi visi rezultatai, kurie įrodyti 8.3 ir 8.4 lemose. Norint tuo įsitikinti, reikia (8.51) lygtyje koeficientą $q - \lambda\, \rho$ prie funkcijos u pakeisti koeficientu q.

Tegu u_1, u_2 – du tiesiškai nepriklausomi (8.47) lygties sprendiniai ir yra patenkintos 8.3 ir 8.4 lemų sąlygos. Tada (8.51), (8.52) uždavinys yra ekvivalentus integralinei lygčiai

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x, y)\, \rho(y)\, u(y)\, dy, \tag{8.54}$$

kurioje $G(x, y)$ yra Gryno funkcija, atitinkanti operatorių A ir (8.52) kraštines sąlygas. Jeigu $\lambda = 0$ nėra tikrinė operatoriaus A reikšmė, tai Gryno funkcija konstruojama lygiai taip pat kaip ir reguliariuoju atveju. Remdamiesi 8.3 lemos išvada, galime tvirtinti, kad funkcija G taške (a, a) gali turėti tik logaritminę ypatumą. Kituose kvadrato $[a,b] \times [a,b]$ taškuose ji yra tolydi. Be to, Gryno funkcija G yra simetrinė; jos išvestinė G_x įstrižainėje $x = y$ turi trūkį

$$p(x)\, G_x(x,y)\Big|_{y=x-0}^{y=x+0} = 1;$$

kai $x \neq y$, Gryno funkcija kintamojo x atžvilgiu tenkina lygtį $\mathrm{A}G = 0$ ir kraštines sąlygas:

$$|G(a,y)| < \infty, \quad G(b,y) + \beta\, G_x(b,y) = 0.$$

Tuo atveju, kai $\lambda = 0$ yra tikrinė operatoriaus A reikšmė, Gryno funkcijos, kuri tenkintų aukščiau nurodytas sąlygas, sukonstruoti negalima. Tačiau galima sukonstruoti apibendrintą Gryno funkciją (smulkiau žr. [17]). Ji skiriasi tik tuo, kad vietoj (8.47) lygties tenkina lygtį

$$\mathrm{A}G = \rho(x)\, u_0(x)\, u_0(y),$$

kurioje u_0 yra tikrinė funkcija, atitinkanti tikrinę reikšmę $\lambda = 0$. Be to, funkciją G galima parinkti taip, kad

$$\int\limits_a^b G(x,y)\, u_0(y)\, \rho(y)\, dy = 0.$$

Šiuo atveju (8.51), (8.52) uždavinys taip pat yra ekvivalentus (8.54) integralinei lygčiai (išskyrus tikrinę funkciją u_0).

Taigi abiem atvejais (8.51), (8.52) uždavinys susiveda į (8.54) integralinę lygtį, kurią standartiniu būdu galima suvesti į simetrinio branduolio integralinę lygtį. Pavyzdžiui, jeigu (8.54) lygtyje vietoje ieškomos funkcijos u pasirinksime funkciją $v = u\sqrt{\rho}$, tai gausime lygtį

$$v = \lambda\, \mathrm{K} v, \tag{8.55}$$

kurioje operatoriaus K branduolys $K(x,y) = G(x,y)\sqrt{\rho(x)\,\rho(y)}$ yra simetrinė funkcija. Taške (a,a) funkcija K gali turėti logaritminę ypatumą, o kituose taškuose ji yra tolydi. Todėl operatorius K yra Fredholmo operatorius ir nagrinėjant (8.55) lygtį galima remtis bendrąja Fredholmo lygčių teorija. Tiksliau, galima tvirtinti, kad:

1. Operatoriaus K charakteristinių reikšmių aibė yra skaičioji ir sudaro artėjančių į $+\infty$ skaičių seką:

   $$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots.$$

   Kai $q \geq 0$ ir $\beta \geq 0$, tai $\lambda_k \geq 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots$.

2. Operatoriaus K tikrinių funkcijų sistema $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra pilna ortogonali erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$ funkcijų sistema. Tarkime, ji yra ortonormuota.

Grįžkime prie (8.51), (8.52) uždavinio. Tiesiogiai galima patikrinti, kad $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra šio uždavinio tikrinių reikšmių sistema, o $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, $v_k = u_k\sqrt{\rho}$ yra ją atitinkanti tikrinių funkcijų sistema. Be to, kiekviena tikrinė funkcija $u_k \in \mathrm{C}^2(a,b]$. Sistema $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra pilna ir ortonormuota erdvėje $\mathrm{L}_{2,\rho}(a,b)$. Jeigu $u \in \mathrm{L}_{2,\rho}(a,b)$, tai ją galima skleisti Furjė eilute

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\, u_k(x), \quad C_k = \int_a^b u(x)\, u_k(x)\, \rho(x)\, dx, \tag{8.56}$$

konverguojančia erdvėje $\mathrm{L}_{2,\rho}(a,b)$.

Nagrinėjamuoju atveju taip pat galima įrodyti Furjė eilučių reguliarųjį konvergavimą segmente $[a+\varepsilon, b]$. Įrodymas yra toks pat. Pavyzdžiui, jeigu $q(x) \geq 0$ ir $\beta \geq 0$, tai energetinę erdvę galima apibrėžti kaip absoliučiai tolydžių segmente $[a+\varepsilon, b]$, $\forall \varepsilon > 0$ funkcijų aibę, kurios taške $x = b$ tenkina sąlygą $u(b) = 0$ ir kurioms integralas

$$\|u\|^2 = \int_a^b \left(p\, u'^2 + q\, u^2\right)\, dx < \infty.$$

Jeigu funkcija $u \in \mathrm{H_A}$, tai (8.56) eilutė konverguoja reguliariai segmente $[a+\varepsilon, b]$, $\forall \varepsilon > 0$. Be to, jeigu integralas

$$\int_a^b \left[p(y)\, G_y^2(x,y) + q(y)\, G^2(x,y)\right]\, dy,$$

kaip kintamojo x funkcija, yra aprėžtas segmente $[a,b]$, tai (8.56) eilutė konverguoja reguliariai segmente $[a,b]$.

P a s t a b a. Tarkime, funkcija $u \in \mathrm{H_A}$. Tada galima įrodyti, kad:

1. Funkcija u yra aprėžta taško $x = a$ aplinkoje, jeigu šioje aplinkoje yra aprėžta funkcija q.

2. Jeigu $q(x) \to \infty$, kai $x \to a$, tai $u(a) = 0$.

9 SKYRIUS

Furjė, arba kintamųjų atskyrimo, metodas

Kintamųjų atskyrimo metodą galima taikyti gana plačiai tiesinių lygčių klasei. Lygtis $\mathrm{M}u + \mathrm{N}u = 0$ priklauso šiai klasei, jeigu diferencialinių operatorių M ir N koeficientai yra skirtingų kintamųjų funkcijos ir ieškomosios funkcijos u išvestinės įeina į reiškinius $\mathrm{M}u$ ir $\mathrm{N}u$ tik pagal skirtingus kintamuosius. Tarkime, v ir w yra funkcijos, priklausančios nuo šių skirtingų kintamųjų ir $u = v\,w$. Tada lygtį $\mathrm{M}v\,w + \mathrm{N}v\,w = 0$ galima suskaidyti į dvi lygtis. Šių lygčių atskirųjų sprendinių sandauga yra atskirasis lygties $\mathrm{M}u + \mathrm{N}u = 0$ sprendinys. Bendrąjį sprendinį gausime paėmę tokių sprendinių tiesinį darinį.

9.1. FURJĖ METODO SCHEMA DVIMAČIŲ HIPERBOLINĖS IR PARABOLINĖS LYGČIŲ ATVEJAIS

Tegu A yra reguliarusis Šturmo–Liuvilio operatorius. Rasime formalųjį hiperbolinės lygties

$$u_{tt} + \mathrm{A}u = 0, \quad x \in (a,b),\ t > 0, \tag{9.1}$$

sprendinį, tenkinantį pradines

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [a,b] \tag{9.2}$$

ir kraštines

$$u + \alpha\, u_x\big|_{x=a} = 0, \quad u + \beta\, u_x\big|_{x=b} = 0, \quad t \geq 0 \tag{9.3}$$

sąlygas.

