GRAFŲ TEORIJA

"RINKTINIAI MATEMATIKOS SKYRIAI"
(Informatikos spec., 2 srautas, magistrantūra, 1 semestras)

PROGRAMA

1. Pagrindinės sąvokos, pavyzdžiai. Grafų veiksmai.
2. Grafo parametrų sąryšiai.
3. Jungiantysis medis. Ekonomiško medžio algoritmas.
4. Cayley'io teorema.
5. Binariųjų medžių kiekis.
6. Grafų ir jungių grafų su skaidžia savybe skaičių sąryšis.
7. Grafo gretimumo ir incidentumo matricos.
8. Grafai ir elektros grandinės.
9. Vektorinės erdvės, asocijuotos su grafais.
10. Maksimaliojo srauto digrafe problema.
11. Maksimalaus srauto ir minimalaus pjūvio teorema.
12. Sveikaskaičio maksimalaus srauto algoritmas.
13. Grafo jungumas. Menger'io teorema.
14. Poravimas. Hall'o teorema.
15. Skirtingi šeimos poaibių atstovai.
16. Takų ir ciklų ilgiai. Ekstremalieji grafai.
17. Pilnųjų pografių egzistavimas. Ramsey'io teorema.
18. Monochromatinių pografių egzistavimas.
19. Grafo viršūnių spalvinimas. Chromatusis polinomas.
20. Grafo briaunų spalvinimo uždaviniai.
21. Stabilieji grafo viršūnių poaibiai.
22. Absorbuojantys poaibiai ir branduoliai.

Literatūra

1. P.Tannenbaumas, R.Arnoldas, *Kelionė į šiuolaikinę matematiką*, TEV, Vilnius, 1995.
2. B.Bollobás, *Graph Theory*, Springer, 1979.
3. B.Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer, 1998.
4. R.Diestel, *Graph Theory*, Springer, 1997.
5. R.Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Longman, 1985.
6. L.Volkmann, *Fundamente der Graphentheorie.* Springer, 1996.
7. C.Berge, *Graphs*, North-Holland, 1985.
8. V.N.Sačkov, *Įvadas į Kombinatorinius Diskrečios Matematikos Metodus*, Nauka, Maskva, 1982 (rusų k.).

0. Pratarmė.

Jūs paėmėte į rankas autoriaus "Grafų teorijos" paskaitų, skaitytų 1998 bei 1999 metų rudens semestruose, konspektą. Sutelkęs savo dėmesį į medžiagos atrinkimą, literatūros paieškas, autorius nesuspėjo atlikti šio teksto kruopštesnės ir kritiškesnės analizės, įterpti iliustruojančių grafų eskizų, todėl lieka vienintelė paguoda, kad skaitytojas atliks tą darbą savarankiškai ir pateiks mums savo pastabas. Vienok, manome, kad šis pirmasis ir palyginti siauras konspektas bus pravartus laikantiems egzaminą dar šiemet. Gilesnėms studijoms gali būti panaudotos pateikiamo sąrašo knygos.

1. Pagrindinės sąvokos.

Grafas - aibių pora $G = (V, E)$, čia V - **viršūnių** aibė, E - viršūnių nesutvarkytųjų porų $e := (x, y) =: xy = yx$, $x, y \in V$ arba **briaunų** (lankų) aibė. Kai poros xy laikomos sutvarkytosiomis, G vadinamas **digrafu**. Viršūnės x ir y vadinamos xy briaunos **galais** arba jai **incidenčiomis** viršūnėmis. Viena kitos atžvilgiu jos yra **gretimosios** (kaimyninės) viršūnės. Viršūnės vaizduojamos taškais, briaunos - kreivėmis. Digrafo atveju papildomai nurodomos ir briaunų kryptys. Kada vietoje briaunų aibės E imamas briaunų rinkinys (šeima) su galimais pasikartojimais, pora (V, E) vadinama **multigrafu**. Jį vaizduojant plokštumoje, dvi viršūnės jungiamos atitinkamu kiekiu briaunų. Geometrinis vaizdavimas dažnai yra klaidinantis, nes skirtingi brėžiniai gali atitikti tą patį grafą (žr. 1 pav. dviem būdais pavaizduotą grafą $K_{3,3}$).

Grafai $G = (V, E)$ ir $G' = (V', E')$ vadinami **izomorfiškais**, jei egzistuoja bijekcija $\phi : V \to V'$ tokia, kad kiekvienai briaunai $xy \in E$ yra patenkinta sąlyga:

$$xy \in E \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(x)\phi(y) \in E'.$$

Multigrafų atveju pastaroji sąlyga turi būti patenkinta kiekvienai iš kartotinių briaunų, o digrafams – atvaizdis ϕ turi išlaikyti ir briaunos kryptį.

Nagrinėsime tik **baigtinius** grafus, t.y. tik poras (V, E) su baigtinėmis aibėmis V ir E. Šių aibių galias žymėkime $|V| = n$ ir $|E| = m$. Jei nebus pasakyta priešingai, grafas neturės **kilpų**, t.y. briaunų xx. Kadangi grafas neturi kartotinių briaunų, tai $m \le C_n^2$. Čia C_n^k - binominis koeficientas. Dažnai tokie grafai vadinami **paprastaisiais**. Skaičius n vadinams grafo G **eile**, o m - grafo G **didumu**. Reikalausime, kad $n \ge 1$. Jei $m = 0$, grafas G vadinamas **tuščiuoju** (tradiciškai žymimas E^n), o kai $m = C_n^2$, - **pilnuoju**. Pilname grafe visos viršūnės yra tarpusavyje sujungtos, jis žymimas K^n. Viršūnės x **laipsniu** (valentingumu) $\delta(x)$ laikomas incidenčių jai briaunų skaičius. Kai $\delta(x) = 0$, x - **izoliuotoji** viršūnė. Skaičiai

$$\delta(G) = \min\{\delta(x) :\ x \in G\}, \qquad \Delta(G) = \max\{\delta(x) :\ x \in G\}$$

atitinkamai vadinami **minimaliuoju** bei **maksimaliuoju** grafo laipsniais. Kai $\delta(G) = \Delta(G) =: k$, grafas G vadinamas k **reguliariuoju** (k-valenčiu). Pvz., **kubinis** bei **Petersen**'o grafai (žr. 2 pav.) yra trivalenčiai.

2 pav.

Grafas $G' = (V', E')$ vadinamas $G = (V, E)$ **pografiu**, jeigu $V' \subset V$ ir $E' \subset E$. Jeigu pografio G' briaunų aibėje E' yra visos E briaunos, jungiančios V' viršūnes, tai G' vadinamas V' **indukuotoju** pografiu, jį žymėsime $G[V']$.

Apibrėšime grafų veiksmų. Tarkime, kad $G = (V, E)$ - grafas, $x \in V' \subset V$ ir $xy \in E' \subset E$. Tada

$$G - V' := G[V \setminus V']$$

ir

$$G - E' := (V, E \setminus E').$$

Taigi, grafas $G - x := G - \{x\}$ gaunamas iš G išmetant ne tik viršūnę x, bet ir jai incidenčias briaunas, o $G - xy := G - \{xy\}$ - išmetant tik briauną xy. Atvirkščiai, $G + xy := G + \{xy\}$, kai $xy \notin E$, būtų naujas grafas su viena papildoma briauna. Kai kada yra tikslinga, atėmus iš grafo briauną xy, sutapatinti viršūnes x ir y. Ši operacija vadinama grafo **sutraukimu**.

Grafas $(V \cup V', E \cup E')$ vadinamas $G = (V, E)$ ir $G' = (V', E')$ **sąjunga**, žymima $G \cup G$. Be to, grafų sąjungoje viršūnių aibėms dar iškeliamas reikalavimas neturėti bendrų elementų. Grafų G ir G' **suma** $G + G'$, kai $V \cap V' = \emptyset$, apibrėžiama kaip jų sąjunga, papildomai išvedant visas briaunas, jungiančias V viršūnes su V' viršūnėmis. Nubrėžkite grafą $G + x$, kai $x \notin V$.

Grafą vaizdžiai charakterizuoja įvairios "klajojimo" juo galimybės. Viršūnių ir briaunų seką $x_0, e_1, x_1, \ldots, e_k, x_k$ su $e_j = x_{j-1}x_j$, $x_j \in V$, $j = 0, \ldots, k$ vadiname **keliu** ($x_0 - x_k$ keliu), o k - jo **ilgiu**. Kai kelyje visos briaunos yra skirtingos, jį vadiname **trasa**. Uždarą trasą (kai $x_0 = x_k$ ir $k \geq 2$) vadinsime **grandine**. Jeigu kelyje (arba trasoje) visos vidinės viršūnės $x_1, \ldots, x_{k-1}$ yra skirtingos, jį vadiname **taku**, ir uždarą taką, kai $k \geq 2$, - **ciklu** (grandimi). Takus bei ciklus žymėsime pereinamų viršūnių seka, pvz., $P = x_1x_2x_3...x_k$. Akivaizdžią paskutinę briauną x_kx_1 cikle galime ir nenurodyti. Jei grafe egzistuoja grandinė, sudaryta iš visų jo briaunų, tai jis vadinamas **Euler**'io vardu, o jei jame yra ciklas, apimantis visas jo viršūnes, tai jis yra **Hamilton**'o grafas. Šios sąvokos nėra ekvivalenčios. Pateikite pavyzdžių. Savarankiškai perskaitykite P.Tannenbaumo ir R.Arnoldo "Kelionės į šiuolaikinę matematiką" skyrius apie Eulerio ir Hamiltono grafus.

Grafas G yra **jungusis**, jei bet kurią porą viršūnių iš E jungia takas. Jei $n \geq 2$, šis grafas neturi izoliuotų viršūnių.

Teorema. *Grafas yra jungių pografių sąjunga.*

Įrodymas. Dvi viršūnes vadinkime **ekvivalenčiomis**, jeigu grafe yra jas jungiantis takas. Tai ekvivalentumo sąryšis viršūnių aibėje V. Ekvivalenčių viršūnių klasės $V_1, \ldots, V_s$ nesikerta, grafe nėra briaunų, jungiančių skirtingų klasių viršūnes. Indukuotieji pografiai $G[V_1], \ldots, G[V_s]$ ir sudaro ieškomos sąjungos pografius.$\diamond$

Teoremoje apibrėžtus pografius vadinsime grafo **jungumo komponentėmis**. Viršūnė, kurios atėmimas iš grafo keičia komponenčių skaičių, vadinama **iškarpos** viršūne, o briauna, - **tiltu**. **Atstumu** $d(x, y)$ tarp viršūnių x ir y vadinsime trumpiausio tako ilgį, jei toks takas egzistuoja. Priešingu atveju, atstumą laikysime begaliniu.

Grafas $G = (V, E)$ vadinamas **dvidaliu** (bichromačiuoju, dvispalviu), jei $V = V' \cup V''$, $V' \cap V'' = \emptyset$, o bet kokia briauna iš E jungia viršūnę iš V' su viršūne iš V''. Dvidalis grafas neturi nelyginio ilgio grandinių. Įsitikinkite, jog ir priešingas teiginys yra teisingas!

2. Miškas ir medžiai.

Grafas, neturintis ciklų (beciklis), vadinamas **mišku**, o jungusis miškas - **medžiu**.

1 teorema. *Grafas yra miškas tada ir tik tada, kada bet kokią viršūnių porą jungia ne daugiau kaip vienas takas.*

Įrodymas. Jei grafas nėra miškas, jame egzistuoja ciklas $x_0 x_1 ... x_l x_0$. Todėl turime du takus $x_0 x_1 ... x_l$ ir $x_0 x_l$.

Atvirkščiai, tarkime, kad $P = x_0 ... x_l$ ir $P' = x_0 y_l ... y_s = x_l$ - du takai, jungiantys x_0 su x_l. Tarkime, kad $i+1$ - mažiausias indeksas, su kuriuo $x_{i+1} \neq y_{i+1}$, o $j \geq i$ mažiausias indeksas su kuriuo y_{j+1} jau priklauso P, t.y. $y_{j+1} = x_k$. Tada $x_i ... x_k y_j ... y_{i+1}$ yra ciklas. Todėl grafas nėra miškas.

2 teorema. *Šie tvirtinimai yra ekvivalentūs:*

a) G yra medis;

b) G yra minimalus jungus grafas, t.y. kiekviena jo briauna yra tiltas;

c) G yra maksimalus beciklis grafas, t.y. sujungiant bet kokias neincidenčias viršūnes sukuriamas ciklas.

Įrodymas. Pažymėkime V, E grafo G viršūnių ir briaunų aibes, $xy \in E$ - bet kokią jo briauną, o u, v - bet kokias dvi neincidenčias viršūnes.

Jei G - medis ir grafas $G - xy$ būtų jungus, tai G turėtų du takus $P = x x_1 ... x_k y$ ir $P = xy$, vadinasi, todėl turėtų ciklą $P = x x_1 ... x_k y x$. Tad, iš a) išplaukia b).

Jei G - medis, tai jame egzistuoja takas nuo u iki v. Išvestas naujasis takas uv su senuoju sudarytų ciklą, ir grafas $G + uv$ jau turėtų ciklą. Tad, iš a) išplaukia c).

Tarkime, G - minimalus jungus grafas. Jei G nebūtų medis, o turėtų ciklą $x x_1 ... y x$, tai išmetus briauną xy, jo jungumas nepakistų. Prieštara įrodo, jog iš b) išplaukia a).

Panašiai įrodomi ir likę teiginiai.$\diamond$

Pasinaudoję b) savybe, apibrėžiame **minimalųjį jungiantįjį medį** arba **karkasą**.

Jungiojo grafo $G = (V, E)$ karkasu vadiname minimalųjį jungųjį pografį $G' = (V', E')$ su $V = V'$ ir $E' \subset E$.

Pagal b) iš jungiojo grafo atimant nuosekliai briaunas, bet nesugadinant jo jungumo, gaunamas karkasinis medis. Nurodysime dar porą karkasinio medžio išvedimo būdų.

1 būdas. Jungiame grafe $G = (V, E)$ fiksuokime viršūnę $x \in V$ ir viršūnių aibę suskaidykime į nepersikertančias aibes

$$V_i = \{y \in V : \ d(x, y) = i\}, \quad i = 0, 1, \ldots, s < \infty.$$

Jei $y_i \in V_i$, tai egzistuoja $x - y_i$ takas $x z_1 ... z_{i-1} y_i$. Pastebėkime, kad $V_j \neq \emptyset$, $j = 0, 1, ..., i$, kai $i > 0$. Taigi, bet kuriam $y_i \in V_i$ rasime $y'_{i-1} \in V_{i-1}$. Iš, gal būt, kelių galimybių pasirinkime vieną. Kai y perbėgs V, priskirtieji y' (artimesni pradiniam taškui) ir y sudarys jungųjį grafą

$$T = (V, E'), \qquad E' = \{yy' : y \in V, y \neq x\}.$$

Kadangi į y patenkama tik iš vieno taško, jis neturi ciklų. Taigi, T - karkasinis medis.$\diamond$

2 (indukcinis) būdas. Imkime $x \in V$. Tada $T_1 := (\{x\}, \emptyset)$ - medis. Tarkime, kad jau sukonstravome medžių seką

$$T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_k \subset G$$

ir medžio T_i eilė yra i. Jei $k < n = |V|$, tai egzistuoja pora (y, z) tokia, kad $z \in V(T_k)$, $y \in V \setminus V(T_k)$, čia $V(T_k)$ - T_k viršūnių aibė, ir $zy \in E$. Priešingas atvejis prieštarautų grafo G jungumui. Apibrėžkime

$$T_{k+1} = (V(T_k) \cup \{y\}, E(T_k) \cup \{zy\}).$$

Baigtiniame grafe šis procesas baigtinis. Jis baigiasi, kai $k = n$.$\diamond$

Medį galime charakterizuoti ir pagal jo skaitinius parametrus: eilę ir didumą.

3. Grafo parametrų ryšiai.

Pradėkime nuo paprastų teiginių.

1 (Euler'io) lema. *Grafo viršūnių laipsnių suma yra lyginis skaičius.*

Įrodymas. Pakanka pastebėti, jog kiekviena briauna, turėdama du galus, įneša 2 vienetus į sumą

$$\sum_{x \in V} \delta(G) = 2|E| \tag{1}$$

$\diamond$

1 išvada. *Nelyginio laipsnio viršūnių kiekis grafe yra lyginis skaičius.*

2 išvada. *Tarkime*

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} \delta(x) -$$

vidutinis grafo laipsnis, o $\varepsilon = |E|/|V|$ *– vidutinis briaunų skaičius, tenkantis vienai viršūnei. Tada* $\varepsilon(G) = d(G)/2$.

Įrodymas. (1) suma lygi $|V|d(G)$.$\diamond$

Susitarus, kad kilpos atveju viršūnės laipsnis laikomas lygiu 2, lema išlieka teisinga ir bendresniems grafams.

2 lema. *Tarkime, kad* $G' = (V', E')$ *ir* $G'' = (V'', E')$, $V' \cap V'' = \emptyset$, *- du pilnieji grafai su*

$$|V'| = n_1, \quad |V''| = n_2, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Grafo $G' \cup G''$ *didumas didžiausias, kai* $n_1 = n - 1$, *o* $n_2 = 1$.

Įrodymas. Dabar grafe $G' \cup G''$ turime

$$\frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}$$

briaunų. Apskaičiuokime, kaip keičiasi bendras briaunų skaičius, jei viena viršūne didesnį grafą padidintume, o kitą, mažesnįjį, - sumažintume. Tegu $n_1 \geq n_2$. Gautasis briaunų skaičius būtų lygus

$$\frac{n_1(n_1+1)}{2} + \frac{(n_2-1)(n_2-2)}{2},$$

o skirtumas -

$$n_1 + 1 - n_2 \geq 1.$$

Taigi, kartojant panašią procedūrą pasieksime maksimalų bendrą briaunų skaičių, kai $n_1 = n - 1$, $n_2 = 1$. Lema įrodyta.

1 teorema. *Jei n - grafo eilė, m - didumas, o k - jo komponenčių kiekis, tai*

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1). \tag{1.1}$$

Įrodymas. Pirmąją nelygybę įrodysime, taikydami matematinę indukciją $m \geq 0$ atžvilgiu. Kai $m = 0$, turime nulinį grafą su n jungumo klasių. Tad, nelygybė triviali.

Tegu $m_1 < m_2 < \cdots$ - n eilės grafų G, turinčių k jungumo klasių, didumai su savybe: išmetus dar vieną briauną iš G, padidėtų jo jungių komponenčių skaičius. Kai $m_{j-1} \leq m < m_j$, kairioji iš (1.1) nelygybių išplauks iš nelygybės, kai $m = m_{j-1}$. Todėl pakanka nelygybę įrodyti tik šiai sekai.

Tarkime, jog nelygybė įrodyta grafui su m_{j-1} briauna, ir nagrinėkime atvejį $|E| = m_j$. Kadangi dabar kiekviena briauna yra tiltas, išmetus kažkurią iš jų gauname grafą, kuriam galioja indukcijos prielaida. Tegu tai - grafas

$$G' = (V', E'), \quad |V'| = n, \quad |E'| = m_j - 1.$$

Jis turi $k+1$ klasę, todėl

$$n - (k+1) \leq m_j - 1.$$

Iš čia išplaukia pirmoji iš (1.1) nelygybių.

Vertindami m iš viršaus, nagrinėkime patį "blogiausią" atvejį, kai kiekviena iš jungumo klasių yra pilnieji pografiai. Pritaikę lemą kiekvienai šių klasių porai, gauname, kad bendras briaunų kiekis m bus maksimalus, kai viena iš jų yra labai didelė, o likusios - tušti grafai. Todėl tada n-os eilės grafe su k jungumo klasių, pografių eilės yra

$$n - k + 1, \quad , 1, \ldots, 1.$$

Taigi, maksimalus briaunų skaičius lygus

$$\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}.$$

1 teorema įrodyta.$\diamond$

Išvada. *Jei n eilės grafas turi daugiau nei $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ briaunų, tai jis yra jungusis.*

2 teorema. *n-os eilės jungusis grafas yra medis tada ir tik tada, kada jo didumas lygus $n-1$.*

Įrodymas. Pagal kairiąją (1.1) nelygybę jungiajame n eilės grafe yra ne mažiau, negu $n-1$ briauna. Jeigu jų būtų daugiau, grafas turėtų turėti ciklą. Taigi, teoremos sąlyga yra būtina.

