V skyrius. PRIEDAS. MATO IR INTEGRALO TEORIJOS PRADMENYS

1. AIBIŲ KLASĖS

Susitarkime toliau nagrinėjamas aibes laikyti kurios nors universaliosios aibės poaibiais.

Mato teorijai svarbiausios yra dvi aibių klasės: algebros ir σ algebros (sigma algebros).

Bet kurios aibės Ω (ji gali būti ir tuščia) poaibių sistemą $\mathcal{A}$ vadiname *aibių algebra* (aibių kūnu, lauku), jei ji tenkina šias sąlygas:

I. $\Omega \in \mathcal{A}$.

II. Jei $A \in \mathcal{A}$, tai $A^c \in \mathcal{A}$.

III. Jei $A \in \mathcal{A}$ ir $B \in \mathcal{A}$, tai ir $A \cup B \in \mathcal{A}$.

1 p a v y z d y s. Sistema, sudaryta iš dviejų aibių $\varnothing$ ir Ω, $\Omega \neq \varnothing$, yra aibių algebra. Sistema, sudaryta iš vienos aibės $\varnothing$, yra algebra. Tokia algebra telpa kiekvienoje algebroje.

2 p a v y z d y s. Tarkime, kad $A \subset \Omega$, $A \neq \varnothing$, $A \neq \Omega$. Sistema $\{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$ yra aibių algebra.

3 p a v y z d y s. Kiekvienos aibės Ω visų poaibių sistema yra aibių algebra.

4 p a v y z d y s. Tarkime, kad

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{s} A_k$$

ir aibės A_k $(k = 1, ..., s)$ yra disjunkčios (t. y. kas dvi neturi bendrų elementų). Sudarykime visas galimas tų aibių sąjungas $A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_r}$ (tuščia sąjunga pagal susitarimą yra laikoma tuščia aibe). Visų tų sąjungų sistema yra algebra.

5 p a v y z d y s. Imkime visus galimus intervalus $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$, kuriuose a ir b – baigtiniai skaičiai (kai $a = b$, intervalas $[a, b]$ yra sudarytas iš vieno taško, o kitų tipų intervalai – tuščios aibės), ir visus intervalus $(-\infty, a), (-\infty, a], (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, \infty)$. Visų tų intervalų sistema nėra aibių algebra. Tačiau sistema, sudaryta iš visų galimų baigtinio skaičiaus intervalų sąjungų, yra algebra.

Panagrinėsime aibių algebrų savybes. Žymėsime $\mathcal{A}$ aibės Ω poaibių algebrą. Iš apibrėžimo išplaukia šie teiginiai.

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$, nes $\varnothing = \Omega^c \in \mathcal{A}$.
2. Jei $A \in \mathcal{A}$ ir $B \in \mathcal{A}$, tai ir $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$.

3. Jei $A \in \mathcal{A}$ ir $B \in \mathcal{A}$, tai ir $A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

4. Jei $A_1, A_2, ..., A_n$ yra algebros $\mathcal{A}$ aibės, tai jai priklauso ir $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup \cup A_n$, $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$. Šis teiginys išplaukia iš III ir 2, remiantis matematinės indukcijos principu.

Atkreipsime dėmesį, kad aibių algebrą buvo galima apibrėžti ir trumpiau, pakeitus II ir III reikalavimus vienu – sistemos uždarumu aibių atimties atžvilgiu: jei $A \in \mathcal{A}$ ir $B \in \mathcal{A}$, tai ir $A \backslash B \in \mathcal{A}$. Tada jos uždarumas jungimo ir papildymo operacijų atžvilgiu išplauktų iš tapatybių $A^c = \Omega \backslash A$, $A \cup B = = \Omega \backslash ((\Omega \backslash A) \backslash B)$.

Galimi ir kiti aibių algebros apibrėžimo variantai. Sakysime, I reikalavimą galima pakeisti reikalavimu $\varnothing \in \mathcal{A}$ arba III reikalavimą – sąlyga: jei $A \in \mathcal{A}$ ir $B \in \mathcal{A}$, tai ir $A \cap B \in \mathcal{A}$. Siūlome skaitytojui pačiam įrodyti, kad tie variantai yra ekvivalentūs pirmiesiems.

Taigi algebra yra kurios nors aibės Ω poaibių sistema, kuriai priklauso pati Ω ir kuri yra uždara jungimo, kirtimosi ir atimties operacijų atžvilgiu, jei tik jas atliekame baigtinį skaičių kartų. 5 pavyzdys rodo, kad, atlikę su algebros aibėmis jungimo arba kirtimosi operacijas be galo daug kartų, galime gauti ir aibes, nepriklausančias algebrai. Dėl to kartais susidaro didelių nepatogumų. Todėl įvesime siauresnę algebrų klasę – vadinamąsias σ algebras.

Kurios nors aibės Ω poaibių sistema $\mathcal{A}$ vadinama *aibių σ algebra* (σ kūnu, σ lauku, aibių Borelio kūnu, Borelio lauku), kai ji tenkina sąlygas:

I. $\Omega \in \mathcal{A}$.

II. Jei $A \in \mathcal{A}$, tai $A^c \in \mathcal{A}$.

III$'$. Jei $A_1, A_2, ...$ yra sistemos $\mathcal{A}$ aibės, tai ir

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

III algebros sąlygą pakeitėme III$'$ sąlyga. Nesunku suvokti, kad iš III$'$ išplaukia III. Iš tikrųjų iš I ir II išplaukia, kad $\varnothing \in \mathcal{A}$. Todėl, jei A ir $B \in \mathcal{A}$, tai ir $A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup ... \in \mathcal{A}$. Vadinasi, aibių σ algebra yra aibių algebra.

Parodysime, kad aibių σ algebra yra uždara ir bet kurios aibių iš $\mathcal{A}$ sekos kirtimosi atžvilgiu.

5. Jei $A_1, A_2, ...$ yra $\mathcal{A}$ aibės, tai ir

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c \Big)^c \in \mathcal{A}.$$

Siūlome skaitytojui parodyti, kad aibių σ algebrą galime apibrėžti, reikalaudami, kad būtų tenkinamos I, II ir 5 sąlygos.

1, 2 ir 3 pavyzdžių algebros yra σ algebros. 5 pavyzdžio algebra, kaip jau minėjome, nėra σ algebra.

6 p a v y z d y s. Kiekviena baigtinė algebra yra kartu ir σ algebra. Iš tikrųjų, jei $A_1, A_2, ...$ yra baigtinės algebros $\mathcal{A}$ aibių seka, tai tarp jų gali būti tik baigtinis skaičius skirtingų (nes tik tiek tėra aibių sistemoje $\mathcal{A}$). Todėl

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

yra iš esmės baigtinio aibių skaičiaus sąjunga.

Kiekvieną aibės Ω poaibių sistemą $\mathcal{S}$ visada galima papildyti naujomis aibėmis – Ω poaibiais, kad ji virstų algebra arba net σ algebra. Pakanka tą sistemą papildyti iki visų aibės Ω poaibių sistemos. Tačiau kartais galima elgtis ekonomiškiau – imti mažiau papildomų aibių. Tarp visų algebrų (σ algebrų), kurioms priklauso sistemos $\mathcal{S}$ aibės, yra pati negausiausia $a(\mathcal{S})$ (atitinkamai $\sigma(\mathcal{S})$): ji priklauso kiekvienai aibių algebrai (σ algebrai), aprėpiančiai sistemą $\mathcal{S}$, ir yra vadinama *algebra (σ algebra), generuota sistemos* $\mathcal{S}$, arba *mažiausia algebra (σ algebra)*, kuriai priklauso $\mathcal{S}$. Įrodysime tuos teiginius.

1 teorema. *Jei* $\{\mathcal{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ *yra aibės* Ω *poaibių algebrų* (σ *algebrų*) *sistema, tai visų tos sistemos algebrų* (σ *algebrų*) *sankirta*

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$$

yra taip pat Ω *poaibių algebra* (σ *algebra*).

Į r o d y m a s. Tirsime tik σ algebrų atvejį. Pažymėkime σ algebrų sankirtą $\mathcal{A}$. Parodysime, kad ji tenkina I, II, III$'$ sąlygas. Kadangi $\Omega \in \mathcal{A}_\lambda$ visiems $\lambda \in \Lambda$, tai $\Omega \in \mathcal{A}$. Jei aibė $A \in \mathcal{A}$, tai ji priklauso kiekvienai iš $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Tačiau tada $A^c \in \mathcal{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$. Vadinasi, $A^c \in \mathcal{A}$. Tarkime, kad A_k $(k = 1, 2, ...)$ yra $\mathcal{A}$ aibės. Tada jos priklauso ir kiekvienai iš $\mathcal{A}_\lambda$. Todėl kiekvienai iš $\mathcal{A}_\lambda$ priklauso ir jų sąjunga

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Vadinasi, ta sąjunga priklauso ir $\mathcal{A}$. $\square$

2 teorema. *Tarkime, kad* $\mathcal{S}$ *yra kuri nors aibės* Ω *poaibių sistema. Egzistuoja vienintelė algebra* $a(S)$ *(atitinkamai* σ *algebra* $\sigma(\mathcal{S})$*), turinti savybes: a)* $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$*; b) jei* $\mathcal{S}$ *priklauso kuriai nors aibės* Ω *poaibių algebrai* (σ *algebrai*) $\mathcal{A}$*, tai ir* $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$.

Į r o d y m a s. Vėl tirsime tik σ algebrų atvejį. Visada egzistuoja bent viena aibės Ω poaibių σ algebra, kuriai priklauso sistema $\mathcal{S}$. Tokia yra visų aibės Ω poaibių σ algebra. Imkime visas aibės Ω poaibių σ algebras, kurioms priklauso $\mathcal{S}$, ir pažymėkime jų sankirtą $\sigma(\mathcal{S})$. Įrodysime, kad ji ir yra ieškomoji σ algebra.

Pagal 1 teoremą $\sigma(\mathcal{S})$ yra σ algebra. Jei $\mathcal{A}$ yra kuri nors aibės Ω poaibių σ algebra, kuriai priklauso $\mathcal{S}$, tai jai turi priklausyti $\sigma(\mathcal{S})$ pagal pastarosios apibrėžimą.

Lieka įrodyti, kad gali būti tik viena mažiausia σ algebra. Tarkime, kad turime dvi σ algebras $\mathcal{A}_1$ ir $\mathcal{A}_2$, tenkinančias sąlygas a ir b. Iš sąlygos b gautume, kad $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$. Vadinasi, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. $\square$

Imkime visų tiesės $\Omega = R$ intervalų sistemą. Praplėskime ją iki mažiausios σ algebros $\mathcal{B}$. Aibės, sudarančios $\mathcal{B}$, yra vadinamos *Borelio aibėmis.* Jas galime gauti ir praplėsdami iki mažiausios σ algebros visų intervalų $(-\infty, x)$, $x \in R$, sistemą. Iš tikrųjų visų kitų tipų intervalus galime gauti iš šių intervalų, atlikę aibių operacijas, kurių atžvilgiu yra uždara aibių σ algebra. Kai $c < a < b$, turime

$$[a,b) = (-\infty, b)\backslash(-\infty, a),$$

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, b+\frac{1}{n}\right),$$

$$(a,b) = [c,b)\backslash[c,a]$$

ir t. t.

Borelio aibių klasė yra labai plati. Jai priklauso ne tik visi intervalai, bet ir visos atviros, visos uždaros ir dar sudėtingesnės aibės.