Tegu $u = v(x)T(t)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (9.1) lygtį ir atskyrę kintamuosius, gausime

$$-\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\mathrm{A}\,v(x)}{v(x)}.$$

Kairėje šios lygybės pusėje yra kintamojo t, o dešinėje – kintamojo x funkcija. Šios funkcijos sutampa tik tuo atveju, kai jos yra konstantos. Pažymėkime bendrąją jų reikšmę raide λ. Tada funkcija $u = v\,T$ yra (9.1) lygties sprendinys, jeigu funkcija T yra lygties

$$T'' + \lambda\, T = 0, \tag{9.4}$$

o funkcija v – lygties

$$\mathrm{A}\,v = \lambda\, v \tag{9.5}$$

sprendinys. Be to, funkcija $u = v\,T$ tenkins (9.3) kraštines sąlygas, jeigu šias sąlygas tenkins funkcija v. Taigi funkcijai v gavome Šturmo–Liuvilio uždavinį:

rasti tas parametro λ reikšmes, kurioms egzistuoja netrivialus (9.5) lygties sprendinys, tenkinantis kraštines sąlygas

$$v + \alpha\, v_x\big|_{x=a} = 0, \quad v + \beta\, v_x\big|_{x=b} = 0. \tag{9.6}$$

Tegu $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ yra (9.5), (9.6) uždavinio tikrinės reikšmės ir $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ – jas atitinkančios tikrinės funkcijos, ortonormuotos erdvėje $\mathrm{L}_2(a,b)$. Kiekvienam $\lambda = \lambda_k$ rasime bendrąjį (9.4) lygties sprendinį. Neigiamiems λ_k, $T_k = C_{1k} e^{-\sqrt{|\lambda_k|}\,t} + C_{2k} e^{\sqrt{|\lambda_k|}\,t}$. Teigiamiems λ_k, $T_k = C_{1k}\cos\sqrt{\lambda_k}\,t + C_{2k}\sin\sqrt{\lambda_k}\,t$. Tuo atveju, kai $\lambda_k = 0$, $T_k = C_{1k} + t\,C_{2k}$.

Kiekviena iš funkcijų $v_k T_k$, $k = 1, 2, \dots$, tenkina (9.1) lygtį ir (9.3) kraštines sąlygas. Todėl funkcija

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k(x)$$

taip pat tenkina (9.1) lygtį ir (9.3) kraštines sąlygas. Pareikalavę, kad funkcija u tenkintų (9.2) pradines sąlygas, gausime

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \big(a_k \mathrm{ch}\,\sqrt{|\lambda_k|}\,t + \frac{b_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \mathrm{sh}\,\sqrt{|\lambda_k|}\,t\big) v_k(x) +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} \big(a_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\,t\big) v_k(x); \tag{9.7}$$

čia: m – neteigiamų tikrinių reikšmių skaičius, $a_k = (\varphi, v_k)$, $b_k = (\psi, v_k)$ – funkcijų φ ir ψ Furjė koeficientai. Jeigu tikrinė reikšmė $\lambda_m = 0$, tai (9.7) formulėje vietoje funkcijų $\mathrm{ch}\,\sqrt{|\lambda_m|}\,t$ ir $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_m|}}\mathrm{sh}\,\sqrt{|\lambda_m|}\,t$ reikia imti atitinkamai 1 ir t.

Žinant (9.5), (9.6) uždavinio tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas, lengvai galima rasti ir nehomogeninės lygties

$$u_{tt} + \mathrm{A}u = f(x,t), \quad x \in (a,b),\ t > 0, \tag{9.8}$$

sprendinį, tenkinantį pradines

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [a,b] \tag{9.9}$$

ir (9.3) kraštines sąlygas. Jo ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\, v_k(x).$$

Įstatę taip apibrėžtą funkciją u į (9.8) lygtį, gausime

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(F_k''(t) + \lambda_k F_k(t)\big)\, v_k(x) = f(x,t).$$

Kadangi funkcijos v_k yra tiesiškai nepriklausomos, tai funkcija $F_k, \forall k = 1, 2, \dots,$ turi tenkinti paprastąją diferencialinę lygtį

$$F_k''(t) + \lambda_k F_k(t) = f_k(t); \tag{9.10}$$

čia $f_k = (f, v_k)$ yra funkcijos f Furjė koeficientai kintamojo x atžvilgiu. Be to, iš (9.9) išplaukia, kad funkcija F_k turi tenkinti pradines sąlygas

$$F_k(0) = 0, \quad F_k'(0) = 0. \tag{9.11}$$

Nehomogeninės (9.10) lygties sprendinys, tenkinantis (9.11) pradines sąlygas,

$$F_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^t \sin\sqrt{\lambda_k}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau, & \text{kai} \quad k > m, \\ \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int\limits_0^t \operatorname{sh}\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau, & \text{kai} \quad k \le m. \end{cases}$$

Todėl formalų (9.8), (9.9), (9.3) uždavinio sprendinį galima išreikšti eilute

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{k=1}^{m} v_k(x)\, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int\limits_0^t \operatorname{sh}\sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int\limits_0^t \sin\sqrt{\lambda_k}\,(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Bendruoju atveju nehomogeninės (9.8) lygties sprendinio, tenkinančio (9.2) pradines ir nehomogenines kraštines sąlygas

$$u + \alpha\, u_x\big|_{x=a} = \nu(t), \quad u + \beta\, u_x\big|_{x=b} = \mu(t), \quad t \ge 0, \tag{9.13}$$

galima ieškoti tokiu pavidalu:

$$u = w + \omega.$$

Šiuo atveju funkciją ω reikia parinkti taip, kad ji tenkintų (9.13) kraštines sąlygas. Tada funkcijai w gausime kraštinį uždavinį

$$\begin{gathered} w_{tt} + \mathrm{A}w = f - \omega_{tt} - \mathrm{A}\omega, \quad x \in (a,b),\ t > 0, \\ w\big|_{t=0} = \varphi - \omega\big|_{t=0}, \quad w_t\big|_{t=0} = \psi - \omega_t\big|_{t=0}, \quad x \in [a,b], \\ w + \alpha\, w_x\big|_{x=a} = 0, \quad w + \beta\, w_x\big|_{x=b} = 0, \quad t \ge 0, \end{gathered}$$

su homogeninėm kraštinėm sąlygom. Savo ruožtu šį uždavinį galima išskaidyti į du uždavinius taip, kad vieno uždavinio pradinė ir kraštinė sąlygos būtų homogeninės, o kito lygtis ir kraštinė sąlyga būtų homogeninės.

Išnagrinėsime parabolinės lygties atvejį. Iš pradžių rasime formalų lygties

$$u_t + \mathrm{A}u = 0, \quad x \in (a,b),\ t > 0, \tag{9.14}$$

sprendinį, tenkinantį pradinę

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [a,b], \tag{9.15}$$

ir (9.3) kraštines sąlygas. Šiuo atveju vietoje (9.4) lygties gausime diferencialinę lygtį

$$T' + \lambda T = 0, \tag{9.16}$$

o (9.5) lygtis ir (9.6) kraštinės sąlygos išliks tos pačios.

Kai $\lambda = \lambda_k$, bendrasis (9.16) lygties sprendinys

$$T_k(t) = C_k\, e^{-\lambda_k t}.$$

Todėl funkcija $u_k = v_k\, T_k$, $\forall k = 1, 2, \dots$, tenkina (9.14) lygtį ir (9.3) kraštines sąlygas. Tačiau tada funkcija

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\, T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k t} v_k(x)$$

taip pat tenkins (9.14) lygtį ir (9.3) kraštines sąlygas. Pareikalavę, kad funkcija u tenkintų (9.15) pradinę sąlygą, gausime formulę

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-\lambda_k t}\, v_k(x), \tag{9.17}$$

kurioje $a_k = (\varphi, v_k)$ yra funkcijos φ Furjė koeficientai.

Nehomogeninės lygties

$$u_t + \mathrm{A}u = f(x,t), \quad x \in (a,b),\ t > 0, \tag{9.18}$$

sprendinį, tenkinantį pradinę

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [a,b], \tag{9.19}$$

ir (9.3) kraštines sąlygas, galima išreikšti eilute

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)\, F_k(t), \tag{9.20}$$

kurioje

$$F_k(t) = \int_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)}\, f_k(\tau)\, d\tau$$

yra Koši ušdavinio

$$F_k' + \lambda_k\, F_k = f_k(t), \quad F_k(0) = 0,$$

sprendinys. Čia $f_k = (f, v_k)$ yra funkcijos f Furjė koeficientai.

Bendruoju atveju (9.18) lygties sprendinį, tenkinantį (9.15) pradinę ir (9.13) kraštines sąlygas, galima rasti lygiai taip pat kaip ir hiperbolinės lygties atveju.