Jos pakankamumas akivaizdus.

1 išvada. *n-os eilės grafo karkasinio medžio didumas lygus $n-1$.*

2 išvada. *n-os eilės miško iš k medžių didumas lygus $n-k$.*

4. Viena optimizavimo problema.

Karkasinių medžių savybėmis tenka naudotis sprendžiant kai kuriuos optimizavimo uždavinius. Sakykime, reikia suprojektuoti pigiausią vandentiekio tinklą, jungiantį visas miestelio sodybas, kada žinomos visų trasų tarp namų kainos. Jeigu gamtinės kliūtys yra neįveikiamos, galima laikyti, kad trasos per šią kliūtį kaina yra begalinė.

Formalizuojant galima įsivaizduoti, kad turime pilnąjį n grafą $G = (V, E)$ ir apibrėžtą funkciją

$$f : E \to \mathbf{R}^+.$$

Reikia išvesti karkasinį medį (vesti kelias linijas į tą pačią sodybą visada bus brangiau) $T = (V, E')$ tokį, kad bendra kaina

$$F(T) = \sum_{xy \in E'} f(xy)$$

būtų mažiausia. Šį medį vadinkime *ekonomišku*. Pradžioje pateiksime tris šio uždavinio sprendimo algoritmus.

1 algoritmas:

a) imame briauną $e = xy \in E$ su mažiausia kaina,

$$f(e) = \min_{xy \in E} f(xy);$$

b) iš likusių briaunų išrenkame pigiausią;

c) procesą kartojame su sąlyga, kad išrenkamos briaunos nesudarytų ciklo.

Procesas baigtinis, o gautasis grafas, kaip maksimalus beciklis grafas, pagal 2.2 teoremos c) punktą bus karkasinis medis. Gautojo medžio ekonomiškumą išnagrinėsime vėliau.

2 algoritmas:

a) imame briauną $e = xy \in E$ su didžiausia kaina,

$$f(e) = \max_{xy \in E} f(xy)$$

ir ją atimame iš grafo G;

b) tą patį kartojame su grafu $G - e$;

c) procesą baigiame, kai kitas briaunos atėmimas padidintų grafo jungumo klasių skaičių.

Gautasis grafas, kaip minimalus jungus grafas, pagal 2.2 teoremos b) punktą bus karkasinis medis.

3 algoritmas:

a) imame bet kokią viršūnę $x_1 \in V$;

b) imame vieną iš pigiausių incidenčių x_1 briauną $x_1x_2 \in E$, $x_2 \in V \setminus \{x_1\}$;

c) radę $x_1, \ldots, x_k$ ir briaunas $x_ix_j)$, $i < j \leq k$ ieškome $x = x_{k+1} \in V \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$, tokios, kad kaina $f(x_{k+1}x_i)$ su kažkokiu $i \leq k$ būtų minimali.

Procesas baigiasi, kai $k = n$, o briaunų skaičius lygus $n - 1$. Taip gavome karkasinį medį.

1 teorema. *Viršuje aprašytieji algoritmai duoda ekonomiškus medžius. Jei kainos funkcija yra injektyvi, tai ekonomiškasis medis yra vienintelis.*

Įrodymas. Tarkime, jog T - ekonomiškas medis, turintis maksimalų skaičių bendrų briaunų su T_1, medžiu, gautu naudojant 1 algoritmą. Jei $E(T) \neq E(T_1)$, imkime pirmą briauną xy iš T_1, bet nepatekusią į T. Medyje T irgi yra $x - y$ takas, sakykim P, kurio bent viena briauna, tegu uv, nepatenka į T_1. Renkant xy, ši briauna uv buvo viena iš kandidačių, todėl $f(xy) \leq f(uv)$. Sudarykime naują karkasinį medį

$$T' = T - uv + xy.$$

Jo kaina

$$F(T') = F(T) - f(uv) + f(xy) \leq F(T),$$

todėl ir naujasis medis yra ekonomiškas. Bet jis turi dar daugiau bendrų briaunų su T_1, nei T. Prieštara įrodo, kad $T = T_1$.

2 bei 3 algoritmais gautų medžių ekonomiškumas įrodomas panašiais samprotavimais.

Nagrinėkime vienatį, kai visos briaunų kainos skirtingos. Taikome matematinę indukciją grafo eilės atžvilgiu. Kai $n = 2, 3$, teiginys trivialus. Padarę prielaidą, jog teorema teisinga visiems $n \geq 4$ eilės grafams, nagrinėdami $(n + 1)$ eilės pilnąjį grafą, skelkime viršūnių aibę į dvi dalis $V = V_1 \cap V_2$, su $n_1, n_2 \geq 2$ viršūnių, $n_1 + n_2 = n + 1$ ir nagrinėkime indukuotosius pografius. Juose egzistuoja vieninteliai ekonomiški karkasiniai medžiai T_1, T_2. Raskime

$$\min_{\substack{x \in V_1 \\ y \in V_2}} f(xy).$$

Tarkime, ši minimali kaina įgyjama briaunoje xy, jungiančioje abu pografius. Įsitikinkime, kad medis

$$T_4 := T_1 \cup T_2 + xy$$

yra ekonomiškas.

Tarkime, T - ekonomiškas medis. Jei $T_4 \neq T$, tai vienintelė briauna iš T_4, nepatekusi į T, gali būti tik xy. Medyje T turi būti kita briauna uv, jungianti T_1 su T_2. Bet tada $f(xy) < f(uv)$ ir medžio

$$T - uv + xy$$

kaina būtų griežtai mažesnė, nei T. Prieštara įrodo ekonomiško medžio vienatį.

Pastaba. Vienaties įrodymas duoda dar vieną karkasinio medžio konstravimo būdą: kai briaunų kainos skirtingos, galima grafą skaidyti į mažesnius ir juose ieškoti karkasinių medžių, o vėliau juos sujungti.

Grafai su funkcijomis, apibrėžtomis briaunų arba viršūnių aibėse, vadinami **svoriniais** grafais.

5. Cayley'io teorema.

Prisimename, kad grafai $G = (V, E)$ ir $G' = (V', E')$ vadinami izomorfiškais, jei egzistuoja bijekcija $\phi : V \to V'$ tokia, kad $xy \in E$ tada ir tik tada, kada $\phi(x)\phi(y) \in E'$. Multigrafų atveju dar pridedamas reikalavimas, kad ši atitiktis galiotų visoms kartotinėms briaunoms. Grafą su sunumeruota viršūnių aibe vadinsime **numeruotoju** grafu. Tokių grafų atveju izomorfizmas turi išlaikyti ir numeraciją, t.y., jei x yra i-toji G grafo viršūnė, tai izomorfiškame G' grafe $\phi(x)$ turi būti irgi i-tąja viršūne. 1889 metais Cayley apskaičiavo neizomorfiškų numeruotų n tos eilės medžių kiekį $T(n)$? Įsitinkite, kad yra

$$\frac{4!}{2} + 4 = 16$$

skirtingų 4-os eilės medžių.

Cayley'io teorema. *Iš viso galime sudaryti n^{n-2} neizomorfiškų numeruotų n eilės medžių.*

1 -sis įrodymas (Prüfer'io). Tarkime $\mathcal{G}$ - nagrinėjamų medžių aibė. Kadangi sekų aibės

$$\{(a_1, \ldots, a_{n-2}) : \ 1 \leq a_i \leq n, \, 1 \leq i \leq n-2\} =: \mathcal{A}$$

galia yra n^{n-2}, pakaks rasti bijektyvų atvaizdį $\mathcal{A} \to \mathcal{G}$.

Kai $n \leq 2$, teiginys akivaizdus.

Tegu toliau $n > 2$. Medžiui $G = (V, E)$, kurios viršūnių aibė sunumeruota, $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$, vienareikšmiškai priskirsime seką $\alpha = (a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \mathcal{A}$, vadinamą medžio **Prüfer'io kodu**. Pradėkime nuo medžio galinės viršūnės, kurios laipsnis lygus 1. Tokios viršūnės egzistuoja, nes kiekviena briauna turi dvi viršūnes ir todėl

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(x_i) = 2(n-1).$$

Iš kelių tokių viršūnių išrinkime tą, kurios indeksas yra mažiausias. Tegu tai viršūnė x_{b_1}, o a_1 - indeksas viršūnės, gretimos pirmajai. Grafas $G - x_{b_1}$ yra $n-1$ eilės medis, todėl procesą galima kartoti, kol viršūnių, likusių grafe, skaičius yra didesnis už 2. Kai šis skaičius lygus 2, mes jau esame sudarę vienintelę seką $(a_1, \ldots, a_{n-2})$.

Atvirkščiai, ar bet kokiai sekai $\alpha = (a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \mathcal{A}$ galima vienareikšmiškai priskirti medį? Atidėkime n viršūnių ir brėžkime norimą medį, vadovaudamiesi žemiau nurodytomis taisyklėmis:

a) jei b_1 - mažiausias iš bent dviejų natūraliųjų skaičių (iš $1, ..., n$), nepasirodžiusių sekoje α, tada junkime x_{b_1} su x_{a_1};

b) aibę $\{1, \ldots, n\}$ pakeiskime $\{1, \ldots, n\} \setminus \{b_1\}$, o α - seka $(a_2, \ldots, a_{n-2})$;

c) procesą kartojame, kol išsemiame visą seką (tuo pačiu nubrėžiame $n-2$ grafo briaunas);

d) tarpusavyje sujungiame dvi likusias viršūnes.

Taip vienareikšmiškai gautasis grafas yra medis, nes jis jungia visas n viršūnių, o jo didumas yra $n-1$.

Kadangi abu nagrinėti atvaizdžiai yra vienas kito atžvilgiu yra atvirkštiniai, teorema įrodyta.

Grafų teorijai artimesnis kitas Cayley'io teoremos įrodymo būdas.

Antrasis teoremos įrodymas. Tarkime $T(n,k)$ - kiekis n tos eilės medžių, kuriuose fiksuota viršūnė $x \in V$ yra k-ojo laipsnio, $2 \leq k \leq n-1$. Viršūnės numeris nesvarbus, jo neminėsime. Išvesime sąryšį tarp $T(n,k)$ ir $T(n,k-1)$.

Imame medį G, kuriame $d(x) = k-1$. Jame išmeskime briauną uv, neincidenčią su x. Grafas skilo į du pomedžius, viename iš jų yra viršūnės x ir u arba x ir v. Tarkime, yra pirmasis atvejis. Sujungę dabar x su v, gauname vėl medį G', kuriame $d(x) = k$. Porą (G, G') pavadinkime **junginiu** ir suskaičiuokime jų kiekį dviem būdais. Kadangi grafui G mes galime sudaryti tiek G', kiek yra briaunų su aukščiau minėtomis savybėmis, tai vienam G mes turime $n-1-(k-1) = n-k$ partnerių. Taigi, iš viso yra $(n-k)T(n,k-1)$ junginių.

Skaičiuokime tą patį skaičių kitu būdu, pradėdami nuo G', kuriame $d(x) = k,\ k \geq 2$. Tarkime $x_1, \ldots, x_k$ - gretimos x viršūnės. Paeiliui išmesdami briaunas $xx_i,\ i = 1, \ldots k$, mes "atskeltume" pomedžius $T_1, \ldots, T_k$, kurių eilės tegu bus $n_1, \ldots, n_k$,

$$n_1 + \cdots + n_k = n - 1. \tag{1}$$

Grafo G' partnerį junginyje dabar konstruojame tokiu būdu:

a) išmetame xx_1, o vėliau viršūnę x_1 sujungiame su bet kokia iš viršūnių, nepriklausančių T_1 (turime $n-1-n_1$ galimybių);

b) tą patį kartojame su $T_2, \ldots, T_k$.

Atsižvelgę į grafų G' kiekį $T(n,k)$ ir (1) iš viso gauname junginių

$$\sum_{i=1}^{n} T(n,k)(n-1-n_i) = (n-1)(k-1)T(n,k).$$

Sulyginę abi junginių skaičiaus formules, gauname

$$(n-1)(k-1)T(n,k) = (n-k)T(n,k-1).$$

Kai $k = 1$, ši rekurenčioji formulė irgi teisinga. Jos nagrinėjimui galime panaudoti akivaizdų faktą, kad $T(n, n-1) = 1$ (**žvaigždinio** grafo atvejis). Gauname

$$T(n,k) = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}.$$

Sudėdami šias lygybes, išvedame medžių kiekio $T(n)$ formulę

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1} = ((n-1)+1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

Teorema įrodyta.

Numeruotą medį su viena išskirta viršūne, *šaknimi*, vadinsime *šakniniu* medžiu.

Išvada. *Yra n^{n-1} šakninių n eilės medžių.*

Įrodymas. Kiekvieno medžio, kurių kiekį nusako Cayley'io teorema, šaknimi gali būti bet kuri viršūnė.

6. Binariųjų medžių kiekis.

Sprendžiant n duomenų sutvarkymo pagal kokio nors požymio (rakto) didėjimą uždavinį, naudojami **binarieji medžiai**. Jais vadiname medžius, kurie turi vieną 2-ojo laipsnio viršūnę, vadinamą **šaknimi**, o kitų viršūnių laipsniai yra 3 (jos vadinamos **vidinėmis** viršūnėmis) arba 1 (šios viršūnės vadinamos **lapais**). Takas nuo šaknies iki lapo atitiktų kažkokio pradinio duomenų kėlinio surūšiavimą (požymio didėjimo tvarkos atpažinimą). Todėl algoritmą aprašantis binarusis medis turi turėti $n!$ lapų. Susitarkime dar, kad briaunos, išvestos iš vidinės viršūnės kairiau ar dešiniau, skiriasi. Todėl grafus, pavaizduotus (...) brėžinyje, laikysime skirtingais. Išvesime binariųjų medžių, turinčių N lapų, kiekio C_N, vadinamo **Katalano skaičiumi**, formulę.

Teorema. *Teisingas rekurentusis sąryšis*

$$C_N = \sum_{k=1}^{N-1} C_k C_{N-k}, \qquad C_1 = 1. \qquad (6.1)$$

Be to,

$$C_N = \frac{1}{N} \binom{2N-2}{N-1}. \qquad (6.2)$$

Įrodymas. Susitarkime, jog atveju $N = 1$, lapas sutampa su šaknimi, ir medį sudaro tik viena viršūnė. Kai $N > 1$, nagrinėkime grafą $G - v$, kai v - binariojo medžio G šaknis. Jis sudarytas iš dviejų binarių medžių - kairiojo, tarkime turinčio k lapų, ir dešiniojo, turinčio eilę $N - k$ lapų. Čia $1 \le k \le N-1$ gali būti bet kuris. Kairėje pusėje gali būti bet koks iš C_k binariųjų medžių, o dešinėje – bet koks iš C_{N-k} medžių. Sudėję pagal k šių kiekių sandaugas, gauname visą galimą binariųjų medžių C_N kiekį. (6.1) formulė įrodyta.

Išvedant (6.2) formulę naudojame generuojančias funkcijas. Pažymėkime

$$F(t) = \sum_{N \ge 1} C_N t^N, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Tada

$$F(t)^2 = \sum_{N\geq 2}\Big(\sum_{k=1}^{N-1} C_k C_{N-k}\Big)t^N.$$

Vadinasi,

$$F(t) = t + F(t)^2,$$

arba

$$F(t) = \frac{1}{2}\big(1 \pm (1-4t)^{1/2}\big).$$

Kadangi $F(0) = 0$, tai paskutinėje lygybėje galimas tik pliuso ženklas. Naudodami apibendrintąją Niutono binomo formulę ir lygindami koeficientus, gauname

$$C_N = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{N}(-4)^N = \frac{(2N-2)!}{(N-1)!N!}.$$

Iš čia išplaukia (6.2) formulė.

Teorema įrodyta.

Vidutinis tako nuo šaknies iki lapo ilgis nusako algoritmo, pavaizduoto binariu medžiu, efektyvumą.

7. Grafų ir jungių grafų su skaidžia savybe kiekių sąryšis.

Iki šiol turėjome jungių grafų (numeruotų medžių, šakninių medžių, binarių medžių) kiekio skaičiavimo formulių. Kaip skaičiuoti nebūtinai jungių n eilės grafų kiekius? Pradėkime nuo numeruotų *šakninių miškų*, kuriuos sudaro šakniniai numeruoti medžiai, kiekio skaičiavimo.

1 teorema. *Jei q_n – n eilės numeruotų šakninių miškų kiekis, o d_n – šakninių numeruotų n eilės medžių kiekis, tai*

$$q_n = \frac{d_{n+1}}{n+1} = (n+1)^{n-1}.$$

Įrodymas. Pavaizduokime nagrinėjamą n eilės mišką. Jo medžių šaknis sujunkime su papildoma šaknimi, kurios numeris, sakykime yra $j, 1 \leq j \leq n+1$. Skaičiais $1, ..., j-1, j+1, ...n+1$ pernumeruokime miško viršūnes (jei $j \leq n$, to daryti nereikia), nekeisdami numeracijos tvarkos. Taip iš kiekvieno n eilės miško gauname $n+1$ numeruotą medį, kurio eilė yra $n+1$. Atvirkščiai, turėdami tokį medį, galėtume atimti jo šaknį, o vėliau pernumeruodami viršūnes skaičiais $1, ..., n$ ir gretimąsias viršūnes pavadindami gautųjų medžių šaknimis, gautume n eilės šakninį numeruotą mišką. Todėl

$$d_{n+1} = (n+1)q_n.$$

Dabar pakanka pasinaudoti Cayley'io teoremos išvada, jog $d_n = n^{n-1}$.

1 teorema įrodyta.

Grafo savybę vadinsime **skaidžia**, jei jis ją turi tada ir tik tada, kada kiekviena jo jungi komponentė turi tą savybę. Pavyzdžiui, miškas turi šaknų rinkinį (miško šaknį) tada ir tik tada, kada kiekvienas jį sudarantis medis turi šaknį. Panašiai, jei **binarųjį mišką** sudarytume, apjungdami binarius medžius, gautume jo skaidžią savybę.

Pažymėkime:

a_n – kiekį n eilės numeruotų grafų su skaidžia R savybe;

a_{nk} – kiekį n eilės numeruotų grafų su šia savybe ir turinčių k jungių komponenčių;

b_n – kiekį jungių n eilės grafų su R savybe.

1 lema. *Teisingas sąryšis*

$$a_{nk} = \frac{n!}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \frac{b_{n_1}\cdots b_{n_k}}{n_1!\cdots n_k!}.$$

Čia sumuojama pagal visus natūraliųjų skaičių $n_1, ..., n_k$ *rinkinius su sąlyga* $n_1 + \cdots n_k = n$.

Įrodymas. Fiksuokime natūraliųjų skaičių $n_1, ..., n_k$ rinkinį su sąlyga $n_1 + \cdots n_k = n$ ir sudarykime visus grafus, turinčius R savybę, ir $n_1, ..., n_k$ eilių komponentes. Aišku, grafe komponenčių tvarka nesvarbi.

Viršūnių n aibę V galime suskaidyti $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, $1 \le i < j \le k$,

$$\binom{n!}{n_1, \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$$

būdais taip, kad j-oje aibėje būtų n_j elementų, $1 \le j \le k$. Čia poaibių tvarka yra svarbi. Turėdami atskiro j-ojo poaibio viršūnes, galime sudaryti b_{n_j} jungių grafo komponenčių su R savybe. Taigi, fiksuotam rinkiniui $n_1, \ldots n_k$ tuo būdu gautume

$$n!\frac{b_{n_1}\cdots b_{n_k}}{n_1!\cdots n_k!}$$

grafų su R savybe. Sudėję pagal visus šių skaičių rinkinius ir atsižvelgę į tai, kad grafo komponenčių tvarka yra nesvarbi (padalydami iš $k!$), baigiame 1 lemos įrodymą.