Visai taip pat, praplėsdami erdvės $\Omega = R^s$ visų intervalų sistemą iki mažiausios σ algebros $\mathcal{B}^s$, gauname *erdvės R^s Borelio aibes.*

Dvejetas $\{\Omega, \mathcal{A}\}$, sudarytas iš netuščios aibės Ω ir jos poaibių σ algebros $\mathcal{A}$ (kuriai priklauso pati Ω), yra vadinamas *mačia erdve.* Sistemos $\mathcal{A}$ aibės tada vadinamos $\mathcal{A}$ *mačiomis*, arba tiesiog *mačiomis*, kai aišku, apie kokią σ algebrą kalbame.

Mato teorijoje be algebrų bei σ algebrų dar vartojamos žiedų ir σ žiedų sąvokos. Jos apibrėžiamos panašiai, kaip ir algebros, tačiau nėra reikalaujama, kad Ω priklausytų toms aibių klasėms.

Įvesime dar vieną sąvoką – aibių monotoninių klasių. Jai apibrėžti priminsime aibių sekos ribos sąvoką.

Tarkime, kad $A_1, A_2, \ldots$ yra aibės Ω poaibių seka. Aibę tų $\omega \in \Omega$, kurie priklauso be galo dideliam skaičiui aibių A_n, žymėsime $\limsup\limits_n A_n$ ir vadinsime sekos $\{A_n\}$ *viršutine riba.* Nesunku įrodyti, kad

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n. \tag{1}$$

Jei ω priklauso be galo dideliam aibių A_n skaičiui, tai ω priklauso visoms aibėms

(2)
$$C_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \quad (k = 1, 2, ...),$$

vadinasi, priklauso aibei

(3)
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Antra vertus, jei ω priklauso (3) aibei, tai jis priklauso kiekvienai aibei C_k $(k = 1, 2, ...)$. Jei ω priklausytų tik baigtiniam aibių A_n skaičiui, tai būtų toks m, kad $\omega \notin A_n$, kai $n \geq m$, t. y.

$$\omega \notin \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = C_k,$$

kai $k \geq m$. Iš šio prieštaravimo išplaukia, kad ω turi priklausyti be galo dideliam aibių A_n skaičiui.

Aibę tų $\omega \in \Omega$, kurie priklauso visoms A_n, galbūt išskyrus baigtinį jų skaičių, kitaip tariant, priklauso visoms A_n, kurių indeksai pakankamai dideli, žymėsime $\liminf\limits_n A_n$ ir vadinsime sekos $\{A_n\}$ *apatine riba.* Įrodysime, kad

(4)
$$\liminf_n A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Jei ω priklauso visoms aibėms A_n, pradedant kuriuo nors indeksu m, tai ω priklauso visoms aibėms

$$D_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n,$$

kai $k \geq m$, vadinasi, ω priklauso aibei

(5)
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Jei ω priklauso (5) aibei, tai jis priklauso kuriai nors aibei D_k, vadinasi, ir visoms A_n, kai $n \geq k$.

Iš (1) ir (4) išplaukia, kad

$$(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c,$$
$$(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c.$$

Jei aibės A_n priklauso aibės Ω poaibių σ algebrai $\mathcal{A}$, tai jų sekos apatinė ir viršutinė ribos, kaip matyti iš (1) ir (4) lygybių, taip pat priklauso $\mathcal{A}$.

Jei

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n,$$

tai bendrąją apatinės ir viršutinės ribos reikšmę vadiname sekos $\{A_n\}$ *riba* ir žymime

$$\lim_n A_n.$$

Jei seka $\{A_n\}$ yra monotoniškai didėjanti: $A_1 \subset A_2 \subset ...$, tai

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Jei seka $\{A_n\}$ yra monotoniškai mažėjanti: $A_1 \supset A_2 \supset ...$, tai

$$\lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Mums čia tereiks tik monotoninių aibių ribų sąvokos.

Monotonine aibių klase vadinama netuščia aibės Ω poaibių sistema $\mathcal{M}$, kai kiekvienos monotoniškos aibių iš $\mathcal{M}$ sekos riba priklauso $\mathcal{M}$.

Nagrinėsime monotoninių klasių savybes.

3 teorema. *Jei $\{\mathcal{M}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ yra aibės Ω poaibių monotoninių klasių sistema, tai visų tos sistemos monotoninių klasių sankirta*

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda$$

yra arba tuščia, arba vėl monotoninė klasė.

Į r o d y m a s. Sakykime, sankirta $\mathcal{M}$ nėra tuščia ir A_n $(n = 1, 2, ...)$ yra monotoniška sistemos $\mathcal{M}$ aibių seka. Kadangi aibės A_n priklauso kiekvienai iš klasių $\mathcal{M}_\lambda$, tai ir jų riba turi priklausyti kiekvienai iš tų klasių, vadinasi, ji priklauso ir tų klasių sankirtai $\mathcal{M}$. □

4 teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{H}$ yra bet kuri netuščia aibės Ω poaibių sistema. Egzistuoja vienintelė monotoninė aibių klasė $\mathcal{M}(\mathcal{H})$, turinti savybes: a) $\mathcal{H} \subset$ $\subset \mathcal{M}(\mathcal{H})$, b) jei $\mathcal{H}$ priklauso kuriai nors aibės Ω poaibių monotoninei klasei $\mathcal{M}$, tai $\mathcal{M}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{M}$.*

$\mathcal{M}(\mathcal{H})$ yra vadinama sistemos $\mathcal{H}$ *generuotąja monotonine aibių klase*, arba *mažiausiąja monotonine aibių klase, kuriai priklauso $\mathcal{H}$.*

Į r o d y m a s. Aibės Ω visų poaibių sistema yra monotoninė klasė ir jai priklauso sistema $\mathcal{H}$. Vadinasi, egzistuoja monotoninė klasė, apimanti $\mathcal{H}$.

Pažymėkime $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ visų monotoninių klasių, sudarytų iš Ω poaibių ir apimančių $\mathcal{H}$, sankirtą. Įrodysime, kad ji yra ieškomoji. Pagal 3 teoremą $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ yra monotoninė klasė. Tarkime, kad $\mathcal{M}$ yra bet kuri monotoninė aibės Ω poaibių klasė, apimanti $\mathcal{H}$. Tada $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ turi priklausyti $\mathcal{M}$ (pagal $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ apibrėžimą).

Klasės $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ vienatis išplaukia iš jos minimalumo (žr. 2 teoremos įrodymą). □

5 teorema. *Aibės Ω poaibių algebra $\mathcal{A}$ yra σ algebra tada ir tik tada, kai ji yra monotoninė klasė.*

Į r o d y m a s. Kiekviena σ algebra yra, aišku, ir monotoninė klasė. Tarkime, kad algebra $\mathcal{A}$ yra monotoninė klasė. Įrodysime, kad ji yra ir σ algebra. Imkime bet kurią algebros $\mathcal{A}$ aibių seką A_k $(k = 1, 2, ...)$. Tada baigtinės sąjungos

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad (n = 1, 2, ...)$$

sudaro monotoniškai didėjančią aibių seką, kurios riba yra visų aibių A_k $(k = 1, 2, ...)$ sąjunga. Ji priklauso $\mathcal{A}$. □

6 teorema. *Algebros $\mathcal{A}$ generuota σ algebra $\sigma(\mathcal{A})$ sutampa su taip pat algebros $\mathcal{A}$ generuota monotonine klase $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Į r o d y m a s. 1. Pagal 5 teoremą $\sigma(\mathcal{A})$ yra monotoninė klasė. Todėl iš $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ minimalumo gauname: $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Jei įrodytume, kad $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ yra algebra, tai pagal 5 teoremą gautume, kad ji yra ir σ algebra, o iš $\sigma(\mathcal{A})$ minimalumo išplauktų, kad $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$, taigi $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

2. Tarkime, kad $\mathcal{A}$ yra aibės Ω poaibių algebra. Įrodysime: jei $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, tai ir $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Imkime tam reikalui aibių klasę $\mathcal{M} = \{A : A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\ A^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$. Aišku, visos algebros $\mathcal{A}$ aibės priklauso klasei $\mathcal{M}$, vadinasi,

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}(\mathcal{A}). \tag{6}$$

Jei A_n $(n = 1, 2, ...)$ yra didėjanti klasės $\mathcal{M}$, taigi ir klasės $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, aibių seka, tai A_n^c $(n = 1, 2, ...)$ yra mažėjanti klasės $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ aibių seka ir

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),$$

$$(\lim_{n\to\infty} A_n)^c = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \lim_{n\to\infty} A_n^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Analogiškai, jei B_n $(n = 1, 2, ...)$ yra mažėjanti klasės $\mathcal{M}$, taigi ir klasės $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, aibių seka, tai B_n^c $(n = 1, 2, ...)$ yra didėjanti klasės $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ aibių seka ir

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),$$

$$(\lim_{n\to\infty} B_n)^c = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^c = \lim_{n\to\infty} B_n^c \in \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Vadinasi, klasės $\mathcal{M}$ monotoniškų sekų ribos vėl priklauso $\mathcal{M}$. Todėl $\mathcal{M}$ yra monotoninė klasė. Iš (6) ir $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ minimalumo išplaukia, kad $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

3. Įrodysime, kad klasė $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ yra uždara dviejų aibių kirtimosi atžvilgiu. Jei $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, imkime aibių klasę $\mathcal{M}_A = \{B : B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}),\ A \cap B \in \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$. Pirmiausia parodysime, kad $\mathcal{M}_A$ yra monotoninė klasė. Imkime bet kurią monotonišką tos klasės aibių seką B_n $(n = 1, 2, ...)$. Jos riba $\lim B_n$ ir $\lim(A \cap B_n)$ turi priklausyti $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Iš lygybės $A \cap \lim B_n = \lim(A \cap B_n)$ išplaukia, kad ir $A \cap \lim B_n \in \mathcal{M}_A$. Vadinasi, $\mathcal{M}_A$ yra monotoninė klasė.

Jei $A \in \mathcal{A}$, tai $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Todėl, jei $A \in \mathcal{A}$ ir $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, tai $A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, taigi $A \in \mathcal{M}_B$.

Iš čia gauname: $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$, kai $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Todėl, kai $B \in \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, (iš $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ minimalumo) $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Vadinasi, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ yra uždara dviejų aibių kirtimosi atžvilgiu. □

2. AIBIŲ MATAS

Elementariojoje geometrijoje įvedamos geometrinių figūrų ilgio, ploto bei tūrio sąvokos. Jos įvedamos tik paprasčiausiais atvejais. Sakysime, apibrėžiama tik tiesės atkarpų, apskritimo bei jo dalių ilgio sąvoka, daugiakampių, skritulio bei jo dalių ir rutulio paviršiaus bei jo dalių ploto sąvoka, briaunainių, rutulio bei jo dalių tūrio sąvoka. Kyla klausimas, ar negalima tas sąvokas praplėsti ir daug bendresnėms taškų aibėms. Tai nėra lengvas klausimas. Imkime, pavyzdžiui, aibę, sudarytą iš visų racionaliųjų intervalo (0, 1) taškų. Ši aibė nėra paprasta. Kiekviename kiek norint mažame to intervalo pointervalyje yra be galo daug racionaliųjų ir be galo daug iracionaliųjų taškų. Neaišku, kas laikytina tokios aibės "ilgiu".