9.2. KINTAMŲJŲ ATSKYRIMO METODO PAGRINDIMAS

Pirmame skyrelyje gauti mišrių kraštinių uždavinių formalūs sprendiniai hiperbolinės ir parabolinės lygčių atvejais. Šiame skyrelyje įrodysime, kad formalūs sprendiniai turi reikiamą tolydžių išvestinių skaičių, tenkina atitinkamą lygtį bei pradines ir kraštines sąlygas, jeigu tik lygčių ir pradinių sąlygų dešinės pusės funkcijos yra pakankamai glodžios. Įrodydami tai remsimės 8.5 teorema apie Furjė eilučių diferencijavimą panariui.

Atsižvelgę į 8.4 skyrelio pabaigoje esančią pastabą, atsisakysime neesminių prielaidų. Tiksliau, nagrinėsime bendrąjį atvejį, kai funkcija q yra tik tolydi, o α ir β – bet kokie realūs skaičiai, neišskiriant ir simbolių $\pm\infty$.

9.1 teorema. *Tegu funkcijos $\varphi,\ \psi \in D(\mathrm{A})$, tenkina (9.6) kraštines sąlygas ir $\mathrm{A}\varphi \in \mathrm{H_A}$. Tada funkcija u, apibrėžta (9.7) formule, tenkina (9.1) lygtį, (9.2) pradines ir (9.3) kraštines sąlygas. Be to, (9.7) eilutę galima dukart diferencijuoti panariui pagal kintamuosius x ir t ir gautos eilutės konverguos tolygiai, kai $x \in [a,b],\ t \geq 0$.*

$\triangleleft$ Kadangi neigiamų tikrinių reikšmių λ_k yra baigtinis skaičius, tai (9.7) eilutė (arba iš jos narių išvestinių sudaryta eilutė) konverguos tolygiai tada ir tik tada, kai tolygiai konverguos eilutė (arba iš jos narių išvestinių sudaryta eilutė)

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \big(a_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t\big) v_k(x).$$

Ši eilutė ir eilutės, gautos dukart formaliai diferencijuojant ją pagal kintamuosius x ir t, konverguos tolygiai, jeigu tolygiai konverguos eilutės:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \big(\lambda_k\, |v_k(x)| + |v_k'(x)| + |v_k''(x)|\big)|a_k|,$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \big(\sqrt{\lambda_k}\, |v_k(x)| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\, |v_k'(x)| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\, |v_k''(x)|\big)|b_k|.$$

Priminsime, kad funkcija v_k tenkina lygtį

$$-p\, v_k'' - p' v_k' + q v_k = \lambda_k v_k.$$

Todėl paskutinės dvi eilutės konverguos tolygiai, jeigu tolygiai konverguos eilutės:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \big(|v_k(x)| + |v_k'(x)| + |v_k''(x)|\big)|a_k|, \tag{9.21}$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \big(\sqrt{\lambda_k}\, |v_k(x)| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\, |v_k'(x)|\big)|b_k|. \tag{9.22}$$

Pagal teoremos sąlygą funkcijos φ ir $\psi \in D(\mathrm{A})$, tenkina (9.6) kraštines sąlygas ir $\mathrm{A}\varphi \in \mathrm{H}_{\mathrm{A}}$. Todėl (9.21) ir eilutė

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |v_k'(x)||b_k|$$

konverguoja tolygiai (žr. teoremą apie Furjė eilučių diferencijavimą panariui). Tačiau tada eilutė

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |v_k'(x)||b_k|$$

taip pat konverguoja tolygiai. Beliko įrodyti, kad tolygiai konverguoja eilutė

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, |v_k(x)||b_k|. \tag{9.23}$$

Pagal teoremos sąlygą $\mathrm{A}\psi \in \mathrm{L}_2(a,b)$ ir funkcija ψ tenkina (9.6) kraštines sąlygas. Todėl

$$\|\mathrm{A}\psi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 b_k^2 < \infty. \tag{9.24}$$

Be to, egzistuoja konstanta M_1 (žr. 8.2 lemą) tokia, kad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} v_k^2(x) \le M_1, \quad x \in [a,b].$$

Pasinaudoję Koši–Buniakovskio nelygybe, įvertinsime baigtinę sumą

$$\sum_{k=m}^{m+n} \sqrt{\lambda_k}\, |v_k(x)||b_k| \le \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^{-1} v_k^2(x)}\, \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^2 b_k^2} \le M_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^2 b_k^2}.$$

Kadangi (9.24) eilutė konverguoja, tai

$$\sum_{k=m}^{m+n} \lambda_k^2 b_k^2 \to 0,$$

kai $m, n \to \infty$. Todėl (9.23) eilutė konverguoja tolygiai.

Taigi įrodėme, kad (9.7) eilutė konverguoja tolygiai, kai $x \in [a,b]$, $t \ge 0$; ją galima dukart diferencijuoti panariui pagal kintamuosius x ir t; gautos eilutės konverguoja tolygiai į atitinkamą funkcijos u išvestinę. Taigi funkcija u tenkina (9.1) lygtį, (9.2) pradines sąlygas

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x) = \varphi(x),$$

$$\lim_{t\to 0} u_t(x,t) = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x) = \psi(x)$$

ir (9.3) kraštines sąlygas. ▷

Nehomogeninės lygties atveju formalusis (9.8), (9.9), (9.3) uždavinio sprendinys u apibrėžiamas (9.12) formule. Tarkime, funkcija f, kaip dviejų kintamųjų funkcija, yra tolydi. Be to, tegu kiekvienam fiksuotam $t > 0$ ji, kaip kintamojo x funkcija, priklauso aibei $D(\mathrm{A})$ ir tenkina (9.3) kraštines sąlygas. Tada funkcija u, apibrėžta (9.12) formule, yra dukart diferencijuojama pagal kintamuosius x ir t, tenkina (9.8) lygtį, (9.9) pradines ir (9.3) kraštines sąlygas. Šio teiginio neįrodinėsime. Nurodysime tik, kad jį galima įrodyti taikant Diuamelio metodą (žr. 8.1 skyrelį).

Įrodysime analogišką teoremą parabolinės lygties atveju.

9.2 teorema. *Tegu funkcija $\varphi \in \mathrm{H_A}$. Tada funkcija u, apibrėžta (9.17) formule, yra tolydi juostoje $[a,b]\times[0,\infty)$; turi tolydžias antros eilės išvestines pagal kintamąjį x ir bet kurios eilės išvestines pagal kintamąjį t, kai $(x,t)\in[a,b]\times(0,\infty)$; tenkina (9.14) lygtį, (9.15) pradinę ir (9.16) kraštines sąlygas.*

◁ Pagal teoremos sąlygą $\varphi \in \mathrm{H_A}$. Todėl eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,|v_k(x)|$$

segmente $[a,b]$ konverguoja tolygiai (žr. 8.5 teoremą). Čia a_k yra funkcijos φ Furjė koeficientai. Priminsime, kad neigiamų tikrinių reikšmių λ_k gali būti tik baigtinis skaičius ir $\lambda_k \to +\infty$, kai $k\to\infty$. Tačiau tada $\forall t \geq 0$ eilutė

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} v_k(x)$$

segmente $[a,b]$ konverguoja tolygiai. Todėl funkcija $u \in \mathrm{C}([a,b]\times[0,\infty))$ ir

$$\lim_{t\to +0} u(x,t) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x) = \varphi(x).$$

Tegu l yra sveikas teigiamas skaičius. Laisvai pasirenkame teigiamus skaičius τ ir T, $\tau < T$. Pakankamai dideliems k

$$e^{-\lambda_k t}\lambda_k^l \leq e^{-\lambda_k \tau}\lambda_k^l, \quad \forall t\in[\tau,T],$$

ir reiškinys dešinėje šios nelygybės pusėje yra aprėžtas. Todėl eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(-\lambda_k)^l e^{-\lambda_k t} v_k(x)|$$

stačiakampyje $[a,b]\times[\tau,T]$ konverguoja tolygiai, o funkcijos u išvestinė $\frac{\partial^l u}{\partial t^l} \in \mathrm{C}([a,b]\times[\tau,T])$. Artindami $\tau\to 0$, o $T\to\infty$, gausime $\frac{\partial^l u}{\partial t^l} \in \mathrm{C}([a,b]\times(0,\infty))$.