Dabar galime išvesti įdomų numeruotų grafų ir jungių numeruotų grafų, kurie turi skaidžias savybes, kiekių eksponentinių generuojančių funkcijų sąryšį.

2 teorema. *Pažymėkime*

$$A(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n, \qquad B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n.$$

Tada

$$A(t) = e^{B(t)}.$$

Įrodymas. Naudodami 1 lemos rezultatą ir lygybę $a_n = a_{n1} + \cdots a_{nn}$, skaičiuojame

$$A(t) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \frac{b_{n_1}\cdots b_{n_k}}{n_1!\cdots n_k!} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n t^n}{n!} \right)^k = e^{B(t)} - 1.$$

2 teorema įrodyta.

Išvada. *Šakninių n eilės medžių kiekio $d_n = n^{n-1}$ eksponentinė generuojanti funkcija*

$$D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n!} t^n$$

tenkina funkcinę lygtį

$$D(t) = te^{D(t)}.$$

Įrodymas. Kaip minėjome, miškų savybė turėti šaknį yra skaidi. Todėl panaudoję 1 teoremos žymenis ir jos rezultatą, iš 2 teoremos gauname

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n+1}}{(n+1)!} t^n = t^{-1} D(t) = e^{D(t)}.$$

2 teoremoje išvesta formulė patogi, jei viena iš generuojančių funkcijų yra paprasto pavidalo. Pavyzdžiui, binarių N-lapių miškų kiekį m_N galetume tirti naudodamiesi lygybe

$$1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{m_N}{N!} t^N = \exp\{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4t})\},$$

gauta iš Katalano skaičių generuojančios funkcijos ir 2 teoremos.

Visi n aibės atvaizdžiai į ją pačią (jų yra n^n) gali būti pavaizduoti n eilės **funkciniais grafais**. Tai numeruoti digrafai, turintys skaidžią savybę: iš kievienos viršūnės išeina tik viena briauna. Raskite jungių funkcinių n eilės grafų kiekį.

8. Matricos, asocijuotos su grafais.

Be Priūferio kodo, įvesto medžių žymėjimui, informaciją apie numeruotus grafus galime išreikšti matricomis. Tarkime, jog n-tos eilės orentuoto multigrafo (multidigrafo) G viršūnės sumumeruotos skaičiais $1, ..., n$ ir a_{ij} – briaunų, išvestų iš i-os į j-ą viršūnes, skaičius. Matricą A_G su elementais a_{ij}, $1 \le i, j \le n$, vadiname **gretimumo** matrica. Neorentuoto multigrafo atveju gretimumo matrica yra simetrinė, o kilpų kiekis dvigubinamas.

Sunumeravus ir briaunas skaičiais $1, ..., m$, čia m – grafo didumas, galime sudaryti **grafo incidentumo matricą** $B_G = B = (b_{ij})$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, su

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \text{ viršūnė yra incidenti } j \text{ briaunai, kuri nėra kilpa,} \\ 2, & \text{jei } i \text{ viršūnė yra incidenti } j \text{ briaunai, kuri yra kilpa} \\ 0, & \text{jei } i \text{ viršūnė nėra incidenti } j \text{ briaunai.} \end{cases}$$

Apibrėžiant **digrafo incidentumo matricą**, atsižvelgiama į briaunos kryptį. Dabar bekilpiam digrafui

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jei } i \text{ yra pradinė } j \text{ briaunos viršūnė,} \\ -1, & \text{jei } i \text{ yra galinė } j \text{ briaunos viršūnė,} \\ 0, & \ i \text{ viršūnė nėra incidenti } j \text{ briaunai.} \end{cases}$$

Jei i viršūnė yra incidenti kilpai, pažymėtai j numeriu, tai dažnai vartojamas žymuo $b_{ij} = -0$.

Pateiksime vieną įvestųjų matricų sąryšį.

1 teorema. *Tarkime G - numeruotas multidigrafas be kilpų, A ir B – jo gretimumo ir incidentumo matricos atitinkamai. Tada*

$$BB' = D - A.$$

Čia $'$ žymi matricos transponavimą, o D – diagonali matrica, kurios įstrižainėje yra iš eilės surašyti viršūnių laipsniai.

Įrodymas. Jei c_{ij} – matricos BB' bendrasis narys, tai

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} b_{il} b_{jl}. \tag{1}$$

Todėl, kai $i \neq j$, sandauga $b_{il}b_{jl}$ lygi 0 arba -1. Pastaroji lygybė yra teisinga tik tuo atveju, kai $x_i x_j = e_l$. Sudedant pagal l, -1 dauginsis iš tokio skaičiaus, kiek yra briaunų, jungiančių x_i ir x_j.

Kai $i = j$, c_{ii} yra matricos įstrižainės narys. Matrica A turi nulinę įstrižainę. (1) suma lygi briaunų, išvestų iš x_i skaičiui.

Teorema įrodyta.

Algebroje yra įprasta matricas susieti su tiesiniais vektorinių erdvių atvaizdžiais. Kokios vektorinės erdvės yra natūralios grafų teorijoje? Iliustracijai panagrinėsime vieną elektrotechnikos problemą.

9. Fizikiniai elektros grandinių dėsniai.

Elektros grandinės vaizduojamos multidigrafais. Grafų teorija palengvina fizikinių uždavinių sprendimą, ir atvirkščiai, elektros grandinių uždaviniai padarė įtakos grafų teorijos vystymuisi.

Prisiminsime pagrindinius fizikos dėsnius, veikiančius grandinėse. Naudosime elektrinio potencialo taške, potencialų skirtumo tarp taškų, elektros srovės krypties bei didumo, varžos bei laidumo sąvokas, o taip pat grafų teorijoje priimtus terminus. Priimti fizikoje matavimo vienetai: omai, amperai ar voltai, mūsų nedomins.

Ohm'o dėsnis. *Jei $p = p_{xy} = p(x) - p(y)$ - potencialų briaunos xy (išvestos iš x į y) galiniuose taškuose skirtumas, o r - šios briaunos varža, tai elektros srovės, tekančios iš x į y didumas*

$$w = w_{xy} = \frac{p}{r}.$$

Kirchhoff'o potencialų dėsnis. *Jei $x_0 x_1 \dots x_k x_0$ - elektros grandinės ciklas, ir $p_{i,i+1}$ - potencialų skirtumas tarp taškų x_i ir x_{i+1}, tai*

$$p_{01} + p_{12} + \cdots + p_{k0} = 0.$$

Aišku, nenulinių potencialų (ar srovių) atveju potencialų (srovių) ženklai bus tiek teigiami, tiek ir neigiami. Visada laikoma, kad $w_{xy} = -w_{yx}$.

Kirchhoff'o srovės dėsnis. *Jei* w_{xx_i} *- srovių, ištekančių iš viršūnės* x *briaunomis* xx_i, $i = 1, \ldots, k$, *didumai ir* $w_{\infty,x} = -w_{x,\infty}$ *- srovės, įtekančios į viršūnę* x, *didumas, tai*

$$w_{xx_1} + w_{xx_2} + \cdots + w_{xx_k} + w_{x,\infty} = 0.$$

Briaunoje xy, esančioje realiojoje fizikinėje elektros grandinėje, svarbus tik potencialų skirtumas $p_{xy} = p_x - p_y$, o ne patys potencialai. Todėl dažniausiai srovės išėjimo viršūnėje potencialas laikomas nuliniu. Tada potencialai kituose taškuose apibrėžiami vienareikšmiškai. Pagrįskite šią mintį!

Išnagrinėkite šiuos iliustracinius uždavinius:

1) iš aukščiau pateiktų dėsnių išveskite varžos ir laidumo nuosekliajame ir lygiagrečiame jungimuose savybių;

2) raskite srovių didumus ir bendrą varžą rombo su viena įstrižaine pavidalo grandinėje;

3) raskite kubo, kurio briaunos turi vienetines varžas, bendrą varžą.

4) pakeiskite žvaigždinį 4 eilės grafą trikampio grafu, kad varžos jungiant bet kurias viršūnių poras būtų tos pačios;

5) apskaičiuokite trikampės piramidės briaunų varžą.

Egzistuoja įdomus ryšys tarp elektros srovių grafo briaunose didumų ir tam tikrų karkasinių medžių kiekio.

1 teorema. *Tarkime, kad elektros grandinė yra jungus multidigrafas* G, *kurio kiekviena briauna turi vienetinę varžą, be to, vienetinio didumo srovė įteka viršūnėje* s *ir išteka viršūnėje* $t \neq s$. *Jei* N *- grafo* G *karkasinių medžių kiekis, o* $N(xy)$ *- kiekis karkasinių medžių, kuriuose yra* $s - t$ *takas, pereinantis briauną* xy *nuo* x *link* y. *Tada dydžiai kiekvienoje viršūnėje*

$$w_{xy} := \frac{N(xy) - N(yx)}{N}$$

tenkina Kirchhoff'o srovės dėsnį.

Įrodymas. Pradėkime vienu akcentu. Pastebėkime, kad $s - t$ takas medyje yra vienintelis. Jis gali turėti ar neturėti briaunos xy. Pirmuoju atveju ši briauna pereinama nuo x link y (tada šį taką įskaičiuojame į $N(xy)$) arba atvirkščiai (takas įskaičiuojamas dydyje $N(yx)$).

Nagrinėkime Kirchhoff'o srovės dėsnį taip vadinamoje **elektros šaltinio** viršūnėje s. Tarkime, kad $\Gamma(s)$ - jos kaimyninių viršūnių aibė. Kiekvienas karkasinis medis eina per tam tikrą viršūnę iš $\Gamma(s)$, ir tuo pačiu, - per briauną su, todėl

$$\sum_{u \in \Gamma(s)} N(su) = N.$$

Be to, galim susitarti, kad visos briaunos yra išvestos iš šaltinio ir nei viena nenukreipta į jį. Tad, $N(us) = 0$ ir

$$\sum_{u \in \Gamma(s)} w_{su} = 1.$$

To buvo ir tikėtasi.

Šis dėsnis viršūnėje t patikrinamas taip pat.

Tarkime y - bet kuri kita viršūnė. Karkasiniai medžiai, kuriuose esantys $s-t$ takai neina per y, nefiguruoja dydžių w_{xy} apibrėžime. Toliau imkime medį T ir jame esantį $s-t$ taką

$$P_T = s \ldots xyz \ldots t,$$

einantį per viršūnę y. Briaunos xy kryptis sutampa su tako kryptimi, todėl ji įneša į dydį $N(xy)$ lygiai 1-ą. Bet take yra ir briauna yz, kurios įnašas, lygus 1, bus dydyje $N(zy)$. Bendras įnašas į

$$\sum_{x \in \Gamma(y)} w_{xy}$$

lygus nuliui. Tad ši suma lygi nuliui. Srovės dėsnis patikrintas.

1 teorema įrodyta.

Kai briaunų varžos nėra vienetinės, įrodomas bendresnis teiginys. Elektros grandinės karkasinio medžio **svoriu** vadinama jo briaunų laidumų sandauga. Pažymėkime N^* visų karkasinių medžių svorių sumą, o $N^*(xy)$ - karkasinių medžių, turinčių $s-t$ taką , einantį per xy šia kryptimi, svorių sumą.

2 teorema. *Tarkime, kad elektros grandinė yra jungus grafas G, ir vienetinio didumo srovė įteka viršūnėje s ir išteka viršūnėje $t \neq s$. Tada srovė briaunoje xy lygi*

$$w_{xy} := \frac{N^*(xy) - N^*(yx)}{N^*}.$$

Įrodymą paliekame skaitytojui.

Kirchhofo dėsnių taikymas, kai elektros grandinėje yra daug viršūnių, – ilgas procesas. Imkime grandinę, vaizduojamą kubiniu grafu, ir raskime sroves, tekančias dvylikoje jo briaunų, jei visų briaunų varžos yra vienetinės, o vienetinio didumo srovė įteka vienoje viršūnėje ir išteka gretimoje pastarajai viršūnėje. Jei negalvodami įvestume 12 nežinomųjų ir, turėdami 8 viršūnes, pritaikytume Kirchhofo srovės dėsnį kiekvienoje iš jų, po to imtume visus galimus ciklus (pvz., ciklus sudaro kiekvieno iš 6 šonų briaunos, kiekvienos iš 12 porų šonų, turinčių bendrą briauną, "išorinės" briaunos ir t.t.) ir jiems pritaikytume potencialo dėsnį, tai gautume tiesinių lygčių sistemą, kurioje labai daug lygčių. Aišku, tarp jų bus daug tiesiškai priklausomų. Pasirodo, yra būdų iš anksto numatyti reikalingų nepriklausomų lygčių skaičių.

10. Vektorinės erdvės, asocijuotos su grafais.

Tarkime $G = (V, E)$ - n eilės ir m didumo grafas. Nagrinėkime funkcijų erdvę

$$C_0(G) := \{f : V \to \mathbf{C}\}$$

funkcijų sudėties kiekviename taške bei daugybos iš skaliaro atžvilgiu. Funkciją f nusako jos reikšmės viršūnėse $f(x_j) =: c_j$, $1 \leq j \leq n$. Todėl $C_0(G)$ izomorfiška $\mathbf{C}^n$, o jos dimensija lygi n. Jos **standartinė** bazė bus funkcijų rinkinys $f_1, \ldots, f_n$, kai funkcija f_j apibrėžiama lygybėmis

$$f_j(x_i) = \delta_{ij}.$$

Čia δ_{ij} - Kronekerio simbolis. Dabar lygybė

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) -$$

funkcijos f išraiška standartine baze. Įvedus skaliarinę daugybą

$$< f', f'' > := \sum_{j=1}^{n} c'_j \bar{c}''_j$$

erdvė tampa kompleksine Euklido erdve (unitariąja), šios daugybos atžvilgiu standartinė bazė yra ortonormuota.

Panašiai įvedama ir m - matė erdvė funkcijų, apibrėžtų grafo briaunų aibėje:

$$C_1(G) := \{g : E \to \mathbf{C}\}.$$

Ji yra izomorfiška erdvei $\mathbf{C}^m$. Įdomesnis ir svarbesnis digrafų atvejis. Tegu toliau briaunos sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki m ir joms priskirtos kryptys. Turėdami ciklą L, sudarytą iš briaunų $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$, kur e_{i_1} vienas galas sutampa su e_{i_k} galu, ir fiksuodami ciklo kryptį (sakysim, prieš laikrodžio rodyklę planariajame grafe), ciklui galime priskirti taip vadinamą **ciklo** vektorių $\bar{z}_L = (z_1, \ldots, z_m)$, iš 1,-1 arba 0:

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } e_j \text{ priklauso ciklui ir eina ciklo kryptimi;} \\ -1, & \text{jeigu } e_j \text{ priklauso ciklui, bet jo kryptis priešinga;} \\ 0, & \text{jeigu } e_j \text{ nepriklauso ciklui.} \end{cases}$$

Naudojamas ir kitas vaizdus vektoriaus $\bar{z}_L$ užrašas

$$\bar{z}_L = \sum_{j=1}^{m} z_j e_j,$$

neteikiant šioje sumoje jokios geometrinės prasmės, įprastos vektoriams, briaunoms e_j, nors jos turi ir kryptis.

Sekant kitais autoriais, galima naudoti ciklui priskirtą funkciją (**ciklo funkciją**):

$$g_L(e) = \sum_{j=1}^{m} z_j g_j(e), \quad e \in E$$

su standartine funkcijų g_j, $1 \leq j \leq m$, baze. Aišku, vektorinių erdvių izomorfizmo tikslumu, tai yra tas pats. Kadangi grandinė yra ciklų, neturinčių bendrų briaunų, sąjunga, tai jai galime irgi priskirti panašią funkciją - sumą funkcijų, priskiriamų atskiriems jos ciklams. Kai L perbėgs visus grafo ciklus, gausime aibę funkcijų $\{g_L\}$, jų tiesinis apvalkas $Z(G)$ erdvėje $C_1(G)$ vadinamas **ciklų poerdviu**. Jo dimensija $dimZ(G)$ vadinama grafo G **ciklomačiuoju skaičiumi**.

Sudarykime dar vieną erdvės $C_1(G)$ poerdvį. Imkime viršūnių aibės skaidinį P:

$$V = V_1 \cup V_2,\ V_1 \cup V_2 = \emptyset.$$

Nagrinėkime tik tas briaunas, kurios eina iš V_1 į V_2 arba atvirkščiai. Ši briaunų aibė vadinama **pjūvio aibe**. Sudarykime vektorių $\bar{u}_P = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbf{R}^m$

$$u_j = \begin{cases} 1, & \text{jeigu } e_j \text{ eina iš } V_1 \text{ į } V_2; \\ -1, & \text{jeigu } e_j \text{ eina iš } V_2 \text{ į } V_1; \\ 0, & \text{jeigu } e_j \text{ nejungia } V_1 \text{ su } V_2. \end{cases}$$

dažnai užrašomą suma

$$\bar{u}_P = \sum_{j=1}^{m} u_j e_j$$

arba funkcija

$$g_P(e) = \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(e), \quad e \in E,$$

čia - $g_j,\ 1 \le j \le m$, standartinė funkcijų bazė. Imant visus įmanomus skaidinius P , gaunama funkcijų g_P sistema, jos tiesinis apvalkas $U(G)$ erdvėje $C_1(G)$ vadinamas **pjūvių poerdviu** (kociklų poerdviu).

1 teorema. *Briaunų funkcijų erdvė - tiesioginė tarpysavyje ortogonalių poerdvių $Z(G)$ ir $U(G)$ suma. Jei grafas G turi n viršūnių, m briaunų ir k jungumo klasių, tai*

$$dimZ(G) = m - n + k, \qquad dimU(G) = n - k.$$

Įrodymas. Tikriname teoremoje nurodytų poerdvių ortogonalumą. Imame bet kokį ciklą L ir bet kokį skaidinį P bei funkcijų koordinačių vektorius $\bar{z}_L$ ir $\bar{u}_P$ ir skaičiuojame $< \bar{z}_L, \bar{u}_P >$. Nenuliniai šios skaliarinės sandaugos dėmenys atitiks tik L ciklo briaunoms, priklausančioms ir P pjūviui. Jų skaičius yra lyginis. Susitarkime laikyti, kad briauna $-e_j$, eina ciklo kryptimi, jei e_j kryptis buvo priešinga ciklo krypčiai. Tada nagrinėjama skaliarinė sandauga lygi kiekiui L ciklo briaunų, einančių iš V_1 į V_2 minus kiekiui ciklo briaunų, einančių iš V_2 į V_1. Vadinasi, ji yra lygi nuliui. Tuo pačiu poerdvių ortogonalumas įrodytas.

Teoremoje nurodytos dimensijų formulės išplauks iš nelygybių

$$dimZ(G) \ge m - n + k, \qquad dimU(G) \ge n - k. \tag{1}$$

Tarkime pradžioje, kad G - jungus grafas, $k = 1$. Imkime karkasinį medį T. Tarkime, kad medyje panaudotos $e_1, \ldots, e_{n-1}$ briaunos, o likusios $e_n, \ldots, e_m$ buvo nepanaudotos.

Prijungimas bet kurios iš šių briaunų sukuria 1 ciklą. Jį vadinsime **fundamentaliuoju** ciklu. Tegu L_j, $n \leq j \leq m$, vienas iš šių fundamentalių ciklų, o $\bar{z}_j$ - jo vektorius. Atkreipkime dėmesį į paskutines $m-(n-1)$ koordinačių. Kai $j=n$, pirmoji iš šių koordinačių lygi 1 ar -1, o kitos lygios nuliui. Panašiai, kai $j=m$, visos minėtos koordinatės , išskyrus paskutinę, lygios nuliui, o paskutinioji lygi 1 arba -1. Iš čia išplaukia vektorių sistemos $\bar{z}_j$, $n \leq j \leq m$ nepriklausomumas. Pirmoji iš (1) nelygybių įrodyta.