Kad būtų trumpiau, ilgį, plotą, tūrį susitarsime vadinti vienu žodžiu – *matu.*

Figūros A matas yra skaičius $\mu(A)$, priskiriamas tai figūrai ir turįs šias savybes:

I. Jis yra neneigiamas: $\mu(A) \geq 0$.

II. Jei figūrą A suskaidysime į keletą figūrų $A_1, ..., A_n$, kurios turi matus ir yra disjunkčios (kas dvi neturi bendrų taškų), tai figūros A matas turi būti lygus figūrų $A_1, ..., A_n$ matų sumai

$$\mu(A) = \mu(A_1) + ... + \mu(A_n).$$

Ši mato savybė paprastai vadinama jo *adityvumu*, tiksliau *baigtiniu adityvumu.*

II′. Elementariojoje geometrijoje nagrinėjamų paprastų geometrinių figūrų matas turi vadinamąją *visiškojo*, arba *skaičiojo*, ar dar kitaip, σ *adityvumo* (sigma adityvumo) savybę: jei figūra A yra suskaidoma į begalinę figūrų seką $A_1, A_2, \ldots$ ir figūros yra disjunkčios bei turi matus, tai figūros A matas yra lygus figūrų $A_1, A_2, \ldots$ matų sumai:

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots$$

III. Intervalo (a, b) ilgis lygus $b-a$, stačiakampio su kraštinėmis c, d plotas lygus cd, stačiojo gretasienio su kraštinėmis e, f, g tūris lygus efg.

Peršasi mintis, kad ir kitoms aibėms mato sąvoką reikia įvesti taip, kad ji tenkintų tas sąlygas. Deja, buvo įrodyta, kad nėra tokios aibės funkcijos, kuri bet kurio matavimo erdvių visoms taškų aibėms tenkintų I, II′, III sąlygas. Tiesės ir plokštumos aibėms galima rasti funkciją, tenkinančią I, II, III sąlygas; ji nėra vienareikšmiškai nusakyta. Trimatėje erdvėje ir tokia funkcija neegzistuoja.

Vadinasi, reikia ieškoti aibės funkcijos, kuri būtų nusakyta ne visoms, o tik kai kurių, gana plačių, klasių aibėms. Turint galvoje taikymus, tos klasės turėtų būti uždaros aibių paprasčiausių veiksmų atžvilgiu. Antra vertus, dažnai naudinga atsisakyti III reikalavimo. Sakysime, kai erdvė yra nehomogeninė, figūros svoris (jį galime laikyti matu) pastūmus gali keistis. Pagaliau, mato sąvoką pravartu įvesti ne tik taškų, bet ir abstrakčioms aibėms.

Mato teorijoje praverčia be galo dideli skaičiai. Todėl prie realiųjų skaičių tiesės R prijungę du simbolius $+\infty = \infty$ ir $-\infty$, praplėsime ją iki išplėstinės skaičių tiesės $\bar{R} = [-\infty, \infty]$, kartu įvesdami šitokias papildomas nelygybes bei veiksmų taisykles:

jei $x \in \bar{R}$, tai $-\infty \leq x \leq \infty$;

$$+(+\infty) = -(-\infty) = \infty, \ +(-\infty) = -(+\infty) = -\infty;$$

$$x + (\pm\infty) = \pm\infty + x = x \pm \infty, \ \text{jei } x \in R;$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \ (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty) - (-\infty) = +\infty, \ (-\infty) - (+\infty) = -\infty;$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, & \text{kai } 0 < x \leq \infty, \\ 0, & \text{kai } x = 0, \\ \mp\infty, & \text{kai } -\infty \leq x < 0; \end{cases}$$

$$\frac{\pm\infty}{x} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{kai } 0 < x < \infty, \\ \mp\infty, & \text{kai } -\infty < x < 0; \end{cases}$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \quad \text{kai } x \in R.$$

Reiškiniai

$$(+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty),\ (+\infty)+(-\infty),\ (-\infty)+(+\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{x}{0}\ (x \in \bar{R})$$

neturi prasmės.

Dabar jau galime kalbėti ir apie intervalus $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $(a, \infty]$, $[a, \infty]$, $[-\infty, \infty] = \bar{R}$ bei jų generuotą aibių σ algebrą $\bar{\mathcal{B}}$. Jos aibes vėl vadinsime Borelio aibėmis.

Nagrinėsime aibės funkcijas, t. y. funkcijas, apibrėžtas kurioje nors aibių sistemoje $\mathcal{E}$. Aibės funkcija $\varphi : \mathcal{E} \to \bar{R}$ yra vadinama *adityviąja*, kai ji turi savybę: jei A yra sistemos $\mathcal{E}$ aibė ir yra sąjunga baigtinio skaičiaus sistemos $\mathcal{E}$ disjunkčių aibių $A_1, ..., A_n$, tai

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k).$$

Panašiai apibrėžiamas ir aibės funkcijos *visiškasis, skaitusis*, arba dar kitaip – σ *adityvumas.* Jei

$$A = A_1 \cup A_2 \cup ...,\ A \in \mathcal{E}, A_k \in \mathcal{E}\ (k = 1, 2, ...);\ A_j \cap A_k = \varnothing\ (j \neq k),$$

tai turi būti

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k).$$

Paprastąjį adityvumą dažnai vadina baigtiniu adityvumu.

Dabar jau galime apibrėžti mato sąvoką.

Tarkime, kad $\mathcal{A}$ yra netuščios aibės Ω poaibių algebra (kuri gali ir nebūti σ algebra). Neneigiama funkcija μ (galinti įgyti ir reikšmes $+\infty$), apibrėžta visoms algebros $\mathcal{A}$ aibėms, vadinama *matu*, kai $\mu(\varnothing) = 0$ ir μ yra visiškai adityvi. Kitais žodžiais, matu vadiname aibės funkciją $\mu : \mathcal{A} \to \bar{R}$, turinčią savybes:

I. μ yra neneigiama.

II. $\mu(\varnothing) = 0$.

III. Jei $A_1, A_2, ...$ yra bet kuri disjunkčių algebros $\mathcal{A}$ aibių seka ir

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

(kai $\mathcal{A}$ yra σ algebra, pastarasis reikalavimas yra automatiškai tenkinamas), tai

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Reikalavimas $\mu(\varnothing) = 0$ įvedamas siekiant išvengti trivialaus atvejo, kai funkcija $\mu(A) = \infty$ visoje algebroje $\mathcal{A}$. Jį galima pakeisti ekvivalenčiu reikalavimu, kad egzistuotų bent viena aibė $A_0 \in \mathcal{A}$ su sąlyga $\mu(A_0) < \infty$. Iš tikrųjų, jei $A_0 \in \mathcal{A}$ yra tokia aibė, tai iš lygybės $A_0 = A_0 \cup \varnothing \cup \varnothing \cup ...$ ir funkcijos μ visiškojo adityvumo gauname $\mu(A_0) = \mu(A_0) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + ...$, o iš čia išplaukia, kad $\mu(\varnothing) = 0$.

Matas μ yra vadinamas *baigtiniu*, kai $\mu(\Omega) < \infty$, ir σ *baigtiniu*, kai aibę Ω galima išreikšti skaičios sistemos aibių $C_k \in \mathcal{A}$ sąjunga su sąlyga $\mu(C_k) < < \infty (k = 1, 2, ...)$. Šiais atvejais reikalavimas $\mu(\varnothing) = 0$ išplaukia iš adityvumo. Jei $\mu(\Omega) = 1$, tai matą vadiname *tikimybiniu*.

Dažnai matas apibrėžiamas ir kitokioms aibių klasėms, kurios nėra aibių algebros. Jo apibrėžimas tada yra toks pat. Tiesa, kartais iš mato reikalaujama tik baigtinio adityvumo.

3. MATO SAVYBĖS

1–7 teoremose μ bus matas, apibrėžtas netuščios aibės Ω poaibių algebroje $\mathcal{A}$.

1 teorema. *Jei $A_1, ..., A_n$ yra algebros $\mathcal{A}$ disjunkčios aibės, tai*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Ši teorema parodo, kad matas yra ne tik visiškai adityvi aibės funkcija, bet turi ir baigtinį adityvumą.

Į r o d y m a s. Papildykime aibes $A_1, ..., A_n$ iki begalinės sekos, imdami $A_{n+1} = A_{n+2} = ... = \varnothing$. Gautoji seka bus sudaryta iš disjunkčių aibių. Todėl pagal II ir III

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \ \square$$

2 teorema. *Jei $A \in \mathcal{A}$ ir $B \in \mathcal{A}$, tai*

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \backslash B).$$

P a s t a b a. Kai $\mu(A \cap B) < \infty$, tai šią lygybę galime perrašyti pavidalu $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$.

Į r o d y m a s. Lygybėje

$$A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$$

aibės $A \cap B$ ir $A \backslash B$ neturi bendrų elementų. Todėl pagal 1 teoremą

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \backslash B). \ \square$$

1 išvada. Jei $B \subset A,\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A}$, tai

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \backslash B);$$

atskiru atveju, kai $\mu(B) < \infty$,

$$\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B).$$

2 išvada. Jei $B \subset A$ ir $A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A}$, tai

$$\mu(B) \leq \mu(A).$$

3 teorema. *Jei $A_1, A_2, ...$ yra algebros $\mathcal{A}$ aibių seka*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A},$$

tai

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Į r o d y m a s. Pasistengsime visų aibių A_k sąjungą išreikšti sąjunga aibių, kurios kas dvi neturi bendrų elementų. Pažymėkime

$$\begin{aligned} A_1^* &= A_1, \\ A_2^* &= A_2 \backslash A_1, \\ A_3^* &= A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), \\ A_4^* &= A_4 \backslash (A_1 \cup A_2 \cup A_3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aišku, kad aibės A_k^* kas dvi neturi bendrų elementų ir

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^*.$$

Todėl iš III

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k^*).$$

Pagal 2 teoremos 2 išvadą

$$\mu(A_k^*) \leq \mu(A_k).$$

Vadinasi,

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k^*) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \ \square$$

Išvada. *Jei $A_1, ..., A_n$ yra algebros $\mathcal{A}$ aibės, tai*

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Į r o d y m a s. Pažymėję $A_{n+1} = A_{n+2} = ... = \varnothing$, iš 3 teoremos ir I gauname

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \ \square$$

4 teorema. *Jei $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, tai*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Į r o d y m a s. Teisingos lygybės

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \cap B) \cup (A \backslash B) \cup (B \backslash A), \\ A &= (A \cap B) \cup (A \backslash B), \\ B &= (A \cap B) \cup (B \backslash A). \end{aligned}$$

Kiekvienos lygybės dešinėje pusėje jungiamos aibės neturi bendrų elementų. Todėl pagal 1 teoremą

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A \cap B) + \mu(A \backslash B) + \mu(B \backslash A), \\ \mu A &= \mu(A \cap B) + \mu(A \backslash B), \\ \mu B &= \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A). \end{aligned}$$

Sudėję dvi paskutines lygybes ir pasinaudoję pirmąja, gauname

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) + \mu(A \backslash B) + \mu(B \backslash A) = \\ &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B). \ \square \end{aligned}$$

P a s t a b a. Kai $\mu(A \cap B) < \infty$, 4 teoremos lygybę galime parašyti pavidalu

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

5 teorema. *Jei algebros $\mathcal{A}$ aibės A_k $(k = 1, 2, ...)$ sudaro monotoniškai didėjančią seką: $A_1 \subset A_2 \subset ...$ ir jos riba*

$$A = \lim A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A},$$

tai

$$\mu(A_n) \to \mu(A),$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s. Pažymėję $A_0 = \varnothing$, aibę A išreikšime nepersidengiančių aibių sąjunga

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \backslash A_{k-1}).$$

Pritaikę III, gauname

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \backslash A_{k-1}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \backslash A_{k-1}).$$

Iš 1 teoremos išplaukia

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \backslash A_{k-1}) \Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n). \ \square$$

6 teorema. *Jei algebros $\mathcal{A}$ aibės A_k $(k = 1, 2, ...)$ sudaro monotoniškai mažėjančią aibių seką: $A_1 \supset A_2 \supset ...$, jos riba*

$$A = \lim A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

ir egzistuoja n_0 su sąlyga $\mu(A_{n_0}) < \infty$, tai

$$\mu(A_n) \to \mu(A),$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s. Atėmę iš aibės A_{n_0} paeiliui duotosios sekos aibes, gauname monotoniškai didėjančią aibių seką

$$A_{n_0} \backslash A_1 \subset A_{n_0} \backslash A_2 \subset ...$$

Kadangi
$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_{n_0}\backslash A_k) = A_{n_0}\backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_{n_0}\backslash A,$$
tai iš 5 teoremos išplaukia, kad
$$\mu(A_{n_0}\backslash A_n) \to \mu(A_{n_0}\backslash A),$$
kai $n \to \infty$. Iš 2 teoremos 1 išvados (kai $n \geq n_0$) gauname
$$\mu(A_{n_0}\backslash A_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n),\ \mu(A_{n_0}\backslash A) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A).$$
Vadinasi,
$$\mu(A_n) \to \mu(A),$$
kai $n \to \infty$. □

Baigdami nagrinėti bendrąsias mato savybes, pastebėsime, kad matą galėjome ir kiek kitaip apibrėžti.