Tegu G yra Gryno funkcija, atitinkanti operatorių A ir (9.6) kraštines sąlygas. Tada tikrinė funkcija v_k yra integralinės lygties

$$v_k(x) = \lambda_k \int_a^b G(x,y)\, v_k(y)\, dy$$

sprendinys, o jos išvestinė

$$v_k'(x) = \lambda_k \int_a^b G_x(x,y)\, v_k(y)\, dy.$$

Padauginę paskutinę lygtį iš $a_k e^{-\lambda_k t}$, užrašysime ją taip:

$$a_k e^{-\lambda_k t} v_k'(x) = \int_a^b G_x(x,y)\, \lambda_k a_k e^{-\lambda_k t} v_k(y)\, dy.$$

Laisvai pasirenkame teigiamus skaičius τ ir T, $\tau < T$. Gryno funkcijos išvestinė $G_x(x,y)$ turi trūkį tik taškuose $x = y$. Be to, jis yra baigtinis. Todėl stačiakampyje $[a,b] \times [\tau, T]$ eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b G_x(x,y)\, \lambda_k a_k e^{-\lambda_k t} v_k(y)\, dy$$

konverguoja tolygiai. Kartu stačiakampyje $[a,b] \times [\tau, T]$ tolygiai konverguoja eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} v_k'(x).$$

Taigi funkcijos u išvestinė $u_x \in \mathrm{C}([a,b] \times [\tau, T])$. Artindami $\tau \to +0$, o $T \to \infty$, gausime $u_x \in \mathrm{C}([a,b] \times (0,\infty))$.

Priminsime, kad tikrinė funkcija v_k tenkina lygtį $-p\, v_k'' - p' v_k' + q v_k = \lambda_k v_k$. Todėl eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} v_k''(x)$$

konverguos tolygiai, jeigu tolygiai konverguos eilutės:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} v_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} v_k'(x).$$

Šių eilučių tolygus konvergavimas jau įrodytas. Todėl $u_{xx} \in \mathrm{C}([a,b] \times (0,\infty))$.

Beliko įrodyti, kad funkcija u tenkina (9.14) lygtį, (9.15) pradinę ir (9.3) kraštines sąlygas. Tačiau tai yra akivaizdu, nes eilutę

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} v_k(x)$$

galima diferencijuoti panariui.

9.3. VIENATIES TEOREMA

Įrodysime, kad mišrusis uždavinys hiperbolinei ir parabolinei lygtims negali turėti dviejų skirtingų sprendinių. Hiperbolinės lygties atveju nagrinėsime mišrųjį kraštinį uždavinį:

$$u_{tt} + \mathrm{A}u = f(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t > 0, \tag{9.25}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [a,b], \tag{9.26}$$

$$u + \alpha\, u_x\big|_{x=a} = \nu(t), \quad u + \beta\, u_x\big|_{x=b} = \mu(t), \quad t \geq 0. \tag{9.27}$$

9.3 teorema. *Tegu A yra reguliarusis Šturmo–Liuvilio operatorius. Tada mišrusis* (9.25), (9.26), (9.27) *uždavinys negali turėti dviejų skirtingų sprendinių.*

◁ Kadangi nagrinėjamasis uždavinys yra tiesinis, tai pakanka įrodyti, kad homogeninė lygtis

$$u_{tt} + \mathrm{A}u = 0, \quad x \in (a,b), \quad t > 0, \tag{9.28}$$

negali turėti dviejų skirtingų sprendinių, tenkinančių homogenines pradines

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [a,b], \tag{9.29}$$

ir homogenines kraštines

$$u + \alpha\, u_x\big|_{x=a} = 0, \quad u + \beta\, u_x\big|_{x=b} = 0, \quad t \geq 0, \tag{9.30}$$

sąlygas. Taigi reikia įrodyti, kad (9.28), (9.29), (9.30) uždavinys turi tik trivialų sprendinį.

Tarkime, funkcija u yra (9.28), (9.29), (9.30) uždavinio sprendinys. Tada

$$\int_0^t \int_a^b u_t\big(u_{tt} + \mathrm{A}u\big)\, dxdt = 0.$$

Pritaikę integravimo dalimis formulę, perrašysime šią tapatybę taip:

$$\int_0^t \int_a^b \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\big(u_t^2 + p\, u_x^2 + qu^2\big)\, dxdt - \int_0^t p\, u_t u_x\Big|_{x=a}^{x=b} dt = 0. \tag{9.31}$$

Kadangi funkcija u tenkina (9.29) pradines sąlygas, tai (9.31) tapatybę galime perrašyti taip:

$$\frac{1}{2}\int_a^b \big(u_t^2 + p\, u_x^2 + qu^2\big)\, dx - \int_0^t p\, u_t u_x\Big|_{x=a}^{x=b} dt = 0. \tag{9.32}$$

Tarkime, (9.30) kraštinėse sąlygose koeficientai α ir β nelygūs nuliui. Tada (9.32) tapatybę galima perrašyti taip:

$$\int\limits_a^b \left(u_t^2 + p\,u_x^2 + qu^2\right) dx + p\,\frac{u^2}{\beta}\Big|_{x=b} - p\,\frac{u^2}{\alpha}\Big|_{x=a} = 0.$$

Įvertinsime funkcijos u^2 reikšmes taškuose a ir b. Imkime (8.3) nelygybėje $\varepsilon = \dfrac{1}{2}p_0$. Tada

$$\int\limits_a^b \Big(u_t^2 + \frac{1}{2}p\,u_x^2\Big)\,dx \le C\int\limits_a^b u^2\,dx; \tag{9.33}$$

čia: konstanta C priklauso tik nuo α, β, $p_0 = \min\limits_{x\in[a,b]} p(x)$ ir $\max\limits_{x\in[a,b]} q(x)$.

Tokį patį įvertį (tik su kita konstanta) galima gauti ir tuo atveju, kai $\alpha = \beta = 0$ arba tik vienas iš skaičių α, β lygus nuliui.

Pagal Niutono–Leibnico formulę

$$u(x,t) = \int\limits_0^t u_\tau(x,\tau)\,d\tau.$$

Pasinaudoję Helderio nelygybe, įvertinsime funkcijos u modulį

$$|u(x,t)| \le \Big(\int\limits_0^t 1^2\,d\tau\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^t u_\tau^2(x,\tau)\,d\tau\Big)^{1/2}.$$

Iš šito įverčio išplaukia nelygybė

$$\int\limits_a^b u^2(x,t)\,dx \le t\int\limits_0^t\int\limits_a^b u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau. \tag{9.34}$$

Sugretinę (9.34) su (9.33), gausime

$$\int\limits_a^b \Big(u_t^2 + \frac{1}{2}p\,u_x^2\Big)\,dx \le C\,t\int\limits_0^t\int\limits_a^b u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau. \tag{9.35}$$

Įrodysime, kad integralas

$$I(t) = \int\limits_0^t\int\limits_a^b u_\tau^2(x,\tau)\,dxd\tau$$

yra lygus nuliui. Akivaizdu, kad $I(t) \ge 0$ ir

$$I'(t) = \int\limits_a^b u_t^2(x,t)\,dx.$$

Atmetę (9.35) nelygybėje narį $\frac{1}{2}pu_x^2$, gausime nelygybę, kurią užrašysime taip:

$$I'(t) \le C\,t\,I(t).$$

Iš pastarosios nelygybės išplaukia, kad

$$I(t) \le I(0)\exp\left\{Ct^2/2\right\}.$$

Pagal apibrėžimą integralas $I(0) = 0$. Todėl $I(t) = 0$, $\forall t \ge 0$ ir (9.35) nelygybę galime užrašyti taip:

$$\int\limits_a^b \Big(u_t^2 + \frac{1}{2} p\,u_x^2\Big)\,dx \le 0.$$

Kadangi koeficientas $p(x) \ge p_0 > 0$, galime tvirtinti, kad $u_t = u_x = 0$. Taigi funkcija u yra konstanta. Taške $t = 0$ ši konstanta lygi nuliui (žr. (9.29) sąlygą). Todėl $u(x,t) \equiv 0$ $\forall x \in [a,b]$, $t \ge 0$. Vadinasi, mišrusis (9.28), (9.29), (9.30) uždavinys turi tik trivialų sprendinį. $\triangleright$

Parabolinės lygties atveju nagrinėsime mišrųjį kraštinį uždavinį:

$$u_t + \mathrm{A}u = f(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t > 0, \tag{9.36}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [a,b], \tag{9.37}$$

$$u + \alpha\,u_x\big|_{x=a} = \nu(t), \quad u + \beta\,u_x\big|_{x=b} = \mu(t), \quad t \ge 0. \tag{9.38}$$

9.4 teorema. *Tegu A yra reguliarusis Šturmo–Liuvilio operatorius. Tada mišrusis* (9.36), (9.37), (9.38) *uždavinys negali turėti dviejų skirtingų sprendinių.*

$\triangleleft$ Kadangi nagrinėjamas uždavinys yra tiesinis, tai pakanka įrodyti, kad mišrus uždavinys

$$u_t + \mathrm{A}u = 0, \quad x \in (a,b), \quad t > 0, \tag{9.39}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [a,b], \tag{9.40}$$

$$u + \alpha\,u_x\big|_{x=a} = 0, \quad u + \beta\,u_x\big|_{x=b} = 0, \quad t \ge 0, \tag{9.41}$$

turi tik trivialų sprendinį.