Nagrinėdami pjūvius irgi panaudokime karkasinį medį. Pastebėkime, kad bet kokios T briaunos e_j, $1 \leq j \leq n-1$, išmetimas duotų pjūvį P_j, $(V = V_j' \cup V_j''$, $V_j' \cap V_j'' = \emptyset)$, o pati briauna e_j jungtų vieną viršūnių aibę su kita. Tarkime, kad e_j pradžios viršūnė yra aibėje V_j'. Dabar šio pjūvio vektorius

$$\bar{u}_j = (u_{1j}, \ldots, u_{ij}, \ldots, u_{n-1,j})$$

turės $u_{jj} = 1$, o $u_{ij} = 0$, kai $i \neq j$, nes nejungia V_j' su V_j''. Akivaizdu, jog tiesiškai nepriklausomų tokių vektorių sudarytume ne mažiau, negu $n-1$. Tuo būdu jungaus grafo atveju (1) lygybės įrodytos.

Kai G grafas turi jungumo klases $G_1 \ldots, G_k$, funkcijų erdvė $C_1(G)$ yra tiesioginė suma ortogonalių tarpusavyje funkcijų erdvių $C_1(G_j), 1 \leq j \leq k$, kurios pagal įrodytą dalį išsiskaido dviejų ortogonalių poerdvių sumomis. Be to, $Z(G) \cap C_1(G_j) = Z(G_j)$ bei $U(G) \cap C_1(G_j) = U(G_j)$,

$$\dim U(G) = \dim U(G_1) + \cdots + \dim U(G_k) = (n_1 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k.$$

Čia $|V_i| = n_i$ ir $n_1 + \cdots + n_k = n$.

1 teorema įrodyta.

Pastebėkime, jog Kirchhofo srovės dėsnius visoms viršūnėms galima užrašyti naudojant incidentumo matricą B. Tarkime $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_m)'$ – srovės vektorius stulpelis, sudarytas iš srovių, tekančių visomis briaunomis, tai matricų lygybė

$$B\mathbf{w} = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)'$$

apima srovės dėsnius visose viršūnėse iš karto. Toliau nagrinėjant, aišku, imtume tik tiesiškai nepriklausomos incidentumo matricos eilutes.

Panašiai elgiamasi ir potencialų atveju. Jei $\bar{z}_L$ - L ciklo vektorius, o $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ - potencialų skirtumų vektorius, tai Kirchhoff'o potencialų dėsnis teigia, jog

$$< \bar{z}_L, \bar{p} >= 0.$$

Kadangi grandinėje gali būti daug tarpusavyje priklausomų ciklų, nebūtina juos visus naudoti. Iš tiesų, vektoriai $\bar{z}_L$ priklauso ciklų poerdviui $Z(G)$, kurio dimensija lygi $m-n+1$ (Įvedus šaltinio bei išėjimo viršūnę, grandinė yra jungi, $k=1$), todėl pakanka naudoti tik fundamentaliuosius ciklų vektorius. Suradę karkasinį medį T, išvestą sakykim, per briaunas $e_1, ..., e_{n-1}$ imkime paeiliui likusias briaunas $e_n, ..., e_m$. Tarkime gautųjų ciklų vektoriai $\bar{z}_j$, $n \leq j \leq m$ surašyti eilutėmis, sudaro matricą C, $(m-n+1) \times m$, tada visa informacija apie potencialus užrašoma matricine lygybe.

Kirchhoff'o potencialų dėsnis. *Jei C fundamentaliųjų ciklo vektorių sudaryta matrica, o $\bar{p}$ - potencialų skirtumų vektorius stulpelis, tai*

$$C\bar{p} = 0.$$

Ir Ohm'o dėsniui galima suteikti matricinę vektorinę išraišką.

Grįžkite prie anksčiau minėtos elektros grandinės, vaizduojamos kubiniu grafu. Šio grafo ciklomatusis skaičius lygus 5. Išveskite karkasinį medį ir sudarykite 5 fundamentaliuosius ciklus. Užrašykite Kirchhoff'o potencialų dėsnį. Prijungę lygčių sistemą, gautą iš srovės dėsnio, bei srovių ir potencialų sąryšius, gautus iš Ohm'o dėsnio, raskite sroves šio grafo briaunose bei bendrą jo varžą.

11. Srautų uždaviniai digrafuose

Kaip ir elektros srovės atveju, nagrinėsime digrafus $G = (V, E)$ su orentuotų briaunų aibe E. Šiame digrafe briaunos xy ir yx yra skirtingos, jos gali būti abi. Dėl šios priežasties digrafas nelaikomas multidigrafu. Viršūnių aibėje išskirsime šaltinio viršūnę s bei išėjimo viršūnę t. Digrafus, kuriuose išskirtos šaltinio ir išėjimo viršūnės, o briaunoms yra priskirti svoriai (talpos) dar vadinmai **tinklais**. Pažymėkime

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V : \ xy \in E\}.$$

Tai gretimų x viršūnių aibė, kuriai egzistuoja briaunos einančios iš x į y. Panašiai,

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V : \ yx \in E\}.$$

Srautu vadinsime neneigiamą funkciją $f : E \to \mathbf{R}^+$, tenkinančią Kirchhoff'o dėsnį: *kiekvienoje digrafo G vidinėje viršūnėje $x \neq s, t$ teisinga lygybė*

$$\sum_{y \in \Gamma^+(x)} f(xy) = \sum_{z \in \Gamma^-(x)} f(zx).$$

Srauto reikšmes žymėsime $f(e) = f(xy)$, kai briauna e eina iš x į y.

Apibrėžime nurodytos reikšmių s sumos vadinamos išeinančio iš viršūnės x bei į ją įeinančio srauto didumais. Trumpiau kalbant, laikome, kad vidinėse viršūnėse srautas nesukuriamas. Digrafo viršūnėje s paleistas

$$v(f) := \sum_{y \in \Gamma^+(s)} f(sy) - \sum_{z \in \Gamma^-(s)} f(zs)$$

didumo srautas išeina iš viršūnės t tokio pat didumo

$$\sum_{y \in \Gamma^-(t)} f(yt) - \sum_{y \in \Gamma^+(t)} f(ty).$$

Šią reikšmę $v(f)$ vadinsime **srauto kiekiu** digrafe G. Ar bet kokio kiekio srautas gali būti apibrėžtas digrafe? Praktikoje dažnai siekiama maksimalaus didumo srauto, tačiau briaunos turi ribotas **talpas** (pralaidumą). Viso digrafo **talpą** nusako rinkinys neneigiamų skaičių $\{c(xy);\ xy \in E\}$, t.y., funkcija $c : E \to \mathbf{R}^+$. Todėl tokiuose uždaviniuose atsiranda natūralios sąlygos

$$f(xy) \le c(xy) \tag{1}$$

bet kokiai $xy \in E$. Tuo pačiu,

$$v(f) \le \sum_{xy \in E} c(xy) < \infty. \tag{2}$$

Apibrėžimas. *Srautą f_0, tenkinantį (1) sąlygą ir tokį, kad*

$$max_f v(f) = v(f_0), \tag{3}$$

vadiname (suderintos) maksimalaus srauto problemos sprendiniu.

Šio sprendinio egzistavimas - netrivialus dalykas. Išsiaiškinkime, ar galima (3) lygybėje naudoti "max" vietoje abejonių nekeliančio "sup".

1 teorema. *Egzistuoja maksimalaus srauto problemos sprendinys.*

Srautų, tenkinančių (1) sąlygą, egzistavimas akivaizdus.

Iš (2) išplaukia, jog egzistuoja baigtinis dydis $v := sup_f v(f)$. Čia supremumas imamas pagal visus įmanomus digrafo srautus. Todėl egzistuoja seka srautų $f_1, .., f_N, ...$ tokia, kad

$$\lim_{N \to \infty} v(f_N) = v. \tag{4}$$

Imkime $e_1 = xy$. Seka $f_N(e_1) \le c(e_1)$ aprėžta, tad galime išrinkti posekį $N = N' \to \infty$, kuriam galioja (4) bei $f_N(e_1) \to f(e_1)$. Pakartoję procesą keletą kartų, gautume posekį $N = N'' \to \infty$ tokį, kad galiotų (4) ir

$$f_N(e) \to f(e) \le c(e) \tag{5}$$

su kiekvienu $e \in E$. Funkcija $f(e)$ neneigiama, (5) nelygybė rodo, kad ji patenkina (1) talpos sąlygą, be to, $v(f) = v$. Todėl f - maksimalus srautas.

1 teorema įrodyta.

Maksimalaus srauto problemą 1956-57 m. nagrinėjo L.R.Ford'as bei D.R.Fulkerson'as. Jų siūlymu remsimės digrafo minimalaus pjūvio sąvoka. Prieš įvesdami ją, pažymėkime

$$E(X,Y) = \{xy :\ x \in X, y \in Y\}, \qquad X, Y \subset V.$$

Tai - briaunų, išeinančių iš X į Y, aibė. Bet kokiai funkcijai $g : E \to \mathbf{R}$ pažymėkime

$$g(X,Y) = \sum_{xy \in E(X,Y)} g(xy)$$

Kai $g(xy) = c(xy)$, tai $c(X, Y)$ reiškia aibės $E(X, Y)$ talpą.

Apibrėžimas. *Jei $S \subset V$ bei $\bar{S} = V \setminus S$ - netušti poaibiai ir $s \in S$, o $t \in \bar{S}$, tai aibė $E(S, \bar{S})$ vadinama G digrafo* **pjūviu, atskiriančiu viršūnes** *s ir t.*

Pastebėkime, jog išmetus iš digrafo briaunas, priklausančias pjūviui, jokio srauto iš s į t nėra. Atvirkščiai, kai išmetus kažkokios aibės F briaunas iš E, joks srautas iš s nepatenka į t, tai aibėje F turi būti poaibis, sudarantis digrafo pjūvį, atskiriantį s nuo t. Minimalios talpos pjūvis $E(S, \bar{S})$ vadinamas **minimaliuoju** pjūviu. Kadangi briaunų kiekis baigtinis, minimalaus pjūvio egzistavimas yra akivaizdus.

2 teorema (Maksimalaus srauto arba minimalaus pjūvio t.). *Maksimalaus srauto iš viršūnės s į viršūnę t reikšmė lygi minimaliojo pjūvio, atskiriančio s nuo t, talpai.*

Įrodymas. Pagal 1 teoremą egzistuoja srautas su maksimalia reikšme v. Be to, aišku, kad bet kokio pjūvio, atskiriančio s nuo t talpa yra nemažesnė už v. Todėl turime įrodyti, kad egzistuoja pjūvis, kurio talpa lygi v. Įrodinėdami 2 teoremą, mes pateiksime ir būdą, kaip tokį pjūvį rasti.

Rekursyviai apibrėžkime poaibį $S \subset V$. Tegu $s \in S$ ir, jei $x \in S$ bei

$$f(xy) < c(xy) \tag{T1}$$

arba

$$f(yx) > 0, \tag{T2}$$

tada prie S prijunkime y. Šis procesas baigtinis, nes turime tik baigtinį viršūnių skaičių.

Įsitikinkime, jog $t \notin S$. Iš tiesų, jei būtų priešingai, aibėje S turėtume $s - t$ taką P, einantį per viršūnes $x_0 = s$, $x_1, \dots, x_l = t$. Jų incidenčioms briaunoms $x_i x_{i+1}$ galiotų sąlyga

$$\varepsilon_i := \max\{c(x_i x_{i+1}) - f(x_i x_{i+1}),\ f(x_{i+1} x_i)\} \geq \min \varepsilon_i := \varepsilon > 0$$

su kiekvienu $0 \leq i \leq l - 1$. Apibrėžkime naują funkciją $f^* : E \to \mathbf{R}^+$ lygybėmis:

$$f^*(e) = \begin{cases} f(e), & \text{jei} \quad e \notin P, \\ f(e) + \varepsilon, & \text{jei} \quad e = x_i x_{i+1} \in P \quad \text{ir jai patenkinta (T1) sąlyga,} \\ f(e) - \varepsilon, & \text{jei} \quad e = x_{i+1} x_i \in P \quad \text{ir jai patenkinta (T2) sąlyga.} \end{cases}$$

Nesunku įsitikinti, jog funkcija f^* - srautas. Čia Kirchhoff'o dėsnis P tako viršūnėse tikrinamas atsižvelgiant į (T1) bei (T2) atvejus. Be to, $v(f^*) = v + \varepsilon$ ir f nebūtų maksimalus. Prieštara įrodo, kad $t \in \bar{S}$, o aibė $E(S, \bar{S})$ atskiria s nuo t.

Pastebėkime, kad $f(xy) = c(xy)$ bei $f(yx) = 0$ su kiekvienu $x \in S$ ir $y \in \bar{S}$. Todėl

$$v = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S) = \sum_{x \in S, y \in \bar{S}} f(xy) - \sum_{y \in \bar{S}, x \in S} f(yx). \tag{6}$$

Pagal anksčiau padarytą pastabą, pirmoji suma lygi $c(S, \bar{S})$, o antroji - lygi nuliui. Vadinasi, $v = c(S, \bar{S})$ ir 2 teorema įrodyta.

Bendru atveju 2 teorema nepasako, kaip rasti maksimalųjį srautą, t.y. pačią funkciją f. Ja remiantis žinome tik maksimaliojo srauto didumą $v = v(f)$, nes pjūvių aibė yra baigtinė, perrinkus ją, rastume minimalųjį pjūvį ir jo talpą, lygią v. Taip vadinamų sveikaskaičių srautų (jų reikšmės briaunose - sveikieji skaičiai) atveju maksimaliojo srauto problemą pavyksta išspręsti visiškai.

3 teorema. *Jei talpos funkcija c(xy) kiekvienoje briaunoje xy įgyja tik natūralias skaitines reikšmes, tai egzistuoja maksimaliojo sveikaskaičio srauto radimo algoritmas.*

Įrodymas. Konstruojame baigtinę didėjančią sveikaskaičių srautų seką $f_0, f_1, \ldots,$ pradėdami nuo $f_0 \equiv 0$, ir besibaigsiančią maksimaliuoju srautu. Jei f_i jau apibrėžtas, tai kaip ir 2 teoremos įrodyme, sudarykime aibę S_i, imdami $s \in S_i$, ir toliau prijungus $x \in V$, prijungiame $y \in V$, jei patenkinta bent viena iš (T1) arba (T2) sąlygų. Baigę šį procesą, turime, jog $f_i(xy) = c(xy)$ ir $f_i(yx) = 0$ kiekvienam $x \in S_i$ bei $y \in \bar{S}_i$.

Jei $t \notin S$, tai kaip ir (6) formulėje, turėtume

$$v(f_i) = f_i(S_i\bar{S}_i) - f_i(\bar{S}_i, S_i) = \sum_{x \in S_i, y \in \bar{S}_i} c(xy) = c(S_i, \bar{S}_i).$$

Kadangi rėžio $c(S_i, \bar{S}_i)$ negalėtų viršyti ir maksimaliojo srauto f didumas $v(f)$, tai iš čia išplaukia, kad f_i - maksimalus srautas.

Jei dabar $t \in S$, tai kaip ir 2 teoremos įrodyme, srautą f_i galime padidinti iki f_{i+1}, pakeisdami jo reikšmes atitinkamo $s - t$ tako briaunose. Būtent, $f_{i+1}(xy) = f_i(xy) + 1$, kai patenkinta (T1) sąlyga, ir $f_{i+1}(yx) = f_i(yx) - 1$, kai patenkinta (T2) sąlyga. Tada

$$v(f_{i+1}) \geq v(f_i) + 1.$$

Procesas baigsis, nes

$$v(f_{i+1}) \leq \sum_{xy \in E} c(xy).$$

Paskutiniam sekos nariui f_p turėsime $t \notin S_p$.

3 teorema įrodyta.

Intuityviai aišku, kad teoremose galėjome apsiriboti **becikliais** maksimaliaisiais srautais, t.y. srautais, neturinčiais funkcijų

$$f(x_1x_2) > 0,\ f(x_2x_3) > 0,\ \ldots f(x_{k-1}x_k) > 0,\ f(x_kx_1) > 0$$

kada $x_1, \ldots, x_k, x_1$ sudaro digrafo ciklą.

Kelių šaltinių s_i bei kelių išėjimo viršūnių t_j atvejai susiveda į jau nagrinėtą atvejį. Pakanka prijungti vieną viršūnę s, išvesti briaunas ss_i iš s į duotąsias šaltinių viršūnes s_i bei prijungti bendrą išėjimo viršūnę t ir briaunas t_jt. Apibrėžiant pjūvius atskiriančius šaltinius nuo išėjimo viršūnių, tikslinga naujųjų briaunų neįjungti į juos.

Maksimaliųjų srautų uždaviniai kyla ir turint apribojimus arba talpas vidinėms digrafo viršūnėms. Bet ir pastarieji susiveda į srautų uždavinius, kai turimi briaunų talpų apribojimai. Pakanka vietoje viršūnės x digrafe įvesti dvi viršūnes x^-, x^+ bei orentuotą briauną x^-x^+, o visas buvusias briaunas yx pakeisti briaunomis yx^- ir xy - briaunomis

x^+y. Viršūnės talpa $c(x)$ natūraliai keičiasi briaunos x^-x^+ talpa. Anksčiau turėtų briaunų talpas galime laikyti net begalinėmis, jos neturės įtakos skaičiuojant baigtinę minimalią pjūvio talpą. **Pjūviu**, aišku, dabar laikoma išmetamų viršūnių aibė, neturinti s ir t, ir reikalaujama, kad joks srautas nepatektų iš s į t. Įvedus papildomas briaunas, jų pjūvio minimali talpa sutampa su **minimalia viršūnių pjūvio talpa**. Tokiu būdu iš 2 teoremos išvedamas dar vienas teiginys.

4 teorema. *Tarkime, kad G - digrafas su visose viršūnėse $x \in V$, $x \neq s, t$, apibrėžta talpų funkcija $c(x)$. Tada maksimalus srauto $f(x)$, $x \in V$, iš s į t didumas, esant patenkintai sąlygai $f(x) \leq c(x)$, lygus minimaliai viršūnių pjūvio, atskiriančio s nuo t, talpai.*

12. Grafų jungumas. Menger'o teorema.

Nagrinėjant srautus grafuose išryškėjo pjūvių svarba. Jungiojo grafo $G = (V, E)$ viršūnių (briaunų) aibės poaibis V_0 (atitinkamai E_0) vadinamas **atskiriančiuoju**, jeigu grafas $G - V_0$ (arba atitinkamai $G - E_0$) jau nebėra jungus arba yra sudarytas iš vienos viršūnės (grafas $K^1 = E_1$). Atskiriantieji poaibiai, kurių visi netrivialūs daliniai poaibiai nėra atskiriantieji, vadinami **pjūviais**. Akreipkime dėmesį, kad šiame kontekste pjūvio sąvoka įgyja naują prasmę. Dabar pjūviai yra **minimalūs** atskiriantieji poaibiai.

Jei iš jungaus G grafo atėmus ne daugiau bet kokių $k-1$, $k \leq n-1$, viršūnių jis išlieka jungiu (išlikusių viršūnių kiekis yra ne mažesnis negu 2), tai G vadinamas k **jungiuoju viršūnių atžvilgiu** arba prasme. Šių natūraliųjų skaičių k maksimumas vadinamas **jungumo koeficientu** ir žymimas $\kappa(G)$. Kitaip tariant, $\kappa(G) = k$, jei atėmus bet kokias $k - 1$ viršūnių, grafas lieka jungiu, o išmetus k viršūnių, jis turi bent dvi jungumo klases arba lygus K^1. Aišku, pirmuoju atveju turėjo būti $n \geq \kappa(G) + 2$, o antruoju – $\kappa(G) = n - 1$. Be to, šiuo atveju grafas $G = K^n$, nes priešingu atveju egzistuotų bent dvi negretimos viršūnės, todėl išmetus likusias $n - 2$ viršūnių, liktų nejungus grafas.

Panašiai, elgiamės ir briaunų atveju. n, $n \geq 2$, eilės grafas G vadinamas k **jungiuoju briaunų atžvilgiu**, $k \geq 1$, jei atėmus bet kokias $k - 1$ ar mažiau briaunų jis išlieka jungus. Šių natūraliųjų skaičių k maksimumas vadinamas **jungumo koeficientu briaunų atžvilgiu** ir žymimas $\lambda(G)$.