7 teorema. *Tarkime, kad aibės* Ω *poaibių algebroje* $\mathcal{A}$ *yra apibrėžta neneigiama aibės funkcija* $\mu(A)$*:*
$$\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathcal{R}},$$
turinti savybes: a) $\mu(\varnothing) = 0$*; b) jei* $A_1, ..., A_n$ *yra disjunkčios algebros* $\mathcal{A}$ *aibės, tai*
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$
(baigtinis adityvumas). Ši funkcija yra matas algebroje $\mathcal{A}$*, jei yra tenkinama bent viena iš sąlygų:*

1° *jei* $A_1 \subset A_2 \subset ...$ *yra nemažėjanti algebros* $\mathcal{A}$ *aibių seka ir jos riba*
$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$
yra algebros $\mathcal{A}$ *aibė, tai*
$$\mu(A_n) \to \mu(A),$$
kai $n \to \infty$*;*

2° *jei* $\mu(\Omega) < \infty$ *ir* $A_1 \supset A_2 \supset ...$ *yra nedidėjanti algebros* $\mathcal{A}$ *aibių seka, kurios riba*
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing,$$
tai teisingas teiginys
$$\mu(A_n) \to 0,$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s. 1. Tarkime, kad teisingas 1° teiginys. Reikia įrodyti, kad funkcija μ yra visiškai adityvi. Imkime bet kurią sistemos $\mathcal{A}$ disjunkčių aibių seką $B_1, B_2, ...$ su sąlyga

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}.$$

Tada

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k).$$

2. Tarkime, kad teisingas 2° teiginys. Vėl reikės įrodyti, kad funkcija μ yra visiškai adityvi. Imkime bet kurią sistemos $\mathcal{A}$ aibių seką $B_1, B_2, ...$, kurios kas dvi neturi bendrų elementų ir

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}.$$

Pažymėję

$$R_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k \quad (n = 1, 2, ...),$$

gauname

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \mu\Big(\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) \cup R_n\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) + \mu(R_n). \tag{1}$$

Kadangi aibės R_n sudaro nedidėjančią seką ir

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n = \varnothing,$$

tai iš 2°

$$\mu(R_n) \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Iš (1) išplaukia, kad

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k). \ \square$$

Kaip jau sakėme 1 skyrelyje, dvejetas $\{\Omega, \mathcal{A}\}$, sudarytas iš netuščios aibės Ω ir jos poaibių σ algebros $\mathcal{A}$, yra vadinamas *mačiąja erdve.*

Trejetas $\{\Omega, \mathcal{A}, \mu\}$, sudarytas iš netuščios aibės Ω, jos poaibių σ algebros $\mathcal{A}$ ir mato μ, apibrėžto σ algebroje $\mathcal{A}$, yra vadinamas *erdve su matu.*

Tarp erdvių su matu svarbų vaidmenį vaidina pilnosios erdvės. Joms apibrėžti įvesime nulinės aibės sąvoką. Tarkime, kad $\{\Omega, \mathcal{A}, \mu\}$ yra erdvė su matu. Bet kuris aibės Ω poaibis O (jis gali ir nepriklausyti $\mathcal{A}$) yra vadinamas *nuline aibe* (mato μ atžvilgiu), jei egzistuoja jo viršaibis B iš $\mathcal{A}$, turįs nulinį matą $\mu(B) = 0$. Erdvė su matu $\{\Omega, \mathcal{A}, \mu\}$ yra vadinama *pilnąja*, jei visi nuliniai Ω poaibiai priklauso $\mathcal{A}$.

Nulinės aibės poaibis yra taip pat nulinė aibė. Baigtinio skaičiaus arba begalinės sekos nulinių aibių sąjunga vėl yra nulinė aibė. Iš tikrųjų, jei O_k yra nulinės aibės, tai egzistuoja sistemos $\mathcal{A}$ aibės B_k, padengiančios O_k ir turinčios nulinį matą; tada

$$\bigcup_k O_k \subset \bigcup_k B_k$$

ir

$$\mu\Big(\bigcup_k B_k\Big) \leq \sum_k \mu(B_k) = 0.$$

Bet kurią erdvę su matu galima praplėsti, pridedant prie σ algebros $\mathcal{A}$ naujų aibių ir papildomai apibrėžiant toms naujoms aibėms matą, kad jis virstų pilnąja erdve.

8 teorema. *Tarkime, kad $\{\Omega, \mathcal{A}, \mu\}$ yra erdvė su matu. Visų jos nulinių aibių sistemą pažymėkime $\mathcal{O}$, o sistemą aibių pavidalo $A \cup O$ su $A \in \mathcal{A}$, $O \in \in \mathcal{O}$, pažymėkime $\bar{\mathcal{A}}$. Tada sistema $\bar{\mathcal{A}}$ sutampa su σ algebra, generuota sistemos $\mathcal{A} \cup \mathcal{O}$. Apibrėžkime σ algebroje $\bar{\mathcal{A}}$ aibės funkciją $\bar{\mu}$ formule*

$$\bar{\mu}(A \cup O) = \mu(A). \tag{2}$$

Funkcija $\bar{\mu}$ yra matas σ algebroje $\bar{\mathcal{A}}$. Trejetas $\{\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu}\}$ yra pilnoji erdvė. (2) formulė vienareikšmiškai nusako matą $\bar{\mu}$, apibrėžtą σ algebroje $\bar{\mathcal{A}}$, turintį savybę $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$, kai A yra bet kuri $\mathcal{A}$ aibė.

Į r o d y m a s. 1. Parodysime, kad $\bar{\mathcal{A}}$ yra σ algebra. Iš pradžių įsitikinsime, kad $\bar{\mathcal{A}}$ yra uždara aibių sekos jungimo atžvilgiu. Jei $A_k \in \mathcal{A}$, $O_k \in \mathcal{O}$ $(k = = 1, 2, ...)$, tai

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cup O_k) = (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k) \in \bar{\mathcal{A}},$$

nes

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k \in \mathcal{O}$$

yra nulinė aibė.

Nesunku parodyti $\bar{\mathcal{A}}$ uždarumą ir papildymo atžvilgiu. Tarkime, kad $A \in \mathcal{A}$, $O \in \mathcal{O}$. Egzistuoja $B \in \mathcal{A}$, $O \subset B$, su sąlyga $\mu(B) = 0$. Teisinga lygybė

$$\begin{aligned} A \cup O &= \big[(A \cup O) \cup B\big] \cap \big[(A \cup O) \cup B^c\big] = \\ &= (A \cup B) \cap \big[(A \cup O) \cup B^c\big]. \end{aligned}$$

Iš čia

$$(A \cup O)^c = (A \cup B)^c \cup \big[(A \cup O)^c \cap B\big].$$

Kadangi $(A \cup B)^c \in \mathcal{A}$ ir $(A \cup O)^c \cap B \subset B$, tai $(A \cup O)^c \cap B \in \mathcal{O}$, taigi $(A \cup O)^c \in \bar{\mathcal{A}}$.

Taigi parodėme, kad $\mathcal{A}$ yra σ algebra. Nesunku suvokti, kad ji yra generuota $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{O}$. Iš tikrųjų kiekvienai tokiai σ algebrai turi priklausyti visos aibės pavidalo $A \cup O$, $A \in \mathcal{A}$, $O \in \mathcal{O}$.

2. $A \cup O$ pavidalo aibę galima parašyti tuo pavidalu keliais būdais. Parodysime, kad $\bar{\mu}$ reikšmė nepriklauso nuo aibės išraiškos. Tarkime, kad

$$\begin{aligned} &A_1 \cup O_1 = A_2 \cup O_2,\ A_1 \in \mathcal{A},\ A_2 \in \mathcal{A},\ O_1 \in \mathcal{O},\ O_2 \in \mathcal{O}, \\ &O_1 \subset B_1,\ B_1 \in \mathcal{A},\ \mu(B_1) = 0, \\ &O_2 \subset B_2,\ B_2 \in \mathcal{A},\ \mu(B_2) = 0. \end{aligned}$$

Turime

$$A_1 \backslash A_2 \subset (A_1 \cap O_1) \backslash A_2 = (A_2 \cup O_2) \backslash A_2 \subset O_2 \subset B_2.$$

Iš čia

$$\mu(A_1 \backslash A_2) \le \mu(B_2) = 0.$$

Vadinasi,

$$\mu(A_1) \le \mu\big((A_1 \backslash A_2) \cup A_2\big) = \mu(A_1 \backslash A_2) + \mu(A_2) = \mu(A_2).$$

Analogiškai įrodome, kad

$$\mu(A_2) \le \mu(A_1).$$

Taigi

$$\mu(A_1) = \mu(A_2),\ \bar{\mu}(A_1 \cup O_1) = \bar{\mu}(A_2 \cup O_2).$$

3. Parodysime, kad $\bar{\mu}$ yra matas. Pakanka įrodyti tik tos funkcijos visiškąjį adityvumą. Tarkime, kad $A_k \cup O_k$ $(k = 1, 2, ...)$ kas dvi neturi bendrų elementų, $A_k \in \mathcal{A}$, $O_k \in \mathcal{O}$. Turime

$$\begin{aligned} \bar{\mu}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cup O_k)\Big) &= \bar{\mu}\Big(\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k\Big)\Big) = \\ &= \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_k + O_k). \end{aligned}$$

Mato vienatis yra triviali.

4. Lieka įrodyti, kad erdvė $\{\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu}\}$ yra pilna. Imkime bet kurią aibę $A \cup O,\ A \in \mathcal{A},\ O \in \mathcal{O}$, su $\bar{\mu}(A \cup O) = \mu(A) = 0$. Sakykime, C yra bet kuris tos aibės poaibis. Egzistuoja $B \in \mathcal{A}$ su sąlygomis $O \subset B,\ \mu(B) = 0$. Todėl $C \subset A \cup B$. Kadangi

$$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B) = 0,$$

tai $C \in \mathcal{O}$; todėl $C \in \bar{\mathcal{A}}$. □

4. MATO PRATĘSIMAS

Tarkime, kad turime netuščios aibės Ω poaibių algebrą $\mathcal{A}$ ir joje apibrėžtą matą μ, t. y. neneigiamą aibės funkciją $\mu : \mathcal{A} \to \bar{R}$, kuri yra visiškai adityvi, ir $\mu(\varnothing) = 0$. Algebrą $\mathcal{A}$ galime praplėsti iki σ algebros $\sigma(\mathcal{A})$. Kyla klausimas, ar negalima ir aibės funkciją μ praplėsti ir $\sigma(\mathcal{A})$ aibėms, kad ir naujojoje apibrėžimo srityje ji būtų matas.