Tegu funkcija u yra (9.39), (9.40), (9.41) uždavinio sprendinys. Tada funkcija $v = e^{-\lambda t}u$ (skaičių λ parinksime vėliau) tenkina homogeninę lygtį

$$v_t + \mathrm{A}v + \lambda v = 0, \tag{9.42}$$

(9.40) pradinę ir (9.41) kraštines sąlygas. Kadangi funkcija v yra (9.42) lygties sprendinys, tai

$$\int_0^t \int_a^b v\big(v_t + \mathrm{A}v + \lambda v\big)\, dxdt = 0.$$

Pasinaudoję integravimo dalimis formule ir (9.40) pradine sąlyga, perrašysime šią tapatybę taip:

$$\frac{1}{2}\int_a^b v^2\, dx + \int_0^t \Big[\int_a^b p\, v_x^2 + (q+\lambda)v^2\, dx - p\, v v_x\Big|_{x=a}^{x=b}\Big]\, dt = 0. \tag{9.43}$$

Parinksime skaičių λ taip, kad reiškinys laužtiniuose skliaustuose būtų neneigiamas (žr. 8 sk. 8.1 teoremos įrodymą). Tada (9.43) tapatybė yra galima tik tuo atveju, kai $v(x,t) \equiv 0$. Prisiminę funkcijos v apibrėžimą, galime tvirtinti, kad ir funkcija $u(x,t) \equiv 0$. Taigi (9.39), (9.40), (9.41) uždavinys turi tik trivialų sprendinį. $\triangleright$

9.4. KAI KURIE MATEMATINĖS FIZIKOS UŽDAVINIŲ PAVYZDŽIAI

1 uždavinys (radialinis dujų svyravimas sferoje). Nagrinėsime mažus dujų dalelių svyravimus sferoje. Sferos paviršių laikysime kietu ir neskvarbiu. Trečiame skyriuje įrodėme, kad dujų dalelių greičio potencialas u turi tenkinti lygtį

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \tag{9.44}$$

pradines sąlygas

$$u\big|_{t=0} = \varphi(r), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(r) \tag{9.45}$$

ir kraštinę sąlygą

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0 \tag{9.46}$$

čia: r – svyruojančios dujų dalelės atstumas iki sferos centro, R – sferos spindulys.

Sprendžiant šį uždavinį, patogu vartoti sferines koordinates:

$$x = r\sin\theta\cos\alpha, \quad y = r\sin\theta\sin\alpha, \quad z = r\cos\theta.$$

Tiesiogiai galima įrodyti, kad sferinėse koordinatėse Laplaso operatorius

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\alpha\alpha}.$$

Kadangi pradinėse sąlygose funkcijos φ ir ψ priklauso tik nuo kintamojo r, tai natūralu (9.44), (9.45), (9.46) uždavinio sprendinio ieškoti kaip funkcijos $u = u(r,t)$. Šiuo atveju funkcijos u išvestinės pagal kintamuosius θ ir α yra lygios nuliui. Todėl bangavimo lygtį galime perrašyti taip:

$$u_{tt} - a^2\Big(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\Big) = 0. \tag{9.47}$$

Atskirojo (9.47) lygties sprendinio ieškosime pavidalu $u = T(t)v(r)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į šią lygtį, gausime

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{v''(r) + \frac{2}{r}v'(r)}{v(r)}.$$

Kairėje šios lygybės pusėje yra kintamojo t funkcija, o dešinė – kintamojo r funkcija. Šios funkcijos sutampa tik tuo atveju, kai jos yra konstantos. Pažymėkime jų bendrą reikšmę raide λ. Tada gausime dvi lygtis:

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \tag{9.48}$$

$$v'' + \tfrac{2}{r}v' + \lambda v = 0 \quad (\Leftrightarrow\ (rv)'' + \lambda rv = 0). \tag{9.49}$$

Be to, funkcija v turi tenkinti kraštinę sąlygą

$$\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0. \tag{9.50}$$

Ieškomas sprendinys sferos viduje turi būti tolydus. Tačiau tada sferos viduje jis yra aprėžtas. Kartu jis yra aprėžtas ir sferos centre. Todėl taške $r = 0$ funkcija v turi tenkinti kraštinę sąlygą

$$|v(0)| < \infty. \tag{9.51}$$

Bendrasis (9.49) lygties sprendinys

$$v(r) = C_1 \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,r}{r} + C_2 \frac{\cos\sqrt{\lambda}\,r}{r}.$$

Taške $r = 0$ jis turi būti aprėžtas. Todėl $C_2 = 0$. Pareikalausime, kad funkcija v tenkintų (9.50) kraštinę sąlygą. Tada gausime lygtį

$$\sqrt{\lambda}\,R \cos\sqrt{\lambda\,R} = \sin\sqrt{\lambda}\,R.$$

Pažymėję $\sqrt{\lambda}\,R = \mu$, perrašysime ją taip:

$$\mathrm{tg}\mu = \mu. \tag{9.52}$$

Ši lygtis turi be galo daug neneigiamų šaknų. Pažymėkime jas $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ Tada

$$\lambda_k = \Big(\frac{\mu_k}{R}\Big)^2, \quad v_k = \frac{1}{r}\sin\frac{\mu_k}{R}r, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

yra (9.49), (9.50), (9.51) uždavinio tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos. Be to, skaičius $\lambda_0 = 0$ yra tikrinė reikšmė. Ją atitinka tikrinė funkcija $v_0 = 1$. Tikrinės funkcijos v_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, yra ortogonalios erdvėje $\mathrm{L}_{2,\mathrm{r}^2}(0, R)$.

Kai $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, bendrasis (9.48) lygties sprendinys

$$T_k(t) = \alpha_k \cos\frac{\mu_k a t}{R} + \beta_k \sin\frac{\mu_k a t}{R},$$

kai $\lambda = \lambda_0$,

$$T_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 t.$$

Todėl bendrasis (9.44), (9.45), (9.46) uždavinio sprendinys

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) v_k(x) =$$

$$= \alpha_0 + \beta_0 t + \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\big(\alpha_k \cos\frac{\mu_k a t}{R} + \beta_k \sin\frac{\mu_k a t}{R}\big)\sin\frac{\mu_k r}{R} \tag{9.53}$$

tenkina (9.47) lygtį ir (9.46) kraštinę sąlygą. Funkcija u tenkins (9.45) pradines sąlygas, jeigu

$$\alpha_0 + \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{\mu_k r}{R} = \varphi(r), \tag{9.54}$$

$$\beta_0 + \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k a}{R}\beta_k \sin\frac{\mu_k r}{R} = \psi(r). \tag{9.55}$$

Tikrinės funkcijos v_k yra ortogonalios erdvėje $\mathrm{L}_{2,\mathrm{r}^2}(0,R)$. Be to,

$$\int\limits_0^R \sin^2\frac{\mu_k r}{R}\,dr = \frac{R}{2}\,\frac{\mu_k}{1+\mu_k^2}, \quad \forall k = 1,2,\dots.$$

Todėl koeficientai α_k, β_k tenkins (9.54), (9.55) sąlygas, jeigu

$$\alpha_0 = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R r^2\varphi(r)\,dr, \quad \alpha_k = \frac{2}{R}\frac{1+\mu_k^2}{\mu_k^2}\int\limits_0^R r\varphi(r)\sin\frac{\mu_k r}{R}\,dr, \quad k = 1,2,\dots,$$

$$\mu_0 = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R r^2\psi(r)\,dr, \quad \beta_k = \frac{2}{R}\frac{1+\mu_k^2}{\mu_k^3}\int\limits_0^R r\psi(r)\sin\frac{\mu_k r}{R}\,dr, \quad k = 1,2,\dots.$$

Funkcija u su taip apibrėžtais koeficientais α_k, β_k tenkina (9.44) lygtį, (9.45) pradines ir (9.46) kraštines sąlygas.