Taigi, jei $\lambda(G) = k$ (žinoma, grafo didumas $m \geq \lambda(G)$), tai G bus k jungus briaunų atžvilgiu su kiekvienu $1 \leq k \leq \lambda(G)$. Pavyzdžiui, pakankamai dideliam jungiam G grafui, neturinčiam tiltų, gauname, $\lambda(G) \geq 2$. Netrivialus ($n \geq 2$) jungusis grafas visada yra 1-jungis. Pilnajam grafui K^n gausime $\lambda(K^n) = \kappa(K^n) = n-1$, tačiau jungumo koeficientai gali ir labai skirtis savo didumais. Nubrėžkime tokį grafą.

Imkime du pilnus grafus K^l, neturinčius bendrų viršūnių. Įveskime naują viršūnę v ir ją sujunkime su kiekviena ankstesne viršūne. Aišku, v išmetimas iš gautojo grafo G vėl grąžins pirmykštę situaciją su dviem jungiais grafais. Tad, $\kappa(G) = 1$, tačiau $\lambda(G) = l$.

1 teorema. *Jei $x \in V$ ir $xy \in E$, tai*

$$\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - x) \leq \kappa(G), \qquad \lambda(G) - 1 \leq \lambda(G - xy) \leq \lambda(G).$$

Įrodymas išplaukia iš jungumo koeficientų apibrėžimų.

2 teorema. *Jei $\delta(G)$ - minimalus G grafo, viršūnės laipsnis, tai*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G). \tag{1}$$

Įrodymas. Kai $G = K^n$, visi trys koeficientai lygūs $n-1$.

Antroji iš (1) nelygybių lengvai patikrinama. Pakanka imti $\delta(G)$ laipsnio viršūnės incidenčias briaunas ir jas atimti iš G. Gauname vieną izoliuotą viršūnę ir dvi jungumo komponentes. Todėl $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

Jei $\lambda(G) \leq 1$, tai $\lambda(G) = \kappa(G)$.

Tarkime, kad $\lambda(G) = k \geq 2$. Be to, tegu $G' = G - \{x_1y_1, \ldots, x_ky_k\}$ - nejungus grafas. Jei $G'' = G - \{x_1, \ldots, x_k\}$ - irgi nejungus, tai $\kappa \leq k$, ir pirmoji iš (1) nelygybių įrodyta. Jei G'' dar jungus (taip būtų, kai $x_1, \ldots, x_k$ - kraštinės viršūnės), tai $\delta(x_1) \leq k$. Iš tiesų, šiai viršūnei gretimos viršūnės galėjo būti $x_2, \ldots, x_k$ bei viena iš G'' viršūnių. Jei pastarųjų būtų buvę daugiau, G' būtų buvęs jungus. Dabar iš G atėmę viršūnes, gretimas x_1, o jų turime k, padidiname jungumo komponenčių skaičių. Vadinasi, $\kappa \leq k$.

2 teorema įrodyta.

Grafo jungumas priklauso nuo takų iš vienos viršūnės į kitą skaičiaus. $s-t$ takai vadinami **nepriklausomais**, jeigu jie neturi bendrų viršūnių, išskyrus s ir t. Panašiai, naudosime ir takus, neturinčius bendrų briaunų, nors specialaus apibrėžimo ir neįvesime. Jei W - atskirianti G grafo aibė (viršūnių arba briaunų aibės poaibis), o viršūnės s ir t yra skirtingose grafo $G - W$ jungiose komponentėse, tai W vadinamas **atskiriančiu viršūnes** s ir t. Mus domins mažiausias galimas tokios aibės W elementų kiekis. Jis rišasi su nepriklausomų $s-t$ takų skaičiumi. Visa, kas pasakyta šiame skyrelyje, tinka ir multigrafams.

Menger'o teorema (1927).

(I) Tegu s ir t - negretimos viršūnės. Mažiausias kiekis viršūnių, atskiriančių s nuo t, lygus didžiausiam nepriklausomų $s-t$ takų skaičiui.

(II) Tegu s ir t skirtingos grafo viršūnės. Mažiausias kiekis briaunų, atskiriančių s nuo t, lygus didžiausiam neturinčių bendrų briaunų $s-t$ takų skaičiui.

(I) teiginio įrodymas. Kiekvieną xy briauną pakeiskime dviem orentuotom briaunom $\bar{xy}$ ir $\bar{yx}$. Be to, visoms viršūnėms, išskyrus s ir t, suteikime vienetinę talpą. Tada maksimalus srauto iš s į t didumas lygus maksimaliam nepriklausomų $s-t$ takų skaičiui. Pagal 9.4 teoremą jis lygus minimaliai viršūnių pjūvio talpai. Bet pastaroji lygi atskiriančių viršūnių kiekiui.

(II) teiginio įrodymas. Vėl apibrėžkime digrafą, visoms briaunoms suteikdami vienetines talpas. Dabar (II) tvirtinimas yra specialus 9.2 teorems atvejis.

Menger'o teorema įrodyta.

Žinoma, autorius nesinaudojo vėlesne (Fordo ir Fulkersono) teorema, todėl ir mes pateiksime paties Menger'o samprotavimus. Jie tinka ir bendresniu multigrafų atveju.

Antrasis (II) teiginio įrodymas. Aišku, jog maksimalus $s-t$ takų, neturinčių bendrų briaunų, skaičius negali viršyti briaunų kiekio atskiriančiame pjūvyje. Atvirkščiai nelygybei įrodyti taikysime matematinę indukciją.

Kai grafo didumas $m = 1$, teiginys teisingas. Tarkime, kad jis teisingas visiems multigrafams, kurių didumai mažesni už m. Nagrinėkime jungų G grafą, kurio didumas yra m, turintį minimalų pjūvį $E' \subset E$, atskiriantį s nuo t, iš k briaunų. Matosi du atvejai:

1) nei s, nei t nėra incidenčios visoms briaunoms iš E';

2) s arba t yra incidenti visoms E' briaunoms.

Pirmuoju atveju, grafo $G - E'$ abi likusios jungiosios komponentės G_1 ir G_2 turi bent po dvi viršūnes ir bent po vieną briauną. Sudarykime du naujus grafus (gal, multigrafus, nors pradinis grafas ir būtų paprastasis). Sutraukime G_1 jungiąją komponentę, kurioje yra s, į vieną šį tašką ir iš jo išveskime E' briaunas. Tuo būdu gavome grafą F_1 su viršūnių aibe $\{s\} \cup V(G_2)$ bei briaunų aibe $E' \cup E(G_2)$. Panašiai, sutraukę G_2 į vieną tašką t ir E' briaunomis jį prijungę prie G_1, sudarome grafą F_2. Abu naujieji grafai F_1 ir F_2 turi mažiau negu m briaunų, juose E' išlieka pjūviu, atskiriančiu s ir t. Jiems teisinga indukcinė prielaida: F_1 ir F_2 grafe egzistuoja k takų iš s į t. Šiuos F_1 grafo takus pratesę takais F_2 grafe gauname k takų iš s į t pradiniame G grafe.

Antruoju atveju, kai s arba t yra incidenti visoms iš k bet kokio pjūvio E' briaunų, galima laikyti, kad visos E briaunos priklauso tam tikram minimaliam pjūviui, atskiriančiam s ir t. Iš tiesų, priešingu atveju, galėtume atimti pjūviui nepriklausančias briaunas, sutraukti grafą ir pritaikyti indukcijos prielaidą. Radę k takų mažesnėje briaunų aibėje, juo labiau juos turėsime ir didesnėje aibėje. Tuo pačiu išsimeta ir kiekvieno $s - t$ tako tarpinės briaunos, kurios yra neincidenčios su s ir t. Likusiame grafe kiekvienas $s - t$ takas turi 1 ar dvi briaunas, o viena iš jų priklauso E' pjūviui. Atėmę vieną taką iš G likusiame grafe turėtume mažesnį skaičių briaunų ir tik $k - 1$ briaunos pjūvį. Jam pritaikę indukcijos prielaidą, gautume $k - 1$ taką. Todėl pradiniame grafe buvo k takų iš s į t.

(II) Menger'o teoremos teiginys įrodytas.

Dabar galime atsakyti į klausimą, kada grafas yra k jungus viršūnių arba briaunų atžvilgiu.

3 teorema. *Grafas yra k jungus, $k \geq 2$, viršūnių atžvilgiu tada ir tik tada, kada bet kokias jo dvi viršūnes jungia bent k nepriklausomų kelių. Grafas yra k jungus, $k \geq 2$, briaunų atžvilgiu tada ir tik tada, kada bet kokias jo dvi viršūnes jungia bent k kelių, neturinčių bendrų briaunų.*

Įrodymas. Pritaikyti Menger'o teoremą.

13. Parinkimas. Hall'o teorema

Parinkimo problemos turi ir gyvenimiškų variantų. Tarkime, kad baigtinė aibė vaikinų, pažįstančių po keletą merginų, nusprendė vesti. Keli vaikinai gali pažinoti tą pačią merginą. Kokios sąlygos turi būti patenkintos, kad kiekvienas iš jų galėtų vesti jau pažįstamą merginą? Panaši problema gali susidaryti, kai keletas darbininkų, turinčių po kelias, gal būt, bendras specialybes, pretenduoja į keletą darbo vietų. Kaip juos įdarbinti, kad kiekvienas dirbtų pagal savo specialybę? Pradžioje pateiksime kombinatorinį vedybų problemos sprendimą, kurį 1935 metais pasiūlė P.Hall'as, vėliau tai susiesime su grafais.

1 (Hall'o) teorema. *Visi m vaikinų, pažįstančių po keletą merginų, galės vesti savo pažįstamą tada ir tik tada, kada bet kuris k, poaibis vaikinų, $1 \leq k \leq m$, kartu paėmus pažįsta ne mažiau kaip k merginų.*

Įrodymas. Būtinumas yra beveik akivaizdus. Jei kažkoks k rinkinys vaikinų nepažįsta, bendrai paėmus, k merginų, tai jų negalėtume apvesdinti su pažįstamomis.

Pakankamumą galime įrodyti matematinės indukcijos metodu. Kai $m = 1$, problemos sprendimas akivaizdus. Tarkime vedybų problema išsprendžiama bet kokiai aibei vaikinų, kurių skaičius mažesnis negu m. Pradžioje išnagrinėkime atvejį, kai bet koks būrys k vaikinų, $k < m$, bendrai paėmus pažįsta $k + 1$ merginą. Išnaudodami šį pažinčių rezervą, apvesdiname bet kurį iš vaikinų su jo pažįstama, o likusiai aibei iš $m - 1$ vaikino pritaikome indukcijos prielaidą.

Tarkime dabar, kad $k < m$ yra toks, kad k vaikinų būrys kartu pažįsta lygiai k merginų. Pagal indukcijos prielaidą šie vaikinai gali būti apvesdinti su savo pažįstamomis iš šių k merginų. Nagrinėkime likusius $m - k$ viengungių. Bet kuris jų h poaibis, $h \leq m - k$, kartu paėmus turi pažinoti h iš likusių merginų. Priešingu atveju, kartu su jau apsivedusiais jie būtų nepažinoję $k + h$ merginų. Vadinasi, ir likusiai aibei $m - k$ vaikinų patenkinta teoremos sąlyga. Kadangi antrajai vaikinų aibei irgi tinka indukcinė prielaida, teorema įrodyta.

Pavaizduokime Hall'o teoremos situaciją dvidaliu grafu. Tarkime, kad $G = (V_1 \cup V_2, E)$ - dvidalis grafas, t.y., E briaunos jungia tik V_1 viršūnes su V_2 viršūnėmis. Tarkime, kad $|V_1| \leq |V_2|$. Sakome, kad G grafe yra galimas **visiškasis parinkimas**, jei aibėje V_2 egzistuoja poaibis V_2', toks, kad $|V_1| = |V_2'|$, ir V_1 viršūnės yra sujungtos E briaunomis su V_2' viršūnėmis. Kyla klausimas, kada egzistuoja visiškas parinkimas.

2 teorema. *Tegu $G = (V_1 \cup V_2, E)$ - dvidalis grafas, $\phi(A) \subset V_2$ - aibė viršūnių, sujungtų E briaunomis su $A \subset V_1$ viršūnėmis. Visiškas parinkimas egzistuoja tada ir tik tada, kada kiekvienam poaibiui $A \subset V_1$ teisinga nelygybė $|A| \leq |\phi(A)|$.*

Įrodymas. Interpretuokime V_1 Hall'o teoremos vaikinų aibe, o V_2 - merginų aibe. Akivaizdu, kad 2 teorema išplaukia iš anksčiau įrodytos teoremos.

14. Skirtingi poaibių atstovai

Matematikai svarbi ir kita Hall'o teoremos interpretacija. Spręskime tokį uždavinį. Tarkime $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ - aibės X netuščių poaibių šeima. Kada egzistuoja rinkinys $(x_1, \ldots, x_m)$ skirtingų X elementų tokių, kad $x_i \in A_i$, $1 \leq i \leq m$? Tokį x-ų poaibį iš X vadinsime poaibių A_i **skirtingų atstovų rinkiniu**. Sutinkamas ir $\mathcal{A}$ **transversalės** terminas.

1 teorema. *X aibės poaibių šeimos $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ skirtingų atstovų rinkinys egzistuoja tada ir tik tada, kada*

$$\left| \cup_{i \in F} A_i \right| \geq |F| \tag{1}$$

su kiekvienu poaibiu $F \subset \{1, \ldots, m\}$.

1 įrodymas. Sudarykime dvidalį grafą $G(V_1, V_2)$ su $V_1 = \mathcal{A}$, o $V_2 = X$. Be to, išveskime briaunas $A_i x_j$, jei $x_j \in A_i$. Ką reikštų visiškas parinkimas šiam dvidaliui grafui? Tai būtų X poaibio, turinčio m elementų bei sujungtų briaunomis su $\mathcal{A}$, radimas.

Akivaizdu, kad toks poaibis ir būtų $\mathcal{A}$ skirtingų atstovų rinkinys. Vadinasi, 2 teorema yra 1 teoremos išvada.

R.Rado įrodymas. Įrodymo idėja: jei (1) sąlyga yra patenkinta su aibe A_i, $|A_i| \geq 2$, tai ji išlieka patenkinta ir atėmus atėmus iš jos kažkurį elementą. Šią savybę įrodysime vėliau. Dabar iš jos išvedame teoremos teiginį.

Pasinaudoję, jeigu reikia, minėta savybe keletą kartų ir išmętę iš A_i joje minimus elementus, vietoje visų aibių A_i galime gauti vieno elemento poaibius. Bet tada (1) sąlyga reiškia, kad visi likę A_i elementai yra skirtingi X elementai. Todėl jie sudaro ieškomą skirtingų atstovų rinkinį. Tuo būdu, teorema būtų įrodyta.

Grįžtame prie minėtos savybės. Tarkime, kad $i = 1$, $|A_1| \geq 2$, $x, y \in A_1$, ir bet kurio iš jų atėmimas iš A_1 pakeistų (1) sąlygą. Tai reiškia, jog turime du indeksų poaibius $F_1, F_2 \subset \{2, ..., m\}$ tokius, kad

$$|P| := \left| \cup_{i \in F_1} A_i \cup (A_1 \setminus \{x\}) \right| \leq |F_1| \tag{2}$$

ir

$$|Q| := \left| \cup_{i \in F_2} A_i \cup (A_1 \setminus \{y\}) \right| \leq |F_2|. \tag{3}$$

Tada

$$P \cup Q = \cup_{i \in F_1 \cup F_2} A_i \ \cup A_1 \subset X$$

ir ji patenkina (1) sąlygą, tad

$$|P \cup Q| \geq |F_1 \cup F_2| + 1. \tag{4}$$

Be to,

$$|P \cap Q| \geq \left| \cup_{i \in F_1 \cap F_2} A_i \right| \geq |F_1 \cap F_2|, \tag{5}$$

nes ir paskutinė sąjunga tenkina (1) sąlygą. Dabar iš (2), (3), (4) ir (5) nesunkiai išvedame prieštarą:

$$\begin{gathered} |F_1| + |F_2| \geq |P| + |Q| = |P \cup Q| + |P \cap Q| \geq \\ \geq |F_1 \cup F_2| + 1 + |F_1 \cap F_2| = |F_1| + |F_2| + 1. \end{gathered}$$

1 teorema įrodyta.

Prisiminsime vieną viduramžių žaidimą – lotyniškųjų kvadratų sudarymą. n **eilės lotyniškuoju kvadratu** vadinama skaičių $1, 2, ..., n$ matrica, kurios eilutėse ir stulpeliuose yra skirtingi elementai. Ar su kiekvienu n tokia matrica egzistuoja?

2 teorema. *Tegu $n \geq 1$ – natūralusis skaičius. Egzistuoja n eilės lotynniškasis kvadratas.*

Įrodymas. Įrodysime net daugiau: kiekvieną stačiakampę matricą, vadinamą **lotyniškuoju stačiakampiu**, $m \times n$, $1 \leq m < n$, su skirtingais elementais (iš skaičių $1, ..., n$) eilutėse ir stulpeliuose galime papildyti iki lotyniškojo stačiakampio su didesniu skaičiumi eilučių. Kadangi bet kuris skaičių $1, ..., n$ kėlinys sudaro vienos eilutės lotyniškąjį stačiakampį, kartodami papildymo procedūrą, sudarytume lotyniškąjį kvadratą.

Tarkime, turime $m \times n$ lotyniškąjį stačiakampį, $m < n$. Kartu paėmus, šiame stačiakampyje kiekvienas elementas pakartotas m kartų, po vieną kiekvienoje eilutėje. Pažymėkime $A_1, ..., A_n$ skaičių, nepatekusių į matricos stulpelius, aibes. Pastebėkime, kad $|A_j| = n - m$, o kiekvienas skaičius iš $X = \{1, ..., n\}$ jose pasikartoja $n - m$ kartų. Pastarąjį teiginį nesunku įžvelgti nagrinėjant matricos stulpelius, papildytus aibėmis A_j. Taip susidarytų n kėlinių, kuriuose bet kuris iš skaičių, neviršijančių n, pasikartotų n kartų. Kadangi lotyniškajame stačiakampyje šis sakičius pakartotas m kartų, todėl visose aibėse A_j jis pasikartoja $n - m$ kartų.

Ar egzistuoja skirtingų atstovų rinkinys poaibių šeimai $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$? Patikriname (1) sąlygą. Bet koks k poaibių iš A_i rinkinys turės $(n-m)k$, galbūt, pasikartojančių elementų. Jei šių poaibių sąjunga turėtų mažiau negu k skirtingų elementų, tai bent vienas skaičius turėtų pasikartoti daugiau negu $n - m$ kartų. Tai prieštarauja ankstesnei pastabai. Tad (1) sąlyga yra patenkinta. Egzistuojantis skirtingų atstovų rinkinys gali sudaryti naują lotyniškojo stačiakampio eilutę. Pakartoję tai keletą kartų baigiame 2 teoremos įrodymą.

Kai kada pasiseka išrinkti tik $t \leq m$ skirtingų atstovų rinkinį (dalinę transversalę). Jo egzistavimo sąlyga šiek tiek silpnesnė.

3 teorema. *Tegu $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ – netuščių aibės X elementų poaibių šeima. Skirtingų atstovų rinkinys iš t elementų, priklausančių kažkurioms iš A_i aibių po vieną, egzistuoja tada ir tik tada, kai*

$$\left| \cup_{i \in F} A_i \right| \geq |F| + t - m, \qquad F \subset \{1, ..., m\}. \tag{6}$$

Įrodymas. Kai $|F| + t - m \leq 0$, sąlyga triviali. Tegu $t < m$, imkime bet kokią aibę D, $|D| = m - t$ ir nesikertančią sy X. Sudarykime aibės $X \cup D = X'$ poaibių šeimą $\mathcal{A}' = \{A_1 \cup D, ..., A_m \cup D\}$. Įsitikinkime, jog $\mathcal{A}$ dalinis t skirtingų atstovų rinkinys egzistuoja tada ir tik tada, kada $\mathcal{A}'$ turi skirtingų X' atstovų rinkinį.