Imkime bet kurią aibę $A \subset \Omega$. Apibrėžkime aibės funkciją

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),\ A_k \in \mathcal{A}\ (k = 1, 2, ...),\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A\Big\};$$

Kitais žodžiais, tai funkcijai apibrėžti reikia imti visus galimus aibės A denginius algebros $\mathcal{A}$ aibių sekų sąjungomis; po to reikia imti tų sekų aibių matų sumų apatinį rėžį. Kadangi $\Omega \in \mathcal{A}$, tai toks denginys visada yra galimas. Funkciją $\mu^*(A)$ pavadinsime aibės A *išoriniu matu*. Panagrinėsime jo savybes.

1 lema. *Jei $A \in \mathcal{A}$, tai $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

Į r o d y m a s. Kadangi aibę A galime uždengti seka $A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup ...$, tai iš μ^* apibrėžimo išplaukia, kad $\mu^*(A) \le \mu(A)$. Imkime bet kurį aibės A denginį

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Iš 3.3 teoremos ir 3.2 teoremos 2 išvados gauname

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap A_k)\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Imdami apatinį rėžį pagal visus galimus denginius, gausime $\mu(A) \le \mu^*(A)$. Todėl $\mu^*(A) = \mu(A)$ visoms aibėms $A \in \mathcal{A}$. □

Iš čia, tarp kitko, išplaukia $\mu^*(\varnothing) = 0$.

2 lema. *Jei $A \subset B \subset \Omega$, tai*

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B).$$

Į r o d y m a s. Kiekvienas aibės B denginys yra ir aibės A denginys. □

3 lema. *Jei A_k $(k = 1, 2, ...)$ yra algebros $\mathcal{A}$ aibių seka, tai*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Į r o d y m a s. Imkime bet kurią aibę A_k ir bet kurį $\varepsilon > 0$. Iš išorinio mato apibrėžimo išplaukia, jog galime rasti tokį aibės A_k denginį aibėmis A_{kj}, kad būtų

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{kj}) \le \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Kadangi

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k,j=1}^{\infty} A_{kj},$$

tai

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k,j=1}^{\infty} \mu(A_{kj}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Tačiau ε yra bet koks. Todėl

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k). \ \Box$$

Aibės Ω poaibį A vadinsime μ^* *mačiu*, jei

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E),$$

koks bebūtų aibės Ω poaibis E. Ši nelygybė visada teisinga, kai $\mu^*(E) = \infty$. Todėl pakanka ją patikrinti tik aibėms E su $\mu^*(E) < \infty$. Kadangi $E = (A \cap E) \cup (A^c \cap E)$, tai iš 3 lemos gauname

$$\mu^*(E) \le \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E).$$

Vadinasi, aibė A yra μ^* mati tada ir tik tada, kai

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E),$$

koks bebūtų aibės Ω poaibis E.

Visų μ^* mačių aibių sistemą žymėsime $\mathcal{A}^*$.

4 lema. *Sistema $\mathcal{A}^*$ yra algebra.*

Įrodymas. Tiesiog iš apibrėžimo išplaukia, kad $\Omega \in \mathcal{A}^*$. Jei $A \in \mathcal{A}^*$, tai ir $A^c \in \mathcal{A}^*$, nes μ^* matumas yra simetriškas A ir A^c atžvilgiu.

Įrodysime, kad $\mathcal{A}^*$ yra uždara aibių jungimo atžvilgiu. Imkime dvi aibes A ir B iš $\mathcal{A}^*$. Kadangi

$$A \cup B = \big(A \cap (B \cup B^c)\big) \cup \big(B \cap (A \cup A^c)\big) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B),$$

tai

$$\mu^*\big((A \cup B) \cap E\big) \le \mu^*(A \cap B \cap E) + \mu^*(A \cap B^c \cap E) + \mu^*(A^c \cap B \cap E).$$

Pridėję prie abiejų nelygybės pusių po $\mu^*(A^c \cap B^c \cap E)$ ir atkreipę dėmesį į tai, kad $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B$, iš aibių A ir B μ^* matumo gauname

$$\begin{aligned}
&\mu^*\big((A \cup B) \cap E\big) + \mu^*\big((A \cup B)^c \cup E\big) \le \mu^*(A \cap B \cap E) + \\
&+ \mu^*(A \cap B^c \cap E) + \mu^*(A^c \cap B \cap E) + \mu^*(A^c \cap B^c \cap E) = \\
&= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E).
\end{aligned}$$

Taigi $A \cup B$ yra μ^* mati. □

5 lema. *Aibės funkcija μ^* yra baigiai adityvi algebroje $\mathcal{A}^*$.*

Įrodymas. Tarkime, kad $A \in \mathcal{A}^*$ ir $B \in \mathcal{A}^*$ viena kitos nedengia. Pagal μ^* apibrėžimą

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*\big((A \cup B) \cap A\big) + \mu^*\big((A \cup B) \cap A^c\big) = \mu^*(A) + \mu^*(B). \ \square$$

6 lema. *Algebra $\mathcal{A}^*$ yra σ algebra, o μ^* yra visiškai adityvi.*

Įrodymas. Reikia parodyti, kad bet kurios aibių $A_k \in \mathcal{A}^*$ $(k = 1, 2, ...)$ sekos sąjunga A priklauso sistemai $\mathcal{A}^*$. Tarkime, kad tos aibės kas dvi neturi bendrų elementų. Kadangi

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}^*,$$

tai

$$\mu^*(E) = \mu^*(B_n \cap E) + \mu^*(B_n^c \cap E) \ge \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k \cap E) + \mu^*(A^c \cap E).$$

Iš čia, kai $n \to \infty$, gauname

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E).$$

Vadinasi, $A \in \mathcal{A}^*$. Paskutinėje nelygybėje aibę E pakeitę aibe A, gauname

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \geq \mu^*(A).$$

Todėl

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Kartu įrodėme, kad funkcija μ^* yra visiškai adityvi.

Jei aibės A_k yra bet kokios, tai sąjungą A galime išreikšti μ^* mačiomis disjunkčiomis aibėmis

$$A = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup [A_3 \backslash (A_1 \cup A_2)] \cup [A_4 \backslash (A_1 \cup A_2 \cup A_3)] \cup \ldots \ \square$$

7 lema. $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^*$.

Į r o d y m a s. Tarkime, kad $A \in \mathcal{A}$. Imkime bet kurią aibę $E \subset \Omega$ ir bet kurį $\varepsilon > 0$. Galima rasti tokį E denginį aibėmis $A_k \in \mathcal{A}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, kad būtų

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Kadangi $\mu(A_k) = \mu(A \cap A_k) + \mu(A^c \cap A_k)$, tai

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_k) \geq$$

$$\geq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap A_k)\Big) + \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A^c \cap A_k)\Big) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E).$$

Tačiau ε yra bet koks. Todėl $\mu^*(E) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$. Vadinasi, A yra μ^* mati. Taigi $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Kadangi $\sigma(\mathcal{A})$ yra mažiausia σ algebra, kuriai priklauso $\mathcal{A}$, tai ji turi tilpti σ algebroje $\mathcal{A}^*$. $\square$

Iš 1, 6 ir 7 lemų matome, kad μ^* yra mato μ tęsinys. Ar jis vienintelis?

8 lema. *μ tęsinys yra vienintelis.*

Į r o d y m a s. Iš pradžių įrodysime mato tęsinio vienatį, kai funkcija μ yra baigtinė. Tarkime, kad μ_1 ir μ_2 yra du μ tęsiniai. Pažymėkime $\mathcal{K}$ sistemą aibių, kurioms μ_1 ir μ_2 sutampa. Nagrinėsime $\mathcal{K}$ savybes.

Aišku, $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$. Įrodysime, kad $\mathcal{K}$ yra monotoninė aibių klasė. Tarkime, kad A_n $(n = 1, 2, ...)$ yra monotoniška aibių iš $\mathcal{K}$ seka. Parodysime, kad tos sekos riba A priklauso $\mathcal{K}$. Kaip ir 3.5 ir 3.6 teoremų įrodymuose (matas μ yra baigtinis!), gauname, kad $\mu_1(A_n) \to \mu_1(A)$, $\mu_2(A_n) \to \mu_2(A)$, kai $n \to \infty$. Kadangi aibės A_n priklauso $\mathcal{K}$, tai $\mu_1(A_n) = \mu_2(A_n)$. Vadinasi, $\mu_1(A) = \mu_2(A)$, taigi $A \in \mathcal{A}$. Pagal 1.6 teoremą klasei $\mathcal{K}$ priklauso $\sigma(\mathcal{A})$. Taigi matai μ_1 ir μ_2 sutampa σ algebroje $\sigma(\mathcal{A})$.

Dabar tarkime, kad μ yra σ baigtinis algebroje $\mathcal{A}$, t. y. egzistuoja skaiti sistema disjunkčių aibių $C_k \in \mathcal{A}$ $(k = 1, 2, ...)$, kurių

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \Omega$$

ir kurioms $\mu(C_k) < \infty$ $(k = 1, 2, ...)$. Imkime aibės C_k poaibių algebrą $\mathcal{A}_k = \{A \cap C_k : A \in \mathcal{A}\}$ ir σ algebrą $\sigma(\mathcal{A}_k)$, kuri, aišku, bus sudaryta iš aibių $A \cap A_k$, $A \in \sigma(\mathcal{A})$. Jei μ_1 ir μ_2 yra du μ tęsiniai iki mato σ algebroje $\sigma(\mathcal{A})$, tai iš pirmojoje dalyje įrodyto teiginio išplaukia, kad bet kokiam k jie sutampa visoms $\sigma(\mathcal{A}_k)$ aibėms. Vadinasi, jie sutampa ir visoms $\sigma(\mathcal{A})$ aibėms, nes kiekvienai $A \in \sigma(\mathcal{A})$

$$\mu_1(A) = \mu_1\Big(\bigcup_k (A \cap A_k)\Big) = \sum_k \mu_1(A \cap A_k) =$$
$$= \sum_k \mu_2(A \cap A_k) = \mu_2\Big(\bigcup_k (A \cap A_k)\Big) = \mu_2(A). \ \Box$$

Įrodėme labai naudingą teoremą apie mato pratęsimą.

Teorema (Karateodorio). *Tarkime, kad netuščios aibės Ω poaibių algebroje $\mathcal{A}$ apibrėžtas matas μ. Tada galime rasti matą ν, nusakytą algebros $\mathcal{A}$ generuotoje σ algebroje $\sigma(\mathcal{A})$ ir tenkinantį sąlygą $\nu(A) = \mu(A)$, kai $A \in \mathcal{A}$. Jei matas μ yra σ baigtinis, tai ir matas ν taip pat σ baigtinis ir vienintelis. Jei matas μ yra baigtinis, tai ir matas ν taip pat baigtinis.*

5. PUSALGEBRIAI

Mato teorijoje praverčia dar viena aibių sistema.

Aibės Ω poaibių sistema $\mathcal{C}$ yra vadinama *pusalgebriu*, jei ji tenkina sąlygas:

I. $\varnothing \in \mathcal{C}$.

II. $\Omega \in \mathcal{C}$.

III. Jei $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$, tai ir $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{C}$.