P a s t a b a. Norint apibrėžti dujų svyravimą, primiausia reikia apibrėžti jų dalelių judėjimo greitį $\mathbf{v}$. Kadangi $\mathbf{v} = -\operatorname{grad} u$, tai (9.53) formulės narį $\alpha_0 + \beta_0 t$ galima atmesti.

2 u ž d a v i n y s (radialinis dujų svyravimas begaliniame cilindre). Nagrinėsime mažus dujų dalelių svyravimus begaliniame cilindre, kurio skersinis pjūvis yra apskritimas, R – apskritimo spindulys. Apsiribosime tik tokiais svyravimais, kurių greičio potencialas u priklauso tik nuo laiko t ir svyruojančios dalelės atstumo iki cilindro ašies. Šiuo atveju patogu vartoti cilindrines koordinates:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z \quad (r = \sqrt{x^2+y^2}).$$

Cilindrinėse koordinatėse Laplaso operatorius

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}.$$

Kadangi funkcija u nepriklauso nuo kintamųjų φ ir z, tai bangavimo lygtis įgaus tokį pavidalą:

$$u_{tt} - a^2\Big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\Big) = 0. \tag{9.56}$$

Taigi funkcija u turi tenkinti (9.56) lygtį, pradines sąlygas

$$u\big|_{t=0} = \varphi(r), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(r) \tag{9.57}$$

ir kraštines sąlygas

$$|u|\big|_{r=0} < \infty, \quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0. \tag{9.58}$$

Atskirojo (9.56) lygties sprendinio ieškosime pavidalu $u(r,t) = T(t)v(r)$. Tada (9.56) išsiskaidys į dvi lygtis:

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \tag{9.59}$$

$$v'' + \frac{1}{r}v' + \lambda v = 0 \quad \big(\Leftrightarrow -(rv')' = \lambda r v\big). \tag{9.60}$$

Be (9.60) lygties, funkcija v dar turi tenkinti kraštines sąlygas:

$$|v(0)| < \infty, \quad \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0. \tag{9.61}$$

Bendrasis (9.60) lygties sprendinys (žr. 6.9 skyrelį)

$$v(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}\, r) + C_2 N_0(\sqrt{\lambda}\, r). \tag{9.62}$$

Taško $r = 0$ aplinkoje funkcija $N_0(\sqrt{\lambda}\, r)$ yra neaprėžta. Todėl (9.62) formulėje turime imti $C_2 = 0$. Pareikalavę, kad funkcija v tenkintų (9.61) kraštinę sąlygą taške $r = R$, gausime lygtį

$$J_0'(\sqrt{\lambda}\, R) = 0.$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad $J_0'(x) = -J_1(x)$. Todėl pastarąją lygtį galima perrašyti dar ir taip:

$$J_1(\sqrt{\lambda}\, R) = 0.$$

Tegu $\mu_1, \mu_2, \ldots$ yra lygties $J_1(\mu) = 0$ teigiamos šaknys. Tada

$$\lambda_k = \Big(\frac{\mu_k}{R}\Big)^2, \quad v_k(r) = J_0\big(\frac{\mu_k r}{R}\big)$$

yra (9.60), (9.61) uždavinio tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos. Skaičius $\lambda_0 = 0$ taip pat yra tikrinė reikšmė. Ją atitinka tikrinė funkcija $v_0(x) \equiv 1$. Tikrinės funkcijos v_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, yra ortogonalios erdvėje $\mathrm{L}_{2,\mathrm{r}}(0, R)$.

Kai $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, bendrasis (9.59) lygties sprendinys

$$T_k(t) = \alpha_k \cos\frac{\mu_k a t}{R} + \beta_k \sin\frac{\mu_k a t}{R}.$$

Kai $\lambda = \lambda_0$, bendrasis (9.59) lygties sprendinys

$$T_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 t.$$

Funkcija

$$u(r,t) = \alpha_0 + \beta_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\alpha_k \cos\frac{\mu_k a t}{R} + \beta_k \sin\frac{\mu_k a t}{R}\Big) J_0\big(\frac{\mu_k r}{R}\big) \tag{9.63}$$

tenkina (9.56) lygtį ir (9.58) kraštines sąlygas. Funkcija u tenkins (9.57) pradines sąlygas, jeigu

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{R}\Big) = \varphi(r), \quad \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k a}{R} \beta_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{R}\Big) = \psi(r).$$

Priminsime, kad tikrinės funkcijos v_k yra ortogonalios erdvėje $\mathrm{L}_{2,\mathrm{r}}(0, R)$. Pasinaudoję šią tikrinių funkcijų savybe, lengvai galime įrodyti, kad

$$\alpha_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r\varphi(r)\, dr, \quad \alpha_k = \frac{2}{R^2 J_0^2(\mu_k)} \int_0^R r\varphi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{R}\Big)\, dr,$$

$$\beta_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r\psi(r)\, dr, \quad \beta_k = \frac{2}{aR\mu_k J_0^2(\mu_k)} \int_0^R r\psi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{R}\Big)\, dr.$$

Funkcija u su taip apibrėžtais koeficientais α_k, β_k, $k = 1, 2, \dots,$ yra (9.56), (9.57), (9.58) uždavinio sprendinys.

P a s t a b a. Kadangi dujų dalelių judėjimo greitis $\mathbf{v} = -\operatorname{grad} u$, tai (9.63) formulės narį $\alpha_0 + \beta_0 t$ galima atmesti.

3 u ž d a v i n y s (apskritos membranos svyravimas). Nagrinėsime laisvus, įtvirtintus kontūro taškuose, apskritos membranos svyravimus. Tarkime, pusiausvyros padėtyje membrana yra plokštumoje Oxy ir jos kontūras yra apskritimas $x^2 + y^2 = R^2$. Tada funkcija u, aprašanti membranos svyravimą, turi tenkinti dvimatę bangavimo lygtį

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < R^2, \quad t > 0, \tag{9.64}$$

pradines sąlygas

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x, y) \tag{9.65}$$

ir kraštinę sąlygą

$$u\big|_{x^2+y^2=R^2} = 0. \tag{9.66}$$

Tegu $u(x, y, t) = T(t)v(x, y)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją u į (9.64) lygtį ir atskyrę kintamąjį t nuo kintamųjų x, y, gausime dvi lygtis:

$$T'' + \lambda T = 0, \tag{9.67}$$

$$\Delta v + \lambda v = 0. \tag{9.68}$$

Be to, funkcija v dar turi tenkinti kraštinę sąlygą

$$v\big|_{x^2+y^2=R^2} = 0. \tag{9.69}$$

Atskirojo (9.68) lygties sprendinio ieškosime kintamųjų atskyrimo metodu. Vartosime polines koordinates:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, R].$$

Polinėse koordinatėse Laplaso operatorius

$$\Delta v \equiv v_{xx} + v_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}.$$

Todėl (9.68) lygtį galima perrašyti taip:

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \lambda v = 0. \tag{9.70}$$

Tegu $v(x, y) = w(r)\Phi(\theta)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją v į (9.70) lygtį ir atskyrę kintamąjį r nuo θ, gausime dvi lygtis:

$$r^2 w'' + r w' + (\lambda r^2 - \mu) w = 0, \tag{9.71}$$

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0. \tag{9.72}$$

Be to, funkcija Φ turi tenkinti periodiškumo sąlygą

$$\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi). \tag{9.73}$$

Priešingu atveju funkcija $v = w(r)\Phi(\theta)$ būtų daugiareikšmė.

Rasime (9.72), (9.73) uždavinio tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas. Tiesiogiai galima įrodyti, kad skaičiai $\mu_k = k^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, yra (9.72), (9.73) uždavinio tikrinės reikšmės. Tikrinę reikšmę μ_0 atitinka normuota tikrinė funkcija

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Kiekvieną tikrinę reikšmę $\mu_k = k^2$, $k = 1, 2, \ldots$, atitinka dvi normuotos tikrinės funkcijos:

$$\Phi_k(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k\theta, \quad \Phi_k^*(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin k\theta.$$

Tikrinių funkcijų aibė $\{\Phi_k, \Phi_k^*\}$ yra pilna ortonormuota erdvėje $L_2(0, 2\pi)$ funkcijų sistema.