Iš tiesų, radę dalinį rinkinį $x_1, ..., x_t$ galėtume prirašyti visus D elementus ir tuo būdu gauti $\mathcal{A}'$ skirtingų X' atstovų rinkinį, jau turintį m elementų. Atvirkščiai, turėdami pastarąjį rinkinį, ir išmetę iš jo visus D atstovus, kurių bus ne daugiau negu $m - t$, gautume bent t skirtingų aibių iš $\mathcal{A}$ atstovų, t. y., dalinį rinkinį.

Lieka įsitikinti, kad (6) sąlyga yra ekvivalenti Hall'o teoremos sąlygai, pritaikytai šeimai $\mathcal{A}'$. Tai išplaukia iš sąryšio

$$\left| \cup_{i \in F} (A_i \cup D) \right| = \left| \cup_{i \in F} A_i \right| + m - t \geq |F|.$$

3 teorema įrodyta.

Jei dvidaliame grafe $G = G(V_1 \cup V_2, E)$ egzistuoja bent t briaunų, jungiančių skirtingas V_1 viršūnes su skirtingomis V_2 viršūnėmis, tai sakome, kad grafe yra **dalinis** $t < |V_1|$ **parinkimas**. Tegu, $|V_1| = m$ bei kaip ir anksčiau $\Phi(x_i) \subset V_2$ – viršūnių, sujungtų briaunomis su x_i, aibė.

Išvada. *Dvidaliame $G(V_1 \cup V_2, E)$ grafe yra dalinis $t < |V_1|$ parinkimas tada ir tik tada, kada*

$$\left| \cup_{i \in F} \Phi(x_i) \right| \geq |F| + t - m, \qquad F \subset \{1, ..., m\}.$$

Užduotis. Prie kokių sąlygų egzistuoja dalinis skirtingų atstovų iš $\mathcal{A}$ rinkinys išrinktų iš $X_0 \subset X$?

15. (0,1) matricos

Hall'o teoremos sąlygos tikrinimą palengvina matricų, kurių elementai yra tik nuliai arba vienetai, nagrinėjimas. Tokios matricos vadinamos **(0,1) matricomis**. Tarkime, kad $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ – netuščių aibės $X = \{x_1, ..., x_n\}$ elementų poaibių šeima. Matricą $M = (m_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, su $m_{ij} \in \{0, 1\}$ ir $m_{ij} = 1$ tada ir tik tada, kada $x_j \in A_i$ vadiname **šeimos $\mathcal{A}$ incidenčiąja matrica**. Dvidaliame $G(V_1 \cup V_2, E)$ grafe, $V_1 = \{x_1, ...x_m\}$, $V_2 = \{y_1, ..., y_n\}$, imdami kaip ir anksčiau aibę V_2 viršūnių, kurios buvo sujungtos su $x_i \in V_1$, gautume, jog $m_{ij} = 1$ tada ir tik tada, kai $x_i y_j \in E$.

(0,1) matricos **elementų rangu** (nelygu **matricos rangui**!) vadiname didžiausią skaičių vienetų, kurie yra skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose.

1 teorema. *Aibės X poaibių šeima $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ turi didžiausią t skirtingų atstovų rinkinį tada ir tik tada, kai jos incidenčios matricos elementų rangas lygus t.*

Įrodymas išplaukia iš apibrėžimų.

Kita teorema, skirta palengvinti (0,1) matricos elementų rangui skaičiuoti.

2 teorema (König, Egerváry, 1931). *(0,1) matricos elementų rangas lygus mažiausiam skaičiui eilučių ir stulpelių, kuriuose yra visi matricos vienetiniai elementai.*

Įrodymas. Tarkime, kad visi vienetiniai elementai yra r eilučių ir s stulpelių, r ir s yra minimalūs, o $\mu = r + s$. Aišku, jog elementų rangas neviršija μ.

Įrodysime, kad matricoje yra μ vienetų, išsidėsčiusių skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose. Patogumo sumetimais, perstatykime eilutes ir stulpelius taip, kad visi vienetai būtų viršutinėse r eilučių ir paskutiniuose s stulpelių. Gauname tokią matricą:

$$M = \begin{pmatrix} P & S \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

Čia kairiajame apatiniame kampe yra dalinė nulinė matrica, kurios matavimai yra $(m - r) \times (n - s)$. Atkreipkime dėmesį į dalines matricas P ir Q. Nei viena matricos P eilutė negali būti nulinė. Priešingu atveju visus M vienetus būtume sutalpinę į mažiau negu r eilučių ir s stulpelių. Panašiai samprotaudami gautume, kad Q stulpeliai yra nenuliniai.

Tegu A_i, $i \leq r$, - pirmųjų $n - s$ stulpelių indeksų j, kai $m_{ij} = 1$, poaibis. Ši poaibių šeima $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r\}$ tenkina Hall'o teoremos sąlygą. Iš tiesų, jei koks nors k šių poaibių rinkinys turės mažiau negu k elementų, tai matricoje M šias eilutes galime pakeisti mažiau negu k stulpelių ir, tuo būdu, sutalpinti visus vienetus į mažiau negu μ eilučių ir stulpelių. Pagal Hall'o teoremą galime išrinkti skirtingų atstovų rinkinį iš r elementų. Jis nurodys skirtingus indeksus stulpelių, kuriuose yra M matricos r vienetų, kurie be to bus ir skirtingose eilutėse. Panašiai pasielgę su matrica Q, gausime dar s vienetų skirtingose M eilutėse ir stulpeliuose. Todėl M elementų rangas yra lygus $r + s = \mu$.

2 teorema įrodyta.

16. Takų ir ciklų ilgiai

Susipažinsime su paprasčiausiais grafų parametrų vertinimo uždaviniais. Jeigu G grafe įvertinę jo parametrą $f(G)$, sakykime per grafo eilę n, didumą m, mažiausią ar didžiausią viršūnės laipsnį δ bei Δ atitinkamai, gauname, kad $f(G) \le C(n, m, \delta, \Delta)$, čia C - kažkokia parametrų funkcija, tai G grafas, kuriam būtų tenkinama lygybė, vadinamas **ekstremaliuoju grafu**. Jų aprašymas – aktuali problema.

Pradžioje išspręskime uždavinį: kiek mažiausiai reikia turėti viršūnių, kad G grafe būtų ciklas, kurio ilgis yra ne didesnis už g?

1 teorema. *Tegu $\delta = \delta(G) \ge 3$ - mažiausias grafo laipsnis. Jei grafo mažiausias ciklo ilgis yra $g \ge 3$, tai jo eilė n tenkina nelygybes*

$$n \ge n_0(g, \delta) := \begin{cases} 1 + \frac{\delta}{\delta - 2}\Big((\delta - 1)^{(g-1)/2} - 1\Big), & \text{kai } g \text{ yra nelyginis,} \\ \frac{2}{\delta - 2}\Big((\delta - 1)^{g/2} - 1\Big), & \text{kai } g \text{ yra lyginis.} \end{cases}$$

Įrodymas. Tarkime, jog $g = 2d + 1$ su $d \ge 1$. Imkime bet kokią viršūnę x ir skaičiuokime viršūnes, esančias nuo jos atstumu $k = 1, ..., d$. Pastebėkime, kad arti nuo x esančios viršūnes ir x gali jungti tik vienas takas. Iš tiesų, jei z ir x jungtų du skirtingi ne ilgesni negu d takai, tai turėtume ne ilgesnį negu $2d$ ilgio ciklą. Dabar galime įvertinti kiekį viršūnių, esančių netoli nuo x.

Visų pirma, x turi ne mažiau negu δ gretimų viršūnių. Atstumas iki jų yra vienetas. Kiekviena iš šių kaimyninių viršūnių turi bent po $\delta - 1$ savo naujų gretimųjų viršūnių. Iki jų atstumas nuo x yra 2, nes yra tik vienas kelias nueiti nuo x prie bet kurios iš jų. Taigi iš viso yra ne mažiau negu $\delta(\delta - 1)$ viršūnių, atstumas iki kurių yra 2.

Samprotavimus galime pakartoti, kol atstumas iki naujų viršūnių yra ne didesnis už d. Taip gauname, kad viršūnių, iki kurių atstumas yra $k \le d$ yra ne mažiau negu $\delta(\delta - 1)^{k-1}$. Vadinasi, grafas turi ne mažiau negu

$$n \ge 1 + \delta + \delta(\delta - 1) + \cdots + \delta(\delta - 1)^{d-1}$$

viršūnių. Kadangi sudėję dešinėje pusėje stovinčius geometrinės progresijos narius gauname $n_0(g, \delta)$, nelyginio g atveju teoremos teiginys yra įrodytas.

Tarkime, kad $g = 2d$ yra lyginis natūralusis skaičius. Imkime dabar dvi gretimas viršūnes x ir y. Jos abi turi ne mažiau negu $2(\delta - 1)$ kaimynių, t.y., viršūnių, iki kurių atstumas nuo x ar y yra 1. Panašiai, 2 atstumu rasime nemažiau negu $2(\delta-1)^2$ viršūnių ir $k \leq (d-1)$ atstumu – $2(\delta-1)^k$ viršūnių. Ir vėl sudėję pagal $k = 1..., d-1$ gauname $n_0(g, \delta)$ lyginio g atveju.

1 teorema įrodyta.

Iš šios teoremos žinodami grafo eilę bei minimalų laipsnį, galėtume išvesti grafo ciklo mažiausio ilgio įvertį iš viršaus. Teoremos įrodymas nurodo būdą, kaip nusakyti ekstremaliuosius grafus. Tai bus tokie grafai, kad kiekviename mūsų įrodymo žingsnyje gausime nurodytą skaičių viršūnių. Pvz., kai g yra nelyginis, jame turi būti δ viršūnių 1 atstumu, $\delta(\delta-1)$ - 2 atstumu, ir taip toliau, $\delta(\delta-1)^{d-1}$ - d atstumu. Iš viso ekstremaliajame grafe turi būti $n_0(g, \delta)$ viršūnių. Ir toks pat vaizdas turi būti pradedant nuo bet kokios viršūnės. Todėl toks grafas turi būti δ reguliarus. Maksimalus atstumas tarp dviejų viršūnių (**grafo skersmuo**) turi būti d. 1 teoremos ekstremalieji grafai vadinami **Moore** vardu.

Įrodyta teorema nusako sąlygas, kada grafas turi trumpo ilgio ciklą. O kada jis turi ilgus ciklus ar takus?

n eilės grafas vadinamas **Hamiltono**, jeigu jame yra n ilgio ciklas. Jame bus ir $n-1$ ilgio (neuždaras) takas.

2 teorema. *Tegu G - jungus ne Hamiltono grafas, turintis maksimalaus l ilgio ciklą (**grafo apskritimą**). Tada jis turi ir l ilgio neuždarą taką.*

Įrodymas. Ciklui $C = x_1...x_l$, $l < n$, nepriklauso bent viena viršūnė y, kuri jungiame grafe turi būti gretima vienai iš ciklo viršūnių, tarkime x_1-ai. Tada $yx_1...x_l$ yra l ilgio takas. 2 Teorema įrodyta.

Išvada. *Jei jungiame ne Hamiltono grafe yra maksimalaus l ilgio takas, tai jo apskritimo ilgis irgi neviršija l.*

3 teorema. *Tegu G - jungus $n \geq 3$ eilės grafas ir yra patenkinta sąlyga*

$$deg(x) + deg(y) \geq k.$$

Čia x ir y - bet kurios negretimos viršūnės. Jei $k = n$, tai grafas yra Hamiltono. Jei $k < n$, tai G yra k ilgio takas ir nemažesnio už $(k+2)/2$ ilgio ciklas, jei tik $k \geq 2$.

Įrodymas. Tarkime G nėra Hamiltono grafas, o $P = x_1...x_l$ maksimalaus $l-1$ ilgio takas. Matome, kad x_1 ir x_l gretimos viršūnės priklauso tik takui. Be to, jos tarpusavyje nėra gretimos, nes priešingu atveju, paėmę dar jas jungiančią briauną gautume l ilgio ciklą. Tai prieštarautų ankstesnei išvadai. Pastebėkime, kad P take nėra viršūnių x_i ir x_{i+1}, tokių, kad $1 \leq i \leq l-1$ ir x_i būtų gretima x_l, o x_{i+1} - viršūnei x_1. Iš tiesų, priešingu atveju galėtume sudaryti l ilgio ciklą $x_1...x_i x_l x_{l-1}...x_{i1} x_1$. Taigi, aibės

$$\Gamma(x_1) = \{x_j : \; x_1 x_j \in E\} \qquad \Gamma^+(x_l) = \{x_{i+1} : \; x_i x_l \in E\}$$

yra nesikertantys $\{x_2, ..., x_l\}$ poaibiai. Todėl

$$k \leq deg(x_1) + deg(x_l) \leq l-1 \leq n-1.$$

Kai $k = n$, tai prieštarautų mūsų prielaidai, kad G nėra Hamiltono grafas. Tuo pirmasis teoremos teiginys įrodytas.

Kai $k < n$, jau turime P taką $l - 1 \geq k$ ilgio. Tai yra antrasis tvirtinimas.

Ieškokime ilgo ciklo. Tegu $deg(x_1) \geq deg(x_l)$. Tada $deg(x_1) \geq k/2$. Be to,

$$t := \max\{i : \ x_1 x_i \in E\} \geq deg(x_1) + 1 \geq k/2 + 1.$$

Kadangi $x_1 ... x_t x_1$ sudaro ciklą, ir trečiasis teiginys įrodytas.

4 teorema. *Tegu G - $n \geq 3$ eilės grafas, neturintis $k \geq 1$ ilgio neuždaro tako. Tada grafo didumas*

$$m \leq \frac{(k-1)n}{2}.$$

Grafas yra ekstremalusis tada ir tik tada, kada kiekviena jo komponentė yra yra pilnasis k eilės grafas.

Įrodymas. Taikome matematinę indukciją n atžvilgiu. Jei $n \leq k$, teiginys akivaizdus, kadangi net pilnasis grafas turi tik $n(n-1)/2$ briaunų.

Jei G grafas nėra jungusis, pritaikome indukcijos prielaidą kiekvienai iš jungumo klasių. Ekstremalųjį grafą gausime, kai kiekviena iš šių komponenčių yra K^k grafai.

Tarkime, kad G yra jungus, $n > k$ ir teiginys teisingas mažesnės eilės grafams. Jei $n \geq 3$, pagal 3 teoremą egzistuoja viršūnė x su $deg(x) \leq (k-1)/2$. Nei G grafas, nei $G - x$ neturi K^k pilnojo pografio. Priešingu atveju, rastume k ilgio taką. Kadangi $G - x$ neeekstremalus grafas, jo $m(G - x)$ didumas mažesnis už (k-1)(n-1)/2. Todėl

$$m =\leq deg(x) + m(G - x) < (k-1)/2 + (k-1)(n-1)/2 = (k-1)n/2.$$

4 teorema įrodyta.

17. Pilnųjų pografių egzistavimas

Išreiškime žinomą faktą, jog šešių studentų draugijoje visada egzistuoja trejetas, kurie pažįsta vienas kitą arba nei vienas nepažįsta kito, grafų teorijos terminais. Vaizduokime studentus šeštos eilės grafo viršūnėmis ir junkime briauna viršūnes, jei atitinkami studentai pažinojo vienas kitą. Šalia nubrėžkime **grafo papildinį**, t.y., grafą su šešiomis viršūnėmis, kurios sujungtos briaunomis, jei atitinkami studentai nepažinojo vienas kito. Uždėjus abu grafus vieną ant kito, gautume pilnąjį K^6 grafą. Taigi, minėtas faktas teigia, kad bet kaip perskyrus pilnojo grafo briaunas į dvi dalis (pvz., nudažius jas dviem skirtingomis spalvomis), arba viename, arba kitame pografyje bus pilnasis K^3 pografis. Deja, penkių studentų draugija tokios savybės jau nebeturi.

Apibendrinant galime kelti klausimą, koks turi būti n, kad G grafe būtų K^s pilnasis pografis arba jo papildinyje $\bar{G}$ iki pilnojo grafo būtų K^t pilnasis pografis. Mažiausias toks n, žymimas $R(s, t)$, vadinamas **Ramsey'io skaičiumi**. Aišku, kad tikslinga apsiriboti grafais, turinčiais bent vieną briauną, todėl ateityje laikysime, kad $s, t \geq 2$. Pastebėkime, kad

$$R(s, t) = R(t, s), \quad s, t \geq 2,$$

o

$$R(s, 2) = R(2, s) = s, \quad s \geq 2.$$

Iš tiesų, dažant K^s grafo briaunas juodai ir baltai, arba visos briaunos bus juodos, arba bent viena balta.

Ramsey'io teorema (1928). *Kai $s,t > 2$, teisinga nelygybė*

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

Be to, kai $s,t \geq 2$,

$$R(s,t) \leq \binom{r+s-2}{s-1}.$$

Įrodymas. Pirmąją nelygybę įrodinėjant, galime laikyti, kad dešinėje esantys dėmenys yra baigtiniai. Tegu $n := R(s-1,t) + R(s,t-1) =: n_1 + n_2$. Dažykime K^n grafo briaunas juodai ir baltai. Reikia rasti juodai nudažytą pografį K^s arba baltą pografį K^t.

Fiksuokime K^n viršūnę x. Jos laipsnis $deg(x) = n-1 = n_1+n_2-1$. Todėl ši viršūnė yra incidenti nemažiau negu n_1 juodų briaunų arba – nemažiau negu n_2 baltų briaunų. Simetriškumo dėka galime teigti, kad yra teisingas pirmasis atvejis. Nagrinėkime pilnąjį K^{n_1} grafą, kurio viršūnės yra incidentinės x ir kurias su x jungia juodos briaunos. Jei K^{n_1} turi baltą K^t pografį, tai pirmoji nelygybė įrodyta.

Priešingu atveju, pagal pažymėjimą $n_1 = R(s-1,t)$, pilnasis K^{n_1} grafas turi juodą K^{s-1} pilnąjį pografį, kuris kartu su x ir juodosiomis briaunomis, incidenčiomis x, sudaro pilnąjį pografį K^s. Pirmoji teoremos nelygybė įrodyta.

Antrąją teoremos nelygybę įrodome matematinės indukcijos metodu. Kaip esame pastebėję, kai $s = 2$ arba $t = 2$, antroji nelygybė virsta lygybe. Tarkime, kad $s,t > 2$, o $s',t' \geq 2$ kita pora natūralių skaičių, $s'+r' < s+t$, kuriai antroji teoremos nelygybė jau yra teisinga pagal indukcinę prielaidą. Iš anksčiau įrodytos nelygybės išplaukia

$$\begin{aligned} R(s,t) &\leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \leq \\ &\leq \binom{t+s-3}{s-2} + \binom{t+s-3}{s-1} = \binom{t+s-2}{s-1}. \end{aligned}$$

Teorema įrodyta.

Ramsey'io skaičių įvertinimas iš apačios - žymiai sudėtingesnė problema.

16. Kitų vienspalvių pografių egzistavimas.

Apibendrinkime praeitame skyrelyje spręstą uždavinį. Tegu H_1, H_2 – bet kokie grafai. Kada nuspalvinus pilnojo K^n grafo briaunas juodai ir baltai, jame rasime juodą H_1 pografį arba baltą H_2 pografį ? Grubų n įvertį iš apačios duoda jau turėta medžiaga. Kadangi H_i, tarkim, s_i eilių grafai gali būti papildyti iki pilnųjų K^{s_i} grafų , o jų egzistavimą jau ištyrėme, tai suformuluoto uždavinio teigiamas atsakymas bus, jei

$$n \geq R(s_1, s_2).$$

Atskirais atvejais, žinant H_i savybių, galima gauti geresnius įverčius.