IV. Jei $A \in \mathcal{C}$, tai papildinį A^c galima išreikšti baigtine sistemos C disjunkčių aibių sąjunga.

1 p a v y z d y s. Kiekviena algebra yra pusalgebris.

2 p a v y z d y s. Tarkime, kad $\Omega = R$, o $\mathcal{D}$ yra sudaryta iš $\varnothing, R$ ir visų $(-\infty, a)$, $[a, \infty)$ ir $[a, b)$ intervalų; čia $a, b \in R$. Nesunku patikrinti, kad $\mathcal{D}$ yra pusalgebris.

Pusalgebris $\mathcal{C}$ generuoja algebrą $a(\mathcal{C})$. Kokia jos sandara?

1 teorema. *Sistema visų baigtinių sąjungų, sudarytų iš pusalgebrio $\mathcal{C}$ disjunkčių aibių, sutampa su $a(\mathcal{C})$.*

Į r o d y m a s. Pažymėkime $\mathcal{A}$ aibę visų baigtinių sąjungų, sudarytų iš pusalgebrio $\mathcal{C}$ disjunkčių aibių. Parodysime, kad $\mathcal{A}$ yra algebra.

Pirmiausia aišku, kad $\varnothing$ ir Ω priklauso $\mathcal{A}$. Toliau, jei

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j, \ \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

yra disjunkčių sistemos $\mathcal{C}$ aibių baigtinės sąjungos, tai

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\Big) \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) = \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{n}(A_j \cap B_k)$$

taip pat priklauso $\mathcal{A}$.

Įrodysime, kad $\mathcal{A}$ yra uždara papildymo atžvilgiu. Vėl imkime baigtinę disjunkčių $\mathcal{C}$ aibių sąjungą $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Gauname lygybę

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c.$$

Tačiau aibes A_k^c galime išreikšti baigtinėmis disjunkčių aibių iš $\mathcal{C}$ sąjungomis. Todėl $\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c$ yra taip pat disjunkčių aibių sąjunga, vadinasi, priklauso $\mathcal{A}$.

Lieka įrodyti, kad $\mathcal{A}$ yra mažiausia algebra, kuriai priklauso $\mathcal{C}$. Tačiau ji tokia ir yra, nes jai turi priklausyti visos baigtinės disjunkčių aibių iš $\mathcal{C}$ sąjungos. □

2 teorema. *Tarkime, kad pusalgebryje $\mathcal{C}$ yra apibrėžta baigiai adityvi, neneigiama funkcija $\mu : \mathcal{C} \to \bar{R}$, tenkinanti sąlygą $\mu(\varnothing) = 0$. Algebroje $\mathcal{A} = a(\mathcal{C})$ apibrėžkime funkciją $\mu' : \mathcal{A} \to \bar{R}$ tokiu būdu. Jei A yra pusalgebrio $\mathcal{C}$ disjunkčių aibių baigtinė sąjunga*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

tai

$$\mu'(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Tada μ' yra neneigiama, baigiai adityvi ir vienareikšmiškai nusakyta aibės funkcija, apibrėžta algebroje $\mathcal{A}$. Jei μ yra visiškai adityvi, tai μ' yra matas. Pastaruoju atveju μ' galima praplėsti iki mato, apibrėžto pusalgebrio $\mathcal{C}$ generuotoje σ algebroje $\sigma(\mathcal{C})$. Jei μ yra σ baigtinė, tai matas μ' yra vienintelis.

P a s t a b a. $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Į r o d y m a s. Parodysime, kad $\mu'(A)$ reikšmė priklauso tik nuo aibės $\mathcal{A}$ ir nepriklauso nuo jos išraiškos pusalgebrio $\mathcal{C}$ disjunkčių aibių sąjunga. Tarkime, kad

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{j=1}^{m} B_j; \quad A_k \in \mathcal{C} \ (k = 1, ..., n), \ B_j \in \mathcal{C} \ (j = 1, ..., m)$$

yra dvi tokios išraiškos. Įrodysime, kad

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

Teisingos lygybės

$$A_k = A_k \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{m} B_j \Big) = \bigcup_{j=1}^{m} (A_k \cap B_j),$$

$$B_j = B_j \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \Big) = \bigcup_{k=1}^{n} (B_j \cap A_k).$$

Iš funkcijos μ adityvumo pusalgebryje $\mathcal{C}$ gauname

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{m} (A_k \cap B_j) \Big) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(A_k \cap B_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap B_j) \Big) = \sum_{j=1}^{m} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B_j) \Big) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

Funkcijos μ' adityvumą (arba σ adityvumą) įrodome analogiškai. Tam vėl reikės panaudoti funkcijos μ adityvumą (arba σ adityvumą). Tarkime, kad L yra baigtinė (arba skaiti antruoju atveju) natūraliųjų skaičių aibė. Tarkime, toliau, kad

$$A = \bigcup_{j \in L} A^j, \quad A \in \mathcal{A}, \ A^j \in \mathcal{A} \quad (j \in L)$$

ir aibės A^j yra disjunkčios. Išreikšime aibes A ir A^j pusalgebrio $\mathcal{C}$ disjunkčių aibių baigtinėmis sąjungomis

$$A = \bigcup_{l=1}^{r} A_l,\ \ A_l \in \mathcal{C} \quad (l = 1, ..., r),$$
$$A^j = \bigcup_{k=1}^{r_j} A_k^j,\ \ A_k^j \in \mathcal{C} \quad (j = 1, ..., r_j).$$

Pasinaudosime lygybėmis

$$A_l = A \cap A_l = \Big(\bigcup_{j\in L} A^j\Big) \cap A_l = \Big(\bigcup_{j\in L}\bigcup_{k=1}^{r_j} A_k^j\Big) \cap A_l = \bigcup_{j\in L}\bigcup_{k=1}^{r_j}(A_k^j \cap A_l),$$
$$A_k^j = A \cap A_k^j = \Big(\bigcup_{l=1}^{r} A_l\Big) \cap A_k^j = \bigcup_{l=1}^{r}(A_l \cap A_k^j).$$

Iš funkcijos μ adityvumo (σ adityvumo) pusalgebryje $\mathcal{C}$ gauname

$$\mu'(A) = \sum_{l=1}^{r}\mu(A_l) = \sum_{l=1}^{r}\sum_{j\in L}\sum_{k=1}^{r_j}\mu(A_l \cap A_k^j) =$$
$$= \sum_{j\in L}\sum_{k=1}^{r_j}\sum_{l=1}^{r}\mu(A_l \cap A_k^j) = \sum_{j\in L}\sum_{k=1}^{r_j}\mu(A_k^j) = \sum_{j\in L}\mu'(A^j).$$

Pratęsimo vienatis yra akivaizdi. Paskutinis teoremos teiginys išplaukia iš toremos apie mato pratęsimą. □

6. LEBEGO–STYLTJESO MATAS

Tirsime dabar 5 skyrelio pradžioje nusakytą pusalgebrį $\mathcal{D}$.

Imkime baigtinę realiąją nemažėjančią ir tolydžią iš kairės funkciją $F(x)$, apibrėžtą tiesėje R. Ši funkcija turi ribas

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x), \quad F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Apibrėšime pusalgebryje $\mathcal{D}$ aibės funkciją $\mu = \mu_F$ lygybėmis

$$\mu\big([a,b)\big) = F(b) - F(a), \quad -\infty < a < b < \infty,$$
$$\mu\big((-\infty,b)\big) = F(b) - F(-\infty), \quad -\infty < b < \infty,$$
$$\mu\big([a,\infty)\big) = F(\infty) - F(a), \quad -\infty < a < \infty,$$
$$\mu(R) = \mu\big((-\infty,\infty)\big) = F(\infty) - F(-\infty).$$

1 lema. *Jei intervalai I ir I_k $(k=1,2,...,n)$ priklauso $\mathcal{D}$ ir yra baigtiniai, be to, I_k yra disjunktūs ir*

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_k \subset I,$$

tai

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) \leq \mu(I).$$

Į r o d y m a s. Tarkime, kad $I=[a,b),\ I_k=[a_k,b_k)$. Sakykime, jog intervalai I_k sunumeruoti taip, kad

$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq b.$$

Tada

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) &= \sum_{k=1}^{n} \big[F(b_k)-F(a_k)\big] \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \big[F(b_k)-F(a_k)\big] + \sum_{k=1}^{n-1} \big[F(a_{k+1})-F(b_k)\big] = \\ &= F(b_n)-F(a_1) \leq F(b)-F(a) = \mu(I). \ \square\end{aligned}$$

2 lema. *Tarkime, kad uždaras intervalas $[a,b]$ yra padengtas atvirų intervalų sistemos $J_k=(a_k,b_k)$ $(k=1,...,n)$; tada*

$$F(b)-F(a) \leq \sum_{k=1}^{n} \big[F(b_k)-F(a_k)\big].$$

Į r o d y m a s. Iš intervalų J_k parinksime dalį jų tokiu būdu. Imkime k_1 su sąlyga, kad $a \in J_{k_1}$. Jei $b \in J_{k_1}$, tai parinkimo procesas baigtas. Jei $b \notin J_{k_1}$, tai jį tęsiame toliau. Rasime k_2 su sąlyga $b_{k_1} \in J_{k_2}$ ir t. t. Šį procesą tęsime tol, kol rasime kurį nors m su sąlyga $b \in J_{k_m}$. Turėsime

$$[a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{m} J_{k_j}$$

ir

$$\begin{aligned} a_{k_1} &< a < b_{k_1}, \\ a_{k_{j+1}} &< b_{k_j} < b_{k_{j+1}}, \quad (j=1,...,m-1), \\ a_{k_m} &< b < b_{k_m}. \end{aligned}$$

Gausime

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)\le F(b_{k_m})-F(a_{k_1}) &=\\ &=F(b_{k_1})-F(a_{k_1})+\sum_{j=1}^{m-1}\bigl[F(b_{k_{j+1}})-F(b_{k_j})\bigr]\le\\ &\le F(b_{k_1})-F(a_{k_1})+\sum_{j=1}^{m-1}\bigl[F(b_{k_{j+1}})-F(a_{k_{j+1}})\bigr]=\\ &=\sum_{j=1}^{m}\bigl[F(b_{k_j})-F(a_{k_j})\bigr]\le\\ &\le\sum_{k=1}^{n}\bigl[F(b_k)-F(a_k)\bigr].\ \square\end{aligned}$$

Teorema. *Funkcija $\mu_F=\mu$ yra visiškai adityvi pusalgebryje $\mathcal{D}$.*

Į r o d y m a s. Tarkime, kad

$$I=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

ir intervalai I_k kas du neturi bendrų taškų. Įrodysime, kad

$$\mu(I)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(I_k). \tag{1}$$

1. Tarkime, kad $I=[a,b),\ I_k=[a_k,b_k)$, a ir b – baigtiniai skaičiai. Iš 1 lemos kiekvienam natūraliajam n gauname

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(I_k)\le\mu(I).$$

Perėję prie ribos, kai $n\to\infty$, gauname

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(I_k)\le\mu(I). \tag{2}$$

Pasistengsime įrodyti, kad teisinga nelygybė su priešingu ženklu. Imkime ε su sąlyga $0<\varepsilon<b-a$. Pažymėkime $I^\varepsilon=[a,b-\varepsilon]$. Funkcija F yra tolydi iš kairės. Todėl, paėmę bet kurį k, galime rasti tokį $\delta_k>0$, kad

$$\mu\bigl([a_k-\delta_k,a_k)\bigr)=F(a_k)-F(a_k-\delta_k)<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Pažymėkime $I_k^\varepsilon=(a_k-\delta_k,b_k)$. Aišku, kad

$$I^\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^\varepsilon .$$

Iš Heinės[1]–Borelio teoremos išplaukia, kad egzistuoja baigtinis rinkinys intervalų $I_{k_1}^\varepsilon, ..., I_{k_n}^\varepsilon$, kurių sąjunga padengia I^ε:

$$I^\varepsilon \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_{k_j}^\varepsilon .$$

Pasinaudosime 2 lema. Gausime

$$F(b-\varepsilon) - F(a) \le \sum_{j=1}^{n} \big[F(b_{k_j}) - F(a_{k_j} - \delta_{k_j})\big].$$

Iš čia

$$\begin{aligned} F(b-\varepsilon) - F(a) &\le \sum_{j=1}^{n} \Big[F(b_{k_j}) - F(a_{k_j}) + \frac{\varepsilon}{2^{k_j}}\Big] \le \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \big[F(b_k) - F(a_k)\big] + \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Perėję prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$, gauname

$$\mu(I) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k).$$

Iš čia ir iš (2) išplaukia (1) formulė.