Imkime (9.71) lygtyje $\mu = k^2$. Tada gausime

$$r^2 w'' + r w' + (\lambda r^2 - k^2) w = 0. \tag{9.74}$$

Be šios lygties, funcija w dar turi tenkinti kraštines sąlygas:

$$|w(0)| < \infty, \quad w(R) = 0. \tag{9.75}$$

Taigi vėl gavome Šturmo–Liuvilio uždavinį. Tiesiogiai galima įsitikinti, kad (9.74) lygtis keitiniu $\rho = \sqrt{\lambda}\, r$ susiveda į Beselio lygtį. Todėl vienintelis (daugiklio tikslumu) aprėžtas (9.74) lygties sprendinys

$$w_k(r) = J_k(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Pareikalavę, kad taške $r = R$ jis tenkintų (9.75) kraštinę sąlygą, gausime

$$J_k(\sqrt{\lambda}\, R) = 0.$$

Tarkime, lygties $J_k(\nu) = 0$ šaknys yra $\nu_1^{(k)}, \nu_2^{(k)}, \dots$. Tada

$$\lambda_n^{(k)} = \big(\nu_n^{(k)}/R\big)^2$$

yra (9.74), (9.75) uždavinio tikrinės reikšmės, o

$$w_{kn}(r) = J_k\big(\nu_n^{(k)}\frac{r}{R}\big)\Big/\Big(\int\limits_0^R rJ_k^2\big(\nu_n^{(k)}\frac{r}{R}\big)\, dr\Big)^{\frac{1}{2}}$$

yra jas atitinkančios tikrinės funkcijos.

Pastaba. Dvimačio (9.68), (9.69) Šturmo–Liuvilio uždavinio tikrinės reikšmės

$$\lambda_n^{(k)} = \big(\nu_n^{(k)}/R\big)^2.$$

Jas atitinka tikrinės funkcijos:

$$\Phi_k(\theta)w_{kn}(r), \quad \Phi_k^*(\theta)w_{kn}(r), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Šių tikrinių funkcijų aibė yra pilna ortonormuota erdvėje $\mathrm{L}_{2,\mathrm{r}}\big((0, R) \times (0, 2\pi)\big)$ funkcijų sistema.

Imkime (9.67) lygtyje $\lambda = \lambda_n^{(k)}$. Tada lygtis

$$T'' + \lambda_n^{(k)} T = 0$$

turi du tiesiškai nepriklausomus sprendinius:

$$T_{kn}(t) = \cos\frac{\nu_n^{(k)}t}{R}, \quad T_{kn}^*(t) = \frac{1}{\nu_n^{(k)}}\sin\frac{\nu_n^{(k)}t}{R}.$$

Funkcija

$$u = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\big(\alpha_{kn}\Phi_k(\theta) + \alpha_{kn}^*\Phi_k^*(\theta)\big)T_{kn}(t) +$$
$$+\big(\beta_{kn}\Phi_k(\theta) + \beta_{kn}^*\Phi_k^*(\theta)\big)T_{kn}^*(t)\Big)w_{kn}(r)$$

tenkina (9.64) lygtį ir (9.66) kraštinę sąlygą. Koeficientus $\alpha_{kn}, \alpha_{kn}^*$ ir β_{kn}, β_{kn}^* apibrėšime taip, kad funkcija u tenkintų (9.65) pradines sąlygas, t.y.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\big(\alpha_{kn}\Phi_k(\theta) + \alpha_{kn}^*\Phi_k^*(\theta)\big)w_{kn}(r) = \widetilde{\varphi}(r,\theta) \equiv \varphi(x, y),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\big(\beta_{kn}\Phi_k(\theta) + \beta_{kn}^*\Phi_k^*(\theta)\big)w_{kn}(r) = \widetilde{\psi}(r,\theta) \equiv \psi(x, y).$$

Funkcija u su taip apibrėžtais koeficientais $\alpha_{kn}, \alpha_{kn}^*$ ir β_{kn}, β_{kn}^* tenkina (9.64) lygtį, (9.65) pradines ir (9.66) kraštinę sąlygas.

4 u ž d a v i n y s (Dirichlė uždavinys rutulyje). Ieškosime Laplaso lygties

$$\Delta u = 0, \quad (x, y, z) \in B_R \subset \mathbb{R}^3 \tag{9.76}$$

sprendinio, tenkinančio kraštinę sąlygą

$$u\big|_{S_R} = \psi(x, y, z). \tag{9.77}$$

Sferinėse koordinatėse

$$x = r\sin\theta\cos\alpha, \quad y = r\sin\theta\sin\alpha, \quad z = r\cos\theta,$$

$r \in [0, R]$, $\theta \in [o, \pi]$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, Laplaso operatorius

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\alpha\alpha}.$$

Todėl (9.76) lygtį galima užrašyti taip:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\alpha\alpha} = 0. \tag{9.78}$$

Šioje lygtyje atskirsime kintamąjį r nuo kintamųjų θ ir α. Tegu $u = v(r)Y(\theta, \alpha)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (9.78) lygtį, išskaidysime ją į dvi lygtis:

$$r^2 v'' + 2rv' = \nu v, \tag{9.79}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(Y_\theta\sin\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}Y_{\alpha\alpha} + \nu Y = 0. \tag{9.80}$$

Fizikine prasme (9.78) lygties sprendinys turi būti aprėžta vienareikšmė funkcija. Todėl funkcija Y turi tenkinti kraštines sąlygas:

$$|Y(0, \alpha)| < \infty, \quad |Y(\pi, \alpha)| < \infty, \tag{9.81}$$

$$Y(\theta, \alpha) = Y(\theta, \alpha + 2\pi). \tag{9.82}$$

Tegu $Y = Q(\theta)\Phi(\alpha)$. Įstatę taip apibrėžtą funkciją į (9.80) lygtį, gausime dvi lygtis:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(Q_\theta\sin\theta) + \nu Q - \frac{\mu}{\sin^2\theta}Q = 0, \tag{9.83}$$

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0. \tag{9.84}$$

Be to, funkcija Φ turi tenkinti periodinę kraštinę sąlygą

$$\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha + 2\pi). \tag{9.85}$$

Lengvai galima įrodyti, kad skaičiai $\mu_k = k^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, yra (9.84), (9.85) uždavinio tikrinės reikšmės. Tikrinę reikšmę $\mu_0 = 0$ atitinka tikrinė funkcija $\Phi_0 = 1$. Tikrines reikšmes μ_k, $k = 1, 2, \dots$, atitinka tikrinės funkcijos:

$$\Phi_k = \cos k\alpha, \quad \Phi_k^* = \sin k\alpha.$$

Imkime (9.83) lygtyje $\mu = k^2$. Tada funkcija Q turi tenkinti lygtį

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(Q_\theta \sin\theta) + \nu Q - \frac{k^2}{\sin^2\theta}Q = 0.$$

ir kraštines sąlygas:

$$|Q(0)| < \infty, \quad |Q(\pi)| < \infty.$$

Apibrėžę naują kintamąjį $t = \cos\theta$, gausime jau išnagrinėtą Šturmo–Liuvilio uždavinį:

$$\frac{d}{dt}\big((1-t^2)P_t\big) - \frac{k^2 P}{1-t^2} + \nu P = 0,$$

$$|P(-1)| < \infty, \quad |P(1)| < \infty;$$

čia $P(t) = P(\cos\theta) = Q(\theta)$. Šio uždavinio tikrinės reikšmės

$$\nu_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

o tikrinės funkcijos $P_n^{(k)}(t)$ yra prijungtinės Ležandro funkcijos. Kai $k = 0$, funkcijos $P_n^{(0)}(t) = P_n(t)$ yra Ležandro polinomai.

Grįžkime prie (9.80), (9.81), (9.82) uždavinio. Skaičiai

$$\nu_n = n(n+1),\ n = 0, 1, 2, \dots,$$

yra šio uždavinio tikrinės reikšmės, o

$$Y_{n,0} = P_n\big(\cos\theta\big), \quad Y_{n,k} = P_n^{(k)}\big(\cos\theta\big)\cos k\alpha, \quad Y_{n,k}^* = P_n^{(k)}\big(\cos\theta\big)\sin k\alpha,$$

$k = 1, 2, \dots n$, yra jas atitinkančios tikrinės funkcijos. Jos vadinamos *elementariosiomis sferinėmis* funkcijomis. Galima įrodyti, kad elementariosios sferinės funkcijos yra pilna ortogonali erdvėje $L_{2,\sin\theta}\big((0,\pi)\times(0,2\pi)\big) = L_2(S_1)$ funkcijų sistema. Vadinasi, kitų tikrinių funkcijų ir tikrinių reikšmių (9.80), (9.81), (9.82) uždavinys neturi.