Apibendrintuoju Ramsey'io skaičiumi $r(H_1, H_2)$ vadinamas mažiausias natūralus skaičius n toks, kad bet kaip juoda ir balta spalvomis spalvinant K^n briaunas, šiame grafe rasime juodą pografį H_1 arba baltą pografį H_2. Palyginę su anksčiau turėtu Ramsey'io skaičiumi, matome, jog

$$r(K^{s_1}, K^{s_2}) = R(s_1, s_2).$$

Iš apibendrinto Rasey'io skaičiaus apibrėžimo išplaukia, kad egzistuoja $r(H_1, H_2) - 1$ eilės G grafas toks, kad $H_1 \not\subset G$ ir $H_2 \not\subset \bar{G}$. Įrodysime porą teiginių, iš kurių matysis apibendrintų Ramsey'io skaičių kitimas, keičiant grafus H_i.

1 teorema. *Tegu T – t eilės medis, $s, t \geq 2$. Tada*

$$r(K^s, T) \geq (s-1)(t-1) + 1.$$

Įrodymas. Nagrinėkime $(s-1)K^{t-1}$ grafą, t.y., $(s-1)$-o K^{t-1} grafo sąjungą. Jame nėra T medžio. Jo papildinys iki pilnojo $(s-1)(t-1)$ eilės grafo yra $(s-1)$-dalis grafas, kurio kiekviena viršūnių aibė turi po $t-1$ elementą. Jis neturi K^s savo pografiu. Todėl

$$r(K^s, T) \geq (s-1)(t-1) + 1.$$

Teorema įrodyta.

Galima būtų įrodyti, kad teoremos teiginys yra teisingas, nelygybę pakeitus lygybe. Specialiu atveju panagrinėkime galimą $r(H_1, H_2)$ didėjimą, kai pografių H_i eilės didėja.

Lema. *Teisinga nelygybė*

$$r(G, H_1 \cup H_2) \leq \max\{r(G, H_1) + |H_2|,\ r(G, H_2)\}. \tag{1}$$

Čia $|H|$ – poggrafio eilė.

Įrodymas. Dešinėje (1) nelygybės pusėje esantį dydį pažymėkime n ir nagrinėkime K^n. Jei šio grafo kažkoks nuspalvinimas juoda ir balta spalva duoda juodą G pografį, nelygybė įrodyta. Jeigu ne, tai iš nelygybės

$$n \geq r(G, H_2)$$

išplaukia, jog egzistuoja baltas H_2. Toliau nagrinėkime $K^n - H_2$ grafą. Iš nelygybės

$$n - |H_2| \geq r(G, H_1)$$

matome, kad pastarasis grafas turi baltą H_1. Vadinasi, pilnasis K^n grafas turi baltą $H_1 \cup H_2$ pografį.

Lema įrodyta.

Išvada. *Su bet kokiu $s \geq 1$ teisinga nelygybė*

$$r(H_1, sH_2) \leq r(H_1, H_2) + (s-1)|H_2|.$$

Įrodymas matematinės indukcijos metodu. Įsitikinkite tuo!

2 teorema. *Jei $s \geq t \geq 1$, tai*

$$r(sK^2, tK^2) = 2s + t - 1.$$

Įrodymą pradėkime pastaba. Atkreipkime dėmesį, kad K^2 grafas – tiesiog viena briauna, o sK^2 – s negretimų (nepriklausomų) briaunų. Teorema teigia, kad tam, kad bet kokiame n eilės G grafe būtų s nepriklausomų briaunų, arba jo papildinyje jų būtų t, yra būtina ir pakankama nelygybė $n \geq 2s + t - 1$.

Surasime $2s + t - 2$ eilės G grafą, kuris neturi šios savybės. Imkime

$$G = K^{2s-1} \cup E^{t-1}.$$

Jis neturi s nepriklausomų briaunų. Jo papildinys lygus

$$\bar{G} = E^{2s-1} + K^{t-1}.$$

Prisimenant grafų sumos apibrėžimą, atkreipkime dėmesį, kad visos E^{2s-1} viršūnės yra sujungtos briaunomis su visomis K^{t-1} viršūnėmis. Bet viršūnių skaičius yra nedidelis, todėl ir $\bar{G}$ neturi $t-1$ nepriklausomos briaunos. Taigi,

$$r(sK^2, tK^2) \geq (2s - 1) + (t - 1) = 2s + t - 1 \tag{2}$$

ir įvertinys iš apačios arba minėtos sąlygos būtinumas įrodytas.

Įvertinimas iš viršaus remiasi tuo, kad

$$r(sK^2, K^2) = 2s$$

ir nelygybe

$$r((s+1)K^2, (t+1)K^2) \leq r(sK^2, tK^2) + 3, \tag{3}$$

kurios įrodymą pateiksime vėliau.

Turėdami (3), galime pritaikyti indukciją ir gauti

$$\begin{aligned} r((s+1)K^2, (t+1)K^2) &\leq r(sK^2, tK^2) + 3 \leq \\ &\leq r((s-1)K^2, (t-1)K^2) + 6 \leq \\ &\leq r((s-t+1)K^2, K^2) + 3t = 2(s-t+1) + 3t = 2s + t + 2. \end{aligned}$$

Tuo įvertinys iš viršaus yra įrodytas.

Grįžtame prie (3) nelygybės įrodymo. Tegu n - natūralus skaičius, esantis dešinėje jos pusėje. Pasinaudoję (2) matome, jog $n \geq 2s + t - 1 + 3 = 2(s+1) + t$. Nagrinėkime n eilės G grafus.

Jei $G = K^n$, tai jis turi $s+1$ nepriklausomą briauną, nes $s + 1 \leq n/2$. Jei $G = E^n$, tai juo labiau jo papildinys, lygys K^n, jų turi $t+1$.

Jeigu G nėra nei pilnas, nei tuščias grafas, tai egzistuoja trys viršūnės x, y, z tokios, kad $xy \in E(G)$ ir $xz \in E(\bar{G})$. Grafe $G - \{x, y, z\}$ yra $n - 3 = r(sK^2, tK^2)$ viršūnių. Pagal apibendrintojo Ramsey'io skaičiaus apibrėžimą, arba jame yra s nepriklausomų briaunų, arba jo papildinyje jų yra t. Pirmuoju atveju pridėjus xy, o antruoju atveju – xz, gauname, kad arba pats G turi $s + 1$ nepriklausomų briaunų arba jo papildinyje jų yra $t + 1$. Iš čia išplaukia (2) nelygybė.

2 teorema įrodyta.

Panašiu būdu galima įrodyti, jog

$$r(sK^3, tK^3) = 3s + 2t,$$

jei tik $s \geq t \geq 1, \ s \geq 2$.

17. Grafo viršūnių spalvinimas.

Išreiškime grafų teorijos terminais tokį uždavinį. Reikia sudaryti laisvai pasirenkamų paskaitų tvarkaraštį, kuris užimtų mažiausiai laiko, bet kad kiekvienas studentas galėtų išklausyti kiekvieną jį dominančią paskaitą. Paskaitų, skaitymas lygiagrečiose auditorijose neribojamas.

Tegu paskaitos žymi grafo viršūnes. Dvi viršūnes junkime briauna, jei atsiras bent du studentai, norintys išklausyti abi šias paskaitas. Aišku, kad tokios paskaitos turi būti skaitomos skirtingu laiku. Vaizdumo dėlei šias viršūnes nuspalvokime skirtingomis spalvomis. Tuo būdu grafo viršūnių aibė išsiskaido į $V_1, ..., V_k$ poaibius viršūnių, turinčių vienodą spalvą. Vieno poaibio paskaitos gali būti skaitomos vienu laiku skirtingose auditorijose, tačiau skirtingų poaibių paskaitos - tik kitu laiku. Skaičius k parodys bendrą visų paskaitų trukmę. Viršuje suformuluota užduotis reikalauja minimizuoti šį k.

Bendra grafo viršūnių spalvinimo problema formuluojama panašiai. Kiek reikia skirtingų spalvų nudažyti G grafo viršūnėms, kad gretimosios viršūnės būtų skirtingų spalvų? Minimalus spalvų kiekis $\chi(G)$ vadinamas **chromačiuoju grafo skaičiumi**. Formalizuojant spalvinimą galėtume išreikšti atvaizdžių terminais. Reiktų spalvas sužymėti skaičiais $1, ..., k$ ir ieškoti atvaizdžio $c : V \to \{1, ..., k\}$ tokio, kad viršūnių aibės $c^{-1}(i)$ poaibis būtų nepriklausomas, t.y., bet kokių dviejų jo viršūnių nejungtų briauna. Chromatusis skaičius $\chi(G)$ priklauso nuo grafo struktūros. Bet kokios eilės tuščiajam grafui jis lygus vienam, n eilės pilnajam grafui jis lygus n, o n eilės T medžiui $\chi(T) = 2$.

Grafo spalvinimą galima atlikti naudojant **"godųjį"** algoritmą. Juo remiantis, pakanka sunumeruoti viršūnes ir spalvas, sakykime $x_1, ..., x_n$ bei $c_1, ..., c_n$. Tiek spalvų tikrai pakaks! Dažymą pradedame x_1, tada dažome x_2 ta pačia spalva, jei x_1 nėra gretima x_2, ir – kita spalva, jei jos yra gretimos. Nudažius i viršūnę, sekančią x_{i+1} dažome spalva su mažiausiu galimu indeksu taip, kad anksčiau nudažytos ir gretimos su x_{i+1} būtų skirtingų spalvų.

Išnagrinėkime $G(V, E)$ grafą su $V = \{x_1, ..., x_8\}$ ir

$$E = \{x_1x_4, \ x_1x_6, \ x_1x_8, \ \ x_2x_3, \ x_2x_5, \ x_2x_7, \ \ x_3x_6, \ x_3x_8, \ \ x_4x_5, \ x_4x_7, \ \ x_5x_8, \ \ x_6x_7\}.$$

Godusis algoritmas reikalauja 4 spalvų, tačiau tai - dvidalis grafas, todėl jis yra dvispalvis. Algoritmą galima pataisyti, kitaip sunumeruojant viršūnes. Vieną iš geresnių numeracijos būdų gautume iš žemiau pateikiamos teoremos įrodymo.

$G = G(V,E)$ grafo **generuotuoju pografiu** vadinsime pografį $G = G(V', E')$, $V' \subset V$, $E' \subset E$, tokį, kad į briaunų E' poaibį patenka visos E briaunos, jungiančios viršūnes iš V'. Šis poaibis viršūnių ir jas jungiančių E briaunų poaibis nusako generuotąjį pografį. Todėl jį galime žymėti $G[V']$. Pografis $G - \{x_1, ..., x_s\}$ yra generuotasis su bet kokiomis viršūnėmis $x_1, ...x_s \in V$. Jam $V' = V \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}$.

1 teorema. *Tegu $\delta(H)$ yra minimalus pografio Hlaipsnis, $k = \max_H \delta(H)$, čia maksimumas imamas pagal visus G grafo generuotus pografius. Tada $\chi(G) \leq k + 1$.*

Įrodymas. Egzistuoja x_n viršūnė su $deg(x_n) \leq k$. Pažymėkime $H_{n-1} = G - \{x_n\}$. Šiame pografyje irgi yra x_{n-1} viršūnė, kurios laipsnis neviršija k. Toliau imkime $H_{n-2} = G - \{x_n, x_{n-1}\}$ ir x_{n-2} viršūnę jame. Po n žingsnių gauname viršūnių numeraciją.

Pastebėkime, kad x_j turi ne daugiau negu k gretimų jai viršūnių iš $\{x_1, ..., x_{j-1}\}$. Panaudojus joms dažyti k spalvų dar turime rezerve vieną dėl x_j. Todėl $k + 1$ spalvos ir pakanka.

1 teorema įrodyta.

Išvada. *Jei $\Delta = \Delta(G)$ - maksimalus G grafo laipsnis, tai $\chi(G) \leq \Delta + 1$.*

Patikslinkime šią išvadą.

2 teorema (R.L.Brooks, 1941). *Tegu G - jungus, nepilnas ir nesutampantis su nelyginio ilgio ciklu grafas, o $\Delta = \Delta(G)$ - maksimalus laipsnis. Tada $\chi(G) \leq \Delta$.*

Įrodymas. Jei $\Delta \leq 2$, grafas yra takas ar ciklas. Jo nudažymui pakanka 2 spalvų. toliau taikome matematinę indukciją n atžvilgiu. Mažiems n teiginys yra betarpiškai patikrinamas. Naujų briaunų įvedimas tik pasunkina užduotį, todėl gr-afą galima papildyti iki Δ reguliaraus grafo. Jame visų viršūnių laipsniai bus Δ. Kadangi grafas nėra pilnas, tai $\Delta < n - 1$.

Pagal indukcijos prielaidą $G - \{x\}$ yra Δ spalvis. Raskime "atliekamą" spalvą nudažyti x viršūnei. Jei $v_1, ..., v_\Delta$ gretimos jai viršūnės ir joms nudažyti pakako $\Delta - 1$ spalvos, galime panaudoti atlikusią spalvą.

Tarkime toliau, kad $v_1, ..., v_\Delta$ – skirtingų $c_1, ..., c_\Delta$ spalvų viršūnės. Tegu H_{ij} – grafo generuotas pografis, kurio viršūnės nudažytos c_i ir c_j spalvomis, $1 \leq i < j \leq \Delta$. Jei v_i ir v_j yra skirtingose H_{ij} pografio jungumo klasėse, tai vienos iš šių klasių viršūnes galime perdažyti priešinga spalva (c_i ar c_j) negu kad buvo. Tada v_i ir v_j taps vienspalvėmis. Kaip jau buvome pastebėję, tada lieka viena spalva nudažyti x viršūnei.

Lieka atvejis, kad v_i ir v_j yra vienoje H_{ij} jungumo C_{ij} klasėje ir yra skirtingų spalvų. Tarkim, kad spalvų indeksai sutampa su v_i ir v_j indeksais. Šias viršūnes jungia takas, kurio tarpinės viršūnės paeiliui turi spalvas c_i ar c_j. Jei v_i turėtų dvi gretimas viršūnes, kurių spalvos būtų c_j, tai jos kitos kaimynės neužimtų kažkokios spalvos $c_k \neq c_i$. Tada galėtume v_i perdažyti c_k spalva, palikdami c_i dėl x.

Panašiai pasielkime ir tuo atveju, kai egzistuoja $w \in C_{ij}$ šalia $v_i v_j$ tako. Jei u - viršūnė ant tako ir gretima w, tai w spalva ir dar vienos viršūnės ant tako spalva sutampa. Taigi, u kaimynės sutaupo vieną iš spalvų, nelygių u spalvai, kuri yra c_i ar c_j. Perdažius u sutaupytąja spalva, nutraukiamas $v_i v_j$ takas ir vėl sugrįžtama į jau išnagrinėtą atvejį, kada v_i ir v_j buvo skirtingose jungumo klasėse.

Dabar jau lieka atvejis, kai C_{ij} yra $v_i v_j$ takas. Nagrinėkime kitą taką C_{jl}, $l \neq i$. Jei jie persikerta viršūnėje $u \neq v_j$, taip pat c_j spalvos, tai tarp u gretimų viršūnių yra dvi c_i spalvos ir dvi c_l spalvos, todėl atsiras atliekama spalva jos perspalvojimui, taip nutraukiant takus. Ir vėl turėtume jau išnagrinėtą atvejį.

Taigi, turime tik takus C_{ij} ir C_{jl}, turinčius bendrą tašką v_j, $1 \leq i < j < l \leq \Delta$. Grafas G nėra pilnas, tai bent vienas takas turi bent tris viršūnes. Tegu $w \neq v_i, v_j$ ir priklauso v_iv_j takui. Tarkime w spalva yra c_j. C_{il} tako viršūnes galime perdažyti priešingai, naudojant šio tako c_i ir c_l spalvas ir nesugadinant mūsų susitaimo, jog gretimos viršūnės turi turėti skirtingas spalvas. Tą atlikę matome, jog w viršūnė yra ir v_iv_j take, ir v_lv_j take, kas prieštarauja mūsų takų atskyrimo susitarimui.

Brooks'o teorema įrodyta.

Kai grafo viršūnių laipsniai artimi, pvz., grafas yra reguliarus, ši teorema duoda tikslų chromačiojo skaičiaus įvertį. Tačiau **žvaigždiniam grafui**, kai visos briaunos išvestos iš vienos viršūnės, ji labai netiksli.

Pabandysime atsakyti į klausimą, keliais būdais galima nuspalvinti grafo viršūnes turint $1, ..., x$ spalvas. Dabar x – patogus kintamojo žymuo. Pažymėkime $p_G(x)$ spalvinimo variantų kiekį. Aišku, $p_G(x) = 0$, kai $x < \chi(G)$. Koks yra $p_G(x)$ augimas, kai x didėja, ir be to, yra žinomos kitos grafo charakteristikos.

Lema. *Tarkime, kad G – netuščias grafas ir $G' = G - e$, $e \in E$, o G'' – grafas, gautas iš G, sutraukiant e. Tada*

$$p_G(x) = p_{G'}(x) - p_{G''}(x).$$

Įrodymas. Tegu $e = uv$. Visi G' grafo viršūnių nuspalvinimai, kai u ir v yra skirtingų spalvų, sutampa su G nuspalvinimais. Jų kiekis lygus $p_G(x)$. Toliau, G' grafo nuspalvinimai, kai u ir v yra vienos spalvos, sutampa su visais galimais G'' nuspalvinimais. Šis kiekis lygus $p_{G''}(x)$. Iš šių pastabų išplaukia lemos tvirtinimas.

3 teorema. *Tarkime, kad G grafo eilė yra $n \geq 1$, didumas – $m \geq 0$, o $k \geq 1$ – jo jungių komponenčių kiekis. Tada*

$$p_G(x) = x^n - mx^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-k} (-1)^i a_i x^{n-i}.$$

Čia $a_i > 0$, kai $2 \leq i \leq n - k$.

Įrodymas. Šįkart matematinė indukcija taikoma $n + m$ atžvilgiu. Jei ši suma lygi 1, tai turime tuščią pirmos eilės grafą. Jo vieną viršūnę galime spalvinti x būdų. Jei $m = 0$, tai $n = k$, ir yra x^n spalvinimo variantų.

Tarkime, kad teiginys teisingas bet kokiam grafui su mažesne negu $n + m$ eilės ir didumo suma. Turėdami netuščią G grafą, ir $uv \in E$, nagrinėkime lemoje apibrėžtus grafus G', bei G'', kurių didumai lygūs $m - 1$. Jiems galioja indukcinė prielaida, todėl

(1) $$p_{G'}(x) = x^n - (m-1)x^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-k'} (-1)^i b_i x^{n-i}.$$

Čia k' - G' grafo jungumo klasių skaičius, $k' \geq k$; $b_i > 0$.

Pastebėkime, kad G'' grafo eilė yra $n-1$. Todėl indukcinės prielaidos išvada yra lygybė

$$p_{G''}(x) = x^{n-1} - (m-1)x^{n-2} + \sum_{i=2}^{n-1-k} (-1)^i c_i x^{n-1-i}. \tag{2}$$

Kadangi $k' \geq k$, tai (1) lygybę galime papildyti nuliniais dėmenimis, o tada iš (1) atimti (2). Tuo būdu, iš lemos gauname 3 teoremos teiginį.

Polinomas $p_G(x)$ vadinamas **chromačiuoju grafo polinomu**.

18. Grafo briaunų spalvinimas.

Atsakykime į klausimą, kiek reikia spalvų, kad gretimos briaunos būtų nudažytos skirtingai. Minimalus spalvų kiekis – **grafo briaunų chromatusis skaičius** arba **chromatusis indeksas**. Jį žymėkime $\chi'(G)$. Iš karto matyti, kad $\chi'(G) \geq \Delta(G) := \Delta$. Čia kaip ir anksčiau $\Delta(G)$ – maksimalus grafo laipsnis. Dvidalių grafų atveju šis įvertinys yra tikslus. Įsitikinkite tuo! Nagrinėkime pilną K^n grafą.