2. Lieka parodyti, kad (1) formulė teisinga, kai intervalai gali būti ir begaliniai. Iš μ apibrėžimo

$$\mu(I) = \lim_{n\to\infty} \mu\big(I \cap [-n, n)\big).$$

Todėl

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \lim_{n\to\infty} \Big(\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\big) \cap [-n, n)\Big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \big(I_k \cap [-n, n)\big)\Big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu\big(I_k \cap [-n, n)\big). \end{aligned}$$

[1] Heinrich Eduard Heine (1821–1881) – vokiečių matematikas.

Paskutiniame reiškinyje galime sukeisti sumavimo ir perėjimo prie ribos operacijas. Todėl iš μ apibrėžimo gauname

$$\mu(I) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \mu\big(I_k \cap [-n, n)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k). \ \square$$

Iš 5.2 ir šio skyrelio teoremų išplaukia, kad funkciją μ_F, apibrėžtą pusalgebryje $\mathcal{D}$, galime vienareikšmiškai pratęsti iki mato, nusakyto visoms tiesės taškų Borelio aibėms. Šį matą vėl žymėsime μ_F ir vadinsime *Styltjeso matu.* Specialiu atveju, kai $F(x) \equiv x$, matą vadinsime *Borelio matu.* Turime erdvę su matu $\{R, \mathcal{B}, \mu_F\}$. Remdamiesi 3.8 teorema, šią erdvę galime praplėsti iki pilnosios erdvės $\{R, \mathcal{B}^*, \bar{\mu}_F\}$. Gautąjį matą vadinsime *Lebego–Styltjeso matu.* Kai $F(x) \equiv x$, matą $\bar{\mu}_F$ vadinsime *Lebego matu*, o algebros $\mathcal{B}^*$ aibes – *mačiosiomis Lebego prasme* aibėmis.

Funkciją F, kurios pagalba apibrėžėme matą μ_F, galime pavadinti *generuojančiąja.* Kyla klausimas, ar kiekvieną matą, apibrėžtą mačioje erdvėje $\{R, \mathcal{B}\}$ ir baigtiniuose intervaluose įgyjantį baigtines reikšmes, atitinka kuri nors generuojanti funkcija?

Lengvai gauname, kad tokių funkcijų yra be galo daug, tačiau jos skiriasi tik konstanta. Fiksuokime kurį nors tašką a_0 ir apibrėžkime funkciją

$$F(x) = \begin{cases} \mu\big([a_0, x)\big), & \text{kai } x > a_0, \\ -\mu\big([x, a_0)\big), & \text{kai } x \le a_0. \end{cases}$$

Iš mato monotoniškumo išplaukia funkcijos F monotoniškumas. Tolydumas iš kairės išplaukia iš mato tolydumo: jei $x > a_0$ ir $x_n \nearrow x$, tai

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_0, x_n) = [a_0, x)$$

ir

$$F(x_n) = \mu\big([a_0, x_n)\big) \to \mu\big([a_0, x)\big) = F(x);$$

jei $x \le a_0$ ir $x_n \nearrow x$, tai

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [x, a_0)$$

ir

$$F(x_n) = -\mu\big([x_n, a_0)\big) \to -\mu\big([x, a_0)\big) = F(x).$$

Parodysime, kad F generuoja matą μ. Turime

$$\mu\big([a, b)\big) = \begin{cases} \mu\big([a_0, b)\big) - \mu\big([a_0, a)\big) = F(b) - F(a), & \text{kai } a_0 < a, \\ \mu\big([a, a_0)\big) + \mu\big([a_0, b)\big) = F(b) - F(a), & \text{kai } a \le a_0 < b, \\ \mu\big([a, a_0)\big) - \mu\big([b, a_0)\big) = F(b) - F(a), & \text{kai } b < a_0. \end{cases}$$

Tarkime, kad dvi funkcijos F_1 ir F_2 generuoja tą patį matą μ. Fiksuokime tašką a_0. Tada

$$F_1(x) - F_1(a_0) = F_2(x) - F_2(a_0) = \begin{cases} \mu\big([a_0, x)\big), & \text{kai } x > a_0, \\ -\mu\big([x, a_0)\big), & \text{kai } x \le a_0. \end{cases}$$

Todėl

$$F_1(x) - F_2(x) = F_1(a_0) - F_2(a_0) = const.$$

Vadinasi, bet kurios dvi funkcijos, generuojančios tą patį matą, skiriasi tik konstanta.

Trumpai nurodysime būdą, kaip išdėstytą teoriją apibendrinti daugiamačiam atvejui. Imkime intervalus erdvėje R^s

$$I = I_1 \times ... \times I_s;$$

čia I_k $(k = 1, ..., s)$ yra intervalai $[a, b), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, \infty)$; $a, b \in R$. Visi tokie intervalai sudaro pusalgebrį.

Tarkime, kad funkcija $F(x_1, ..., x_s)$ yra apibrėžta ir baigtinė erdvėje R^s bei tolydi iš kairės kiekvieno argumento atžvilgiu. Pareikalausime, kad ta funkcija tenkintų dar vieną sąlygą. Jai nusakyti įvesime dar vieną pažymėjimą. Tarkime, kad $I = [a_1, b_1) \times ... \times [a_s, b_s)$ yra baigtinis intervalas erdvėje R^s. Imkime kartotinį skirtumą

$$\begin{aligned} \Delta_I F = {} & F(b_1, b_2, ..., b_s) - F(a_1, b_2, ..., b_s) - F(b_1, a_2, b_3, ..., b_s) - ... - \\ & - F(b_1, ..., b_{s-1}, b_s) + F(a_1, a_2, b_3, ..., b_s) + \\ & + F(a_1, b_2, a_3, b_4, ..., b_s) + ... + F(b_1, ..., b_{s-2}, b_{s-1}, a_s) + ... + \\ & + (-1)^s F(a_1, a_2, ..., a_s), \end{aligned}$$

arba trumpiau –

$$\Delta_I F = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_s} (-1)^{\nu_1 + \cdots + \nu_s} F(\nu_1 a_1 + (1 - \nu_1) b_1, ..., \nu_s a_s + (1 - \nu_s) b_s);$$

čia $\nu_1, ..., \nu_s$ nepriklausomai vienas nuo kito įgyja reikšmes 0 ir 1. Pareikalausime, kad mūsų funkcija tenkintų sąlygą

$$\Delta_I F \ge 0,$$

koks bebūtų intervalas I. Iš šios sąlygos išplaukia, kad funkcija F yra nemažėjanti kiekvieno argumento atžvilgiu. Parodysime tai pirmajam argumentui. Leiskime skaičiams a_k $(k = 2, ..., s)$ konverguoti į b_k iš kairės. Gausime

$$F(b_1, ..., b_s) - F(a_1, ..., b_s) - F(a_1, b_2, ..., b_s) \ge 0.$$

Pasinaudoję schema, kurią išdėstėme vienamačiu atveju, galime sukonstruoti erdvę su matu $\{R^s, \mathcal{B}^s, \mu_F\}$. Čia μ_F bus vėl vadinamas Styltjeso matu.

Papildę šią erdvę iki pilnosios, gausime Lebego–Styltjeso matą. Kai $F(x_1, ..., x_s) \equiv x_1...x_s$, – gausime atitinkamai Borelio bei Lebego matus.

7. MAČIOSIOS FUNKCIJOS

Klasikinėje analizėje pagrindinį vaidmenį vaidina tolydžiosios funkcijos. Jų klasė yra uždara paprasčiausių aritmetinių operacijų atžvilgiu: dviejų tolydžių funkcijų suma, skirtumas, sandauga ir dalmuo (jei jis turi prasmę) yra tolydžiosios funkcijos. Tačiau taip nėra, kai nagrinėjame pagrindinę matematinės analizės operaciją – perėjimą prie ribos. Ne visada tolydžių funkcijų sekos riba, jei ji egzistuoja, yra tolydi funkcija. Dėl šios priežasties turime daug nepatogumų. Teko tolydžiųjų funkcijų klasę praplėsti, įvedant vadinamąsias mačiąsias funkcijas.

Tarkime, turime mačiąją erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}\}$. Funkcija $f : \Omega \to \bar{R}$ vadinama $\mathcal{A}$ *mačiąja*, jei pirmavaizdis

$$f^{-1}(B) = \{\omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

(yra $\mathcal{A}$ mačioji aibė), kai B yra bet kuri Borelio aibė iš $\bar{B}$. Kai σ algebra $\mathcal{A}$ yra fiksuota ir nėra kitų, sakome tiesiog *mačioji funkcija*.

Kai $\Omega = B$, o $\mathcal{A} = \bar{B}$ yra išplėstinė realiųjų skaičių visų Borelio aibių sistema, tai $\bar{B}$ mačioji funkcija $f : \bar{B} \to \bar{R}$ yra vadinama *Borelio funkcija*.

Mačiosios funkcijos sąvoką galima apibendrinti – kalbėti apie mačiuosius atvaizdžius. Tarkime, turime dvi mačiąsias erdves $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ ir $\{\Gamma, \mathcal{H}\}$. Sakome, kad atvaizdis $f : \Omega \to \Gamma$ yra $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$ *matusis*, jei kiekvienai aibei $E \in \mathcal{H}$ pirmavaizdis $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$.

Priminsime, kad pirmavaizdžio sudarymo operacija turi savybes:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\varnothing) &= \varnothing, \\ f^{-1}\Big(\bigcup_\lambda B_\lambda\Big) &= \bigcup_\lambda f^{-1}(B_\lambda), \\ f^{-1}\Big(\bigcap_\lambda B_\lambda\Big) &= \bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda), \\ f^{-1}(B^c) &= \big(f^{-1}(B)\big)^c; \end{aligned}$$

čia B – bet kuri aibė, $\{B_\lambda\}$ – bet kuri aibių sistema.

Jei norime patikrinti, ar funkcija $f : \Omega \to \bar{R}$ yra mati, turime pagal apibrėžimą patikrinti, ar visų Borelio aibių B pirmavaizdžiai $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Tokio patikrinimo nereikia, kai sistema $\mathcal{A}$ sudaryta iš visų aibės Ω poaibių: $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Ir kitais atvejais tikrinimą galime "racionalizuoti": pakanka imti tik aibes, kurių generuota σ algebra sutampa su visų Borelio aibių sistema.

1 teorema. *Tarkime, kad $\mathcal{C}$ yra kuri nors tiesės taškų aibių sistema, kurios generuota σ algebra yra sudaryta iš visų Borelio aibių: $\sigma(\mathcal{C}) = \bar{\mathcal{B}}$. Funkcija $f : \Omega \to \bar{R}$ yra mati tada ir tik tada, kai pirmavaizdis $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, kokia bebūtų aibė $C \in \mathcal{C}$.*

Į r o d y m a s. Būtinumas yra trivialus.