Imkime (9.79) lygtyje $\nu = n(n+1)$. Lygtis

$$r^2 v'' + 2rv' - n(n+1)v = 0$$

turi du tiesiškai nepriklausomus sprendinius: $v_1 = r^n$ ir $v_2 = r^{-n-1}$. Pirmasis iš jų yra intervale $(0, R)$ aprėžtas, o antrasis taško $r = 0$ aplinkoje turi ypatumą. Todėl aprėžtas rutulyje B_R Laplaso lygties atskirasis sprendinys

$$u_n = r^n Y_n(\theta, \alpha);$$

čia

$$Y_n(\theta,\alpha) = \alpha_n P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_{nk}\cos k\alpha + \beta_{nk}\sin k\alpha)P_n^{(k)}(\cos\theta).$$

Bendrąjį Laplaso lygties sprendinį patogu užrašyti taip:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{r}{R}\Big)^n Y_n(\theta,\alpha).$$

Kai $r = R$,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\alpha).$$

Todėl (9.77) kraštinę sąlygą galime užrašyti taip:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\alpha) = \psi.$$

Ši sąlyga yra patenkinta, jeigu

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\psi(\theta,\alpha)P_n(\cos\theta)\,dS,$$

$$\alpha_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-k)\,!}{(n+k)\,!}\int\limits_{S_1}\psi(\theta,\alpha)P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\alpha\,dS,$$

$$\beta_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-k)\,!}{(n+k)\,!}\int\limits_{S_1}\psi(\theta,\alpha)P_n^{(k)}(\cos\theta)\sin k\alpha\,dS;$$

čia $dS = \sin\theta\,d\theta\,d\alpha$ – vienetinės sferos ploto elementas. Funkcija u su taip apibrėžtais koeficientais α_n ir α_{nk},β_{nk} yra (9.76), (9.77) uždavinio sprendinys.

5 uždavinys (Laplaso operatoriaus tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos rutulyje $B_R \subset \mathbb{R}^3$). Nagrinėsime uždavinį

$$\Delta u = -\lambda u, \quad x^2+y^2+z^2 < \mathbb{R}^3, \tag{9.86}$$

$$u\big|_{S_R} = 0. \tag{9.87}$$

Rasime jo tikrines reikšmes ir tikrines funkcijas. Sferinėse koordinatėse

$$x = r\sin\theta\cos\alpha, \quad y = r\sin\theta\sin\alpha, \quad z = r\cos\theta,$$

$r\in[0,R],\ \theta\in[o,\pi],\ \alpha\in[0,2\pi]$, Laplaso operatorius

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\alpha\alpha}.$$

Todėl (9.86) lygtį galime perrašyti taip:

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}u_{\alpha\alpha} + \lambda u = 0.$$

Imkime šioje lygtyje $u = v(r)Y(\theta, \alpha)$. Tolesnė sprendimo eiga yra tokia pati kaip ir 4 uždavinio. Čia tik funkcijai v gausime Šturmo–Liuvilio uždavinį:

$$r^2 v'' + 2rv' - n(n+1)v + \lambda r^2 v = 0, \tag{9.88}$$

$$|v(0)| < \infty, \quad v(R) = 0. \tag{9.89}$$

Vietoj funkcijos v apibrėžkime naują nežinomą funkciją $\omega = \sqrt{r}\,v$. Tada (9.88) lygtis virs Beselio lygtimi

$$\omega'' + \frac{1}{r}\omega' + \Big(\lambda - \Big(n + \frac{1}{2}\Big)^2 \frac{1}{r^2}\Big)\omega = 0.$$

Jos sprendinys, aprėžtas taško $r = 0$ aplinkoje, yra pirmos rūšies Beselio funkcija

$$\omega(r) = J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\,r).$$

Taške $r = R$ funkcija ω turi tenkinti (9.89) kraštinę sąlygą. Todėl

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\,R) = 0.$$

Pažymėkime $\sqrt{\lambda}\,R = \mu$. Tegu $\mu_1^{(n+\frac{1}{2})}$, $\mu_2^{(n+\frac{1}{2})}, \ldots$ yra lygties

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\mu) = 0$$

šaknys. Tada skaičiai

$$\lambda_{in} = \Big(\frac{\mu_i^{n+\frac{1}{2}}}{R}\Big)^2$$

yra (9.86), (9.87) uždavinio tikrinės reikšmės. Kiekvieną tikrinę reikšmę λ_{in} atitinka $2n + 1$ tikrinių funkcijų:

$$\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\Big(\mu_i^{n+\frac{1}{2}}\frac{r}{R}\Big)Y_{n0}(\theta, \alpha),$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\Big(\mu_i^{n+\frac{1}{2}}\frac{r}{R}\Big)Y_{nk}(\theta, \alpha),$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\Big(\mu_i^{n+\frac{1}{2}}\frac{r}{R}\Big)Y_{nk}^*(\theta, \alpha),$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

LITERATŪRA

[1] A. Ambrazevičius. Matematinės fizikos lygtys. D. 1. Vilnius: "Aldorija", 1996, 380 p.

[2] N. I. Axiezeris. Variacinio skaičiavimo paskaitos. – M.: 1954. – 248 p. – Rus.

[3] B. M. Budakas, A. A. Samarskis, A. N. Tixonovas. Matematinės fizikos uždavinių rinkinys. – M.: 1980. – 688 p. – Rus.

[4] L. C. Evans. Partial Differential Equations, Grad.Stud. Math., vol 19, Amer. math.

[5] E. Giusti. Minimalūs paviršiai ir baigtinės variacijos funkcijos. – M.: Mir, 1989. – 240 p. – Rus.

[6] S. Fučikas, J. Nečas, V. Součekas Įvadas į variacinį skaičiavimą (Einfürung in die Variationsrechnung). – Leipzig.: 1977. – 176 p. – Vok.

[7] V. Kabaila. Matematinė analizė. – V.: Mokslas, 1983. – 408 p. – D.1.

[8] V. Kabaila. Matematinė analizė. – V.: Mokslas, 1986. – 482 p. – D.2.

[9] J. Kubilius. Realaus kintamojo funkcijų teorija. – V.: Mintis, 1970 – 283 p.

[10] L. V. Kantarovičius, G. P. Akilovas. Funkcinė analizė. – M.: Nauka, 1977. – 744 p. – Rus.

[11] L. A. Liusternikas, V. I. Sobolevas. Funkcinės analizės elementai. – M.: 1965. – 520 p. – Rus.

[12] P. I. Lizorkinas. Diferencialinių ir integralinių lygčių kursas su papildomais analizės skyriais. – M.: Nauka, 1981. – 384 p. – Rus.

[13] V. P. Mihailovas. Diferencialinės lygtys dalinėmis išvestinėmis. – M.: 1976. – 392 p. — Rus.

[14] S. G. Michlinas. Tiesinės dalinių išvestinių lygtys. – M.: 1977. – 431 p. – Rus.

[15] V. Paulauskas. Matematinės fizikos lygtys. – V.: Mintis, 1974. – 456 p.

[16] M. M. Smirnovas. Aukštosios matematikos kursas. – M.: Nauka, 1981. – T.2 –

[17] M. M. Smirnovas Aukštosios matematikos kursas. M.: Nauka, 1981. – T.4. – D.1-2. – 552 p. – Rus.

[18] M. M. Smirnovas. Matematinės fizikos lygčių uždaviniai. – M.: Nauka, 1968. – 164p. – Rus.

[19] M. Spivakas. Matematinė analizė daugdarose. – M.: Mir, 1968. – 164 p. – Rus.

[20] V. A. Steklovas. Pagrindiniai matematinės fizikos uždaviniai. – M.: Nauka, 1983. – 432 p. – Rus.

[21] A. N. Tichonovas, A. A. Samarskis. Matematinės fizikos lygtys. – M.: Nauka, 1977. – 736 p. – Rus.

[22] B. Z. Vulichas. Trumpas realaus kintamojo funkcijų teorijos kursas. – M.: Nauka, 1973. – 352 p. – Rus.

[23] R. Kurantas. Lygtys dalinėmis išvestinėmis. – M.: Mir, 1964. 830p. – rus.

[24] A. Friedmanas. Parabolinės lygtys dalinėmis išvestinėmis. – M.: Mir, 1968. – 428 p. – Rus.