1 teorema. *Jei n – nelyginis natūralus skaičius, tai $\chi'(K^n) = n$. Jei n – lyginis, tai $\chi'(K^n) = n-1$.*

Įrodymas. Nelyginio n atveju K^n galime įsivaizduoti, kaip taisyklingą n kampį, kurio visos viršūnės yra sujungtos tarpusavyje. Nuspalvinkime išorines briaunas, panaudodami visas leistinas n spalvas. Įsižiūrėję pastebime, kad bet kokia vidinė briauna yra lygiagreti vienai negretimai jai išorinei briaunai. Tad ir vidinę briauną nudažykime ta pačia spalva. Vadinasi, pakanka n spalvų. O gal pakaktų $(n-1)$-os? Pakanka pastebėti, kad viena spalva nudažytų briaunų kiekis negali viršyti $(n-1)/2$. Iš tiesų, kiekvienai nudažytai briaunai tenka pora viršūnių, ir kitai ta spalva nudažytai briaunai turi tekti kita pora viršūnių. Vadinasi, viena spalva nudažytų briaunų kiekis, padaugintas iš 2, neturi viršyti n. Kadangi šis skaičius yra nelyginis, gauname minėtą nelygybę. Taigi, $\chi'(K^n) = n$.

Tegu dabar n – lyginis skaičius. K^n grafą pavaizduokime, kaip $K^{n-1} + x_n$ su $x_n \notin V(K^{n-1})$. Iš K^{n-1} grafo x_j viršūnės išeina tik $n-2$ skirtingų spalvų briaunų, todėl viena spalva iš leistinų $n-1$ yra sutaupoma. Jei tai c_j spalva, tai briauną $x_n x_j$ ir nudažykime ja. Taigi $n-1$ spalvos pakanka. Prisiminę, jog $\chi'(K^n) \geq \Delta = n-1$, baigiame įrodymą.

Atkreipkime dėmesį, kad įrodant 1 teoremą, buvo galima panaudoti ir K^n skaidymą Hamiltono takais ar ciklais, neturinčiais bendrų briaunų. Išnagrinėti pavyzdžiai rodo, kad briaunų chromatusis skaičius nedaug skiriasi nuo maksimalaus laipsnio.

2 teorema (V.G.Vizing, 1964). $\Delta := \Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Įrodymas. Tarkime, kad mums jau pavyko nuspalvinti visas, išskyrus vieną, grafo briaunas ir panaudojome $\Delta + 1$ spalvą. Ieškome galimybių nuspalvinti likusią briauną.

Sakykime, kad spalva c sutaupoma viršūnėje x, jei visos briaunos, incidenčios x, jau nudažytos kitomis, negu x, spalvomis. Kadangi x yra incidenti $deg(x) \leq \Delta$ briaunų, tai visada viena iš $\Delta + 1$ spalvų yra sutaupoma. Reikia dažymą atlikti taip, kad nenuspalvintos briaunos abu galai sutaupytų tą pačią spalvą. O tada ja nudažyti ir pačią briauną.

Tarkime xy_1 yra nenudažytoji briauna, o $c - x$ viršūnėje sutaupyta spalva. Konstruokime seką briaunų $xy_1, xy_2, ...$ ir seką spalvų $t_1, t_2, ...$ taip, kad t_j spalva būtų sutaupyta y_j viršūnėje, o xy_{j+1} briauna būtų nuspalvinta t_j spalva. Tarkime, jau parinkome i sekų narių, t_i spalva yra sutaupyta viršūnėje y_i. Iš x gali išeiti tik viena t_i spalvos briauna xy. Jei $y \notin \{y_1, ..., y_i\}$, tai, aišku, imtume $y_{i+1} = y$ ir t_{i+1} pažymėtume spalvą, sutaupytą y viršūnėje. Jei y jau buvo patekusi tarp pirmųjų y_j, $1 \leq j \leq i$, tai sekų rinkimą nutraukiame. Taip pat pasielgiame, ir kai iš viso nėra t_i spalvos briaunos xy. Taigi pabaigę išrinkimą, turime seką briaunų

$$xy_1,\ xy_2, ..., xy_h$$

ir spalvų seką

$$t_1,\ t_2, ..., t_h$$

su minėtomis savybėmis. Aišku, $h \leq \Delta$.

Nagrinėsime įvairius atvejus, nulėmusius posekių rinkimo sustabdymą.

1) Tegu t_h spalva nebuvo panaudota dažant xy briaunas ir tai lėmė rinkimo proceso nutraukimą. Šiuo atveju xy_1 nudažykime t_1 spalva, xy_j, $2 \leq j < h$, perdažykime t_j spalva, o $xy_h - t_h$ spalva. Tuo užsibrėžtą tikslą pasiekėme.

2) Tegu t_h spalvą turėjo briauna, xy_j, $2 \leq j < h$. Dabar vėl xy_1 nudažome t_1 spalva, $xy_i - t_i$ spalva, $2 \leq i < j$, o xy_j briauną paliekame nenuspalvintą. Pažymėkime $H(c, t_h)$ pografį, generuotą c ir t_h spalvų briaunų. Jo viršūnių laipsniai neviršija 2. Taigi $H(c, t_h)$ jungiosios komponentės yra tik ciklai arba takai. x viršūnės laipsnis šiame pografyje lygus vienam, nes tik briauna xy_{j-1}, dabar t_h spalvos, priklauso jam. Taip pat y_j laipsnis neviršija 1, nes ji nėra incidenti t_h spalvos briaunai. Taip pat viršūnė y_h nėra incidenti t_h spalvos briaunai. Vadinasi, šiame pografyje visos trys nagrinėjamos viršūnės negali prikalusyti vienai jungumo klasei ir turime atvejus:

a) x ir y_j priklauso skirtingoms $H(c, t_h)$ jungumo komponentėms. Klasėje, kurioje yra y_j, perkeiskime spalvas priešingomis. Tai nesugadina spalvinimo reikalavimo, kad gretimos briaunos būtų skirtingų spalvų. Gauname, kad x ir y_j viršūnės turi tą pačią sutaupytą c spalvą. Ja ir nudažome xy_j.

b) x ir y_h priklauso skirtingoms $H(c, t_h)$ jungumo komponentėms. Dabar ankstesnį perdažymą pratęskime iki $h - 1$ briaunos, t.y., nuspalvindami xy_i t_i spalva, $1 \leq i < h$, o xy_h palikdami bespalvę. Šiam spalvinimui nenaudojamos c ir t_h spalvos. Vadinasi pografis $H(c, t_h)$ nepakinta. Dabar jungumo klasėje, kurioje yra y_h perkeiskime spalvas. Gausime, kad c spalva yra sutaupyta x bei y_h viršūnėse. Nudažę šia spalva xy_h, baigiame teoremos įrodymą.

Teoremos įrodymas buvo konstruktyvus, jį galima naudoti kaip algoritmą dažant grafo briaunas $\Delta + 1$ spalvomis.

Grafo briaunų spalvinimas rišasi ir su jo viršūnių spalvinimu. Tą rodo ir sekanti teorema.

3 teorema. *Keturių spalvų teorema yra ekvivalenti teiginiui, kad $\chi'(G) = 3$ kiekvienam kubiniam G grafui.*

Įrodymas. Prdžioje pastebėkime, kad spalvinant žemėlapius, pakanka apsiriboti kubiniu atveju. Pagal apibrėžimą tokio žemėlapio kiekviena viršūnė turi laipsnį lygų 3. Iš tiesų, bet kokio žemėlapio antrojo laipsnio viršūnė valstybių spalvinimui įtakos neturi, nes jai incidenčios briaunos neapriboja valstybės. Kai viršūnės laipsnis yra nemažesnis už 4, apie kiekvieną iš jų, tegu x su $\delta(x) \geq 4$, galime apvesti mažą δ kampį, kurio viduje yra tik ši viršūnė. "Išvalykime" šių daugiakampių vidus. Gauname kubinį žemėlapį su didesniu skaičiumi valstybių. Jei jį mokame nudažyti, tą ir atlikime. Po to sutraukime išvestuosius daugiakampius į anksčiau turėtas viršūnes išlaikydami dažymą.

Tarkime, jog turime kubinio žemėlapio veidų nuspalvinimą naudojant spalvas užkoduotas simboliais

$$\alpha = (1, 0), \quad \beta = (0, 1), \quad \gamma = (1, 1), \quad \delta = (0, 0).$$

Jei e briauna yra tarp veidų, nudažytų c, t iš nurodytų spalvų, tai e spalvinkim spalva, kurios žymuo būtų $c + t(mod 2)$. Aišku, δ spalva nepasirodys šitame briaunų dažyme. Gavome kubinio grafo briaunų spalvinimą trimis spalvomis.

Atvirkščiai, jei turime kubinio grafo nudažymą trimis spalvomis α, β, γ, tai jo pografių, generuotų briaunų, turinčių spalvas α ir β, veidus galime nuspalvinti dviem spalvom. Tai duoda šių veidų pažymėjimą 0 ir 1. Toliau taip dažykim pografio, generuoto α ir γ spalvų briaunų veidus. Ir vėl turime veidų žymenis 0 ir 1. Sujungę abu žymenis, galime duoto kubinio grafo veidus sužymėti pora (.,.) iš nulių ir vienetų. Prisiminę mūsų spalvų kodus, gauname kubinio žemėlapio keturspalvį nudažymą.

3 teorema įrodyta.

Iliustruokite pavyzdžiais.

Jei grafas nėra reguliarus, chromačiojo briaunų skaičiaus ieškojimas yra sunki problema, net plokščių grafų atveju. Štai vienas iš neatsakytų aktualių klausimų:

Hipotezė. *Bet kokio plokščio grafo su maksimaliuoju laipsniu $\Delta \geq 6$ chromatusis briaunų skaičius lygus Δ.*

Egzistuoja plokšti grafai su $\Delta 2, 3, 4, 5$, kuriems $\chi'(G) = \Delta + 1$. Tačiau V.G.Vizing'as 1965 mmetais įrodė hipotezės teiginį, kai $\Delta \geq 8$.

19. Grafo stabilieji poaibiai.

Pradėkime nuo uždavinio:

Ar galima šachmatų lentoje išdėstyti aštuonias valdoves, kad jos nekirstų viena kitos?

1854 metais C.F.Gauss'as jis pateikė 40 tokio išdėstymo būdų, nors pradžioje jis tikėjo jų esant 76. Iš tiesų, minėtų valdovių išdėstymo galimybių yra 92.

Panaši problema, tačiau turinti neigiamą atsakymą, yra tokia:

Ar galima 64 šachmatų lentos langelius padengti plokštelėmis, jų nekarpant ir neužkeičiant, jei turime vieną kvadratinę, turinčią 4 langelius 2×2, *plokštelę ir 15 vienodų plokštelių, sudarytų iš keturių langelių, "su užlenktu galu", t.y., paskutinis langelis yra prijungtas prie trečiojo šono* ?

Abu šiuos uždavinius galima interpretuoti grafų teorijos terminais. Tegu $G = G(V, E)$ – grafas. Poaibis $S \subset V$ yra vadinamas **stabiliuoju**, jeigu bet kokios dvi viršūnės $x, y \in S$ yra negretimos. Pažymėkime $\mathcal{S}$ visų stabilių poaibių aibę. Aišku, $\emptyset \in \mathcal{S}$, be to, jei $S_1 \subset S$ ir $S \in \mathcal{S}$, tai ir $S_1 \in \mathcal{S}$. Grafo **stabiliuoju skaičiumi** vadinamas dydis

$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathcal{S}} |S|,$$

o S su savybe $|S| = \alpha(G)|$ vadinamas **maksimaliuoju stabiliu poaibiu**.

Tegu šachmatų lentos langeliai žymi grafo viršūnes, o jo briaunos jungia viršūnes, esančias vienoje eilutėje, stulpelyje ar įstrižainėje. Dabar matome, kad pirmasis uždavinys reikalauja rasti aštuonių langelių stabilų poaibį. Jis bus maksimalus. Antrąjį uždavinį panagrinėkite savarankiškai.

Poaibis $C \subset V$ vadinamas G grafo **klika**, jeigu bet kurios dvi skirtingos, jei tokių yra, šio poaibio viršūnės yra gretimos. Izoliuota viršūnė sudaro vieno elemento kliką, tuščio grafo klikos turės tik po vieną elementą. Visada V galima išskaidyti klikų sąjunga. Jei

$$V = C_1 \cup ... \cup C_k -$$

tokia klikų aibė, tai žymėsime

$$\mathcal{C} = (C_1, ..., C_k)$$

ir sakysime, kad V yra išskaidyta klikomis $\mathcal{C}$. Pilname grafe bet koks V skaidinys netuščiais poaibiais duos skaidinį klikomis. Mus domins minimalus klikų skaičius, t.y., dydis

$$\Theta(G) := \min_{\mathcal{C}} |\mathcal{C}|.$$

Skaidinys $\mathcal{C}$ su savybe $|\mathcal{C}| = \Theta(G)$ - **minimaliuoju** skaidiniu klikomis.

Nustatykime stabilumo skaičiaus ir minimaliojo klikų skaičiaus sąryšių.

1 teorema. *Bet kokiam G grafui*

$$\alpha(G) \leq \Theta(G). \tag{1}$$

Be to, jei S yra stabilus poaibis, o $\mathcal{C}$ – skaidinys klikomis toks, kad $|S| = |\mathcal{C}|$, tai S yra maksimalus stabilus poaibis, o $\mathcal{C}$ – minimalus skaidinys klikomis.

Įrodymas. Bet kuriam stabiliam poaibiui S ir skaidiniui klikomis $\mathcal{C} = (C_1, ..., C_k)$ turime

$$|S \cap C_i| \leq 1, \quad i = 1, ..., k.$$

Be to, bet kuri viršūnė patenka į kažkurią iš aibių C_i. Todėl pagal Dirichlet principą

$$|S| \leq |\mathcal{C}|$$

ir

$$\alpha(G) = \max |S| \leq \min |\mathcal{C}| = \Theta(G).$$

Jei $|S_0| = |\mathcal{C}_0|$, tai $|S_0| = \max |S| = \alpha(G)$ ir $|\mathcal{C}_0| = \min |\mathcal{C}| = \Theta(G)$.

1 teorema įrodyta.

Atskiroms grafų klasėms (1) virsta lygybe. Sugalvokite pavyzdį!

Stabilių poaibių ieškojimas siejasi su grafų parinkimo problemomis. Sakysime, kad viršūnių poaibis S **yra įdedamas** į B, $S, B \subset V$, $S \cap B = \emptyset$, jeigu dvidalis pografis, generuotas viršūnių poaibio $S \cup B$, turi visiškąjį parinkimą.

2 teorema. *$B \subset V$ yra maksimalus stabilus poaibis tada ir tik tada, kada bet koks stabilus poaibis S, $S \cap B = \emptyset$, yra įdedamas į B.*

Būtinumo įrodymas. Tegu B - maksimalus stabilus poaibis. Stabilus poaibis S bus įdedamas į B tada ir tik tada, kada bus patenkinta Hall'o parinkimo teoremos sąlyga. Jei $A \subset S$ - bet koks poaibis, $\Gamma(A)$ - aibė viršūnių, gretimų A viršūnėms, tai ši sąlyga turi pavidalą

$$|\Gamma(A) \cap B| \geq |A|.$$

Reikia įsitikinti, kad ši sąlyga yra patenkinta. Tarkime priešingai, ši nelygybė yra nepatenkinta dėl $A \subset S$. Nagrinėkime aibę

$$B_1 := \big(B \setminus \Gamma(A) \cap B\big) \cup A.$$

Ji yra stabili ir $|B_1| > |B|$. Tai prieštarauja B maksimalumui.

Pakankamumo įrodymas. Tarkime, B nėra maksimalus stabilus poaibis, bet tada egzistuoja kitas, sakykim, B', $|B'| > |B|$. Tada

$$|B' \setminus B| > |B \setminus B'|$$

ir stabilus poaibis $S = B' \setminus B$ negali būti įdedamas į B.

2 teorema įrodyta.

20. Grafo absorbcijos skaičius.

Tipinis šios temos uždavinys yra klausimas:

Kiek šachmatų lentoje reikia išdėstyti valdovių, kad kiekvienas langelis būtų pasiekiamas bent vienos iš valdovių ėjimu? Šiuo atveju atsakymas yra stebėtinai mažas skaičius - 5.

Atsakingesnė užduotis būtų išdėstyti minimalų kiekį radarų taip, kad visas grafo viršūnes kontroliuotų bent vienas iš jų. Kontrolė reikštų briaunų, išvestų iš viršūnių, kuriuose išdėstyti radarai, egzistavimą grafe.

Formaliai kalbant $G = G(V, E)$ grafe viršūnių A aibė vadinama **absorbuojančia**, jeigu su kiekvienu $x \in A$

$$\Gamma(x) \cap A \neq \emptyset.$$

Pagal apibrėžimą izoliuotos viršūnės turi priklausyti absorbuojančiai aibei.

Pažymėkime $\mathcal{A}$ visų absorbuojančių aibių šeimą. Aišku, jog $V \in \mathcal{A}$ ir

$$A \in \mathcal{A}, A \subset A' \quad \Rightarrow A' \in \mathcal{A}.$$

Dydis

$$\beta(G) = \min_{A \in \mathcal{A}} |A|$$

vadinamas **grafo absorbcijos skaičiumi**, o pati aibė A su savybe $|A| = \beta(G)$ - minimalia absorbuojančia aibe.

Teorema. *Jei $G = G(V, E)$ grafo eilė yra n, m - jo didumas ir $\Delta(G)$ - maksimalus laipsnis, tai*

$$n - m \leq \beta(G) \leq n - \Delta(G).$$

Įrodymas. Tegu A - minimali absorbuojanti aibė, t.y., $|A| = \beta(G)$. Kiekviena viršūnė iš poaibio $V \setminus A$ yra sujungta su A viršūne bent viena briauna. Tad,

$$n - |A| = |V \setminus A| \leq m.$$

Iš čia išplaukia kairioji teoremos nelygybė.

Tegu $x \in V$ yra $\Delta(G)$ laipsnio viršūnė, o $\Gamma(x)$ - x gretimų viršūnių poaibis. Pastebėkime, jog aibė $A = V \setminus \Gamma(x)$ yra absorbuojanti. Todėl

$$\beta(G) \leq |A| = n - \Delta(G).$$

Teorema įrodyta.

21. Grafo branduolys.

Susipažinsime su sąvoka, kilusia lošimų teorijoje. Grafo $G = G(V, E)$ **branduoliu** vadinsime aibę $S \subset V$, jeigu ji yra kartu ir absorbuojančia, ir stabilia. Pagal pastarųjų aibių apibrėžimus S branduolys tenkina sąlygas:

(1) $$x \in S \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma(x) \cap S = \emptyset,$$

(2.) $$x \notin S \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma(x) \cap S \neq \emptyset.$$

Nustatykime branduolio kriterijų. S aibės funkcija ϕ_S, apibrėžta lygybėmis

$$\phi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad x \in S, \\ 0, & \text{kai} \quad x \notin S, \end{cases}$$

vadinama jos **charakteristine funkcija**. Ateityje susitarkime, kad $\max_{y \in \emptyset} \phi_S(y) = 0$.

Teorema. *Tam, kad $S \subset V$ aibė būtų branduolys, yra būtinma ir pakankama, kad jos charakteristinė funkcija ϕ_S tenkintų sąlygą*

$$\phi_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma(x)} \phi_S(y), \qquad x \in S.$$

Įrodymas. Jei S yra branduolys, tai remiantis (1) sąlyga, gauname

$$\phi_S(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x \in S \quad \Rightarrow \quad \max_{y \in \Gamma(x)} \phi_S(y) = 0.$$

Panašiai, remiantis (2) sąlyga, gauname

$$\phi_S(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \notin S \quad \Rightarrow \quad \max_{y \in \Gamma(x)} \phi_S(y) = 1.$$

Tarkime teoremos sąlyga yra patenkinta. Tada

$$x \in S \quad \Rightarrow \quad \phi_S(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \max_{y \in \Gamma(x)} \phi_S(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x) \cap S = \emptyset$$

ir

$$x \notin S \quad \Rightarrow \quad \phi_S(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{y \in \Gamma(x)} \phi_S(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x) \cap S \neq \emptyset.$$

Taigi patikrinome (1) ir (2) sąlygas, S yra branduolys.

Teorema įrodyta.

Sugalvokite pavyzdžių grafų, kurių branduoliai turi tą patį skaičių viršūnių, kurių branduoliai yra vieninteliai.