Įrodysime pakankamumą. Tarkime, kad $\mathcal{D}$ yra sistema tų Borelio aibių D, kurių pirmavaizdžiai $f^{-1}(D) \in \mathcal{A}$. Iš pirmavaizdžio sudarymo operacijos savybių išplaukia, kad $\mathcal{D}$ yra σ algebra. Tačiau Borelio aibių sistema yra mažiausia σ algebra, kuriai priklauso sistema $\mathcal{C}$. Vadinasi, $\bar{\mathcal{B}} \subset \mathcal{D}$. Todėl $\mathcal{D}$ turi sutapti su $\bar{\mathcal{B}}$.□

Išvada. *Funkcija $f : \Omega \to \bar{R}$ yra mati tada ir tik tada, kai $\{\omega : f(\omega) < < x\} \in \mathcal{A}$, koks bebūtų $x \in \bar{R}$.*

Į r o d y m a s. Intervalų sistema $[-\infty, x)$, $x \in \bar{R}$, generuoja Borelio aibių σ algebrą $\bar{\mathcal{B}}$.□

Išskirsime paprasčiausių mačiųjų funkcijų klasę. Tai – paprastosios funkcijos. *Paprastąja funkcija* vadinsime mačiąją funkciją, įgyjančią tik baigtinį skaičių reikšmių, kurios yra taip pat baigtinės.

Tarkime, kad paprastoji funkcija φ įgyja reikšmes $y_1, ..., y_r$ ir visos yra skirtingos. Pažymėkime

$$A_k = \varphi^{-1}(y_k) = \{\omega : \varphi(\omega) = y_k\}.$$

Šios aibės turi būti mačios (vieno taško aibės yra Borelio aibės).

Atvirkščiai, jei funkcija φ įgyja baigtinį skaičių baigtinių reikšmių $y_1, ..., y_r$ ir jos yra skirtingos, o aibės $A_k = \varphi^{-1}(y_k)$ yra mačios, tai funkcija φ yra mati, t. y. paprastoji. Iš tikrųjų kokia bebūtų Borelio aibė B,

$$\varphi^{-1}(B) = \bigcup_{y_k \in B} \varphi^{-1}(y_k) = \bigcup_{y_k \in B} A_k.$$

Funkcija $\varphi(\omega)$, lygi baigtinei konstantai, yra paprastoji funkcija.

Mums pravers aibės indikatoriaus sąvoka. Kai $A \subset \Omega$, tai jos *indikatoriumi* vadinsime funkciją

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \omega \in A, \\ 0, & \text{kai } \omega \in A^c. \end{cases}$$

Paminėsime keletą indikatoriaus savybių:

$$\mathbf{1}_{A^c}(\omega) = 1 - \mathbf{1}_A(\omega);$$

$$\mathbf{1}_{A \cup B}(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega) + \mathbf{1}_B(\omega), \text{ kai } A \cap B = \varnothing;$$

$$\mathbf{1}_{A \cap B}(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega) \cdot \mathbf{1}_B(\omega).$$

Aišku, mačios aibės indikatorius yra paprastoji funkcija, nes ji įgyja dvi reikšmes 0 ir 1 ir

$$\{\omega : \mathbf{1}_A(\omega) = 1\} = A, \quad \{\omega : \mathbf{1}_A(\omega) = 0\} = A^c.$$

Kiekvieną paprastąją funkciją galima išreikšti mačių aibių indikatorių tiesine kombinacija. Tarkime, kad φ yra paprastoji funkcija ir įgyja skirtingas reikšmes $y_1, ..., y_r$. Pažymėkime

$$A_k = \{\omega : \varphi(\omega) = y_k\}.$$

Tada

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{r} y_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega).$$

Atvirkščiai, jei A_k yra mačios, kiekviena tokia išraiška yra, aišku, paprastoji funkcija. Galime atsisakyti reikalavimo, kad y_k būtų visi skirtingi; pakanka aibes, kurias atitinka vienodi y_k, sujungti. Pagaliau, tas tiks ir tada, kai visų aibių A_k sąjunga nėra lygi visai aibei Ω; tokia išraiška yra paprastoji funkcija. Pakanka aibei $\Omega \setminus \cup_k A_k$ priskirti reikšmę 0.

2 teorema. *Jei φ yra paprastoji funkcija, c – baigtinė konstanta, tai $c\varphi$, taip pat $1/\varphi$, kai $\varphi(\omega) \neq 0$ visoje aibėje Ω, yra paprastosios funkcijos.*

Į r o d y m a s. Jei

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{r} y_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega),$$

tai

$$c\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{r} (cy_k) \mathbf{1}_{A_k}(\omega),$$

$$\frac{1}{\varphi(\omega)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{y_k} \mathbf{1}_{A_k}(\omega). \ \square$$

3 teorema. *Jei φ ir ψ yra paprastosios funkcijos, tai $\varphi + \psi$, $\varphi \cdot \psi$, φ/ψ (kai $\psi \neq 0$), $\min(\varphi, \psi)$, $\max(\varphi, \psi)$ yra taip pat paprastosios funkcijos.*

Į r o d y m a s. Tarkime, kad

(1) $$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{r} y_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega),$$

(2) $$\psi(\omega) = \sum_{l=1}^{s} z_l \mathbf{1}_{B_l}(\omega);$$

čia

$$\bigcup_{k=1}^{r} A_k = \Omega, \quad \bigcup_{l=1}^{s} B_l = \Omega,$$
$$A_j \cap A_k = \varnothing \quad (j \neq k), \quad B_l \cap B_m = \varnothing \quad (l \neq m).$$

Kadangi

$$A_k = A_k \cap \Omega = A_k \cap \Big(\bigcup_{l=1}^{s} B_s\Big) = \bigcup_{l=1}^{s} (A_k \cap B_l),$$
$$\mathbf{1}_{A_k}(\omega) = \sum_{l=1}^{s} \mathbf{1}_{A_k \cap B_l}(\omega),$$

tai

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} y_k \mathbf{1}_{A_k \cap B_l}(\omega).$$

Analogiškai

$$\psi(\omega) = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} z_l \mathbf{1}_{A_k \cap B_l}(\omega).$$

Todėl

$$\varphi(\omega) + \psi(\omega) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} (y_k + z_l) \mathbf{1}_{A_k \cap B_l}(\omega),$$
$$\min\big(\varphi(\omega), \psi(\omega)\big) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \min(y_k, z_l) \mathbf{1}_{A_k \cap B_l}(\omega),$$
$$\max\big(\varphi(\omega), \psi(\omega)\big) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \max(y_k, z_l) \mathbf{1}_{A_k \cap B_l}(\omega).$$

Sudauginę φ ir ψ išraiškas (1) ir (2), gauname

$$\varphi(\omega)\psi(\omega) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} y_k z_l \mathbf{1}_{A_k}(\omega) \mathbf{1}_{B_l}(\omega) =$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} y_k z_l \mathbf{1}_{A_k \cap B_l}(\omega).$$

Teiginys apie dalmenį išplaukia iš 2 teoremos ir lygybės

$$\frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)} = \varphi(\omega) \cdot \frac{1}{\psi(\omega)}. \ \square$$

Ateityje labai dažnai vartosime žymėjimus

$$f^+(\omega) = \max\big(0, f(\omega)\big) = \begin{cases} f(\omega), & \text{kai } f(\omega) \geq 0, \\ 0, & \text{kai } f(\omega) < 0; \end{cases}$$

$$f^-(\omega) = \max\big(0, -f(\omega)\big) = \begin{cases} 0, & \text{kai } f(\omega) \geq 0, \\ -f(\omega), & \text{kai } f(\omega) < 0. \end{cases}$$

Šios funkcijos yra neneigiamos ir

$$f(\omega) = f^+(\omega) - f^-(\omega), \quad |f(\omega)| = f^+(\omega) + f^-(\omega).$$

Jei f yra mati funkcija, tai tokios yra ir $f^+, ir f^-$. Iš tikrųjų

$$\{\omega : f^+(\omega) < x\} = \begin{cases} \{\omega : f(\omega) < x\}, & \text{kai } x > 0, \\ \varnothing, & \text{kai } x \leq 0; \end{cases}$$

$$\{\omega : f^-(\omega) < x\} = \begin{cases} \{\omega : -x < f(\omega)\}, & \text{kai } x > 0, \\ \varnothing, & \text{kai } x \leq 0. \end{cases}$$

4 teorema. *Funkcija f yra mati tada ir tik tada, kai ji yra paprastųjų funkcijų φ_n sekos riba. Jei funkcija f yra neneigiama, tai funkcijas φ_n galima parinkti neneigiamas ir dar taip, kad seka φ_n būtų nemažėjanti.*

Į r o d y m a s. 1. Iš pradžių tirsime atvejį, kai f yra neneigiama. Įrodysime sąlygos būtinumą. Tarkime, kad f yra neneigiama mati funkcija. Paėmę bet kurį n, pažymėkime

$$A_{nk} = \Big\{\omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k}{2^n}\Big\} \quad (k = 1, ..., 2^n n),$$
$$B_n = \{\omega : f(\omega) \geq n\}.$$

Apibrėšime funkcijas

$$\varphi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{2^n n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{A_{nk}}(\omega) + n\mathbf{1}_{B_n}(\omega).$$

Tai – neneigiamos paprastosios funkcijos. Įrodysime, kad teisinga nelygybė $\varphi_n(\omega) \leq \varphi_{n+1}(\omega)$, koks bebūtų n. Jei $\omega \in A_{nk}$, tai $\omega \in A_{n+1,2k+1}$ arba $\omega \in A_{n+1,2k}$. Pirmuoju atveju

$$\varphi_n(\omega) = \frac{k-1}{2^n} = \varphi_{n+1}(\omega),$$

antruoju

$$\varphi_n(\omega) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = \varphi_{n+1}(\omega).$$

Jei $\omega \in B_n$, tai arba $\omega \in A_{n+1,k}$ $\;(k = 2^{n+1}n + 1, ..., 2^{n+1}(n+1))$, arba $\omega \in B_{n+1}$. Tada atitinkamai turime: arba

$$\varphi_n(\omega) = n \leq \frac{k-1}{2^{n+1}} = \varphi_{n+1}(\omega),$$

arba

$$\varphi_n(\omega) = n < n+1 = \varphi_{n+1}(\omega).$$

Lieka parodyti, kad $\varphi_n \to f$. Imkime bet kurį $\omega_0 \in \Omega$. Jei $f(\omega_0)$ yra baigtinis skaičius, tai $0 \leq f(\omega_0) < n$, kai n yra pakankamai didelis. Vadinasi, ω_0 priklauso vienai iš aibių A_{nk} ir

$$0 \leq f(\omega_0) - \varphi_n(\omega_0) < \frac{1}{2^n}.$$

Jei $f(\omega_0) = \infty$, tai $\varphi_n(\omega_0) = n$, kai n bet koks. Visais atvejais $\varphi_n(\omega_0) \to$ $\to f(\omega_0)$.

Jei funkcija f yra bet kurio ženklo, tai ją parašome pavidalu $f = f^+ - f^-$ ir taikome ką tik įrodytą teiginį.

2. Įrodysime sąlygos pakankamumą. Tarkime, kad paprastųjų funkcijų seka φ_n konverguoja į f. Tada, koks bebūtų $x \in R$,

$$\{\omega : f(\omega) < x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{\omega : \varphi_n(\omega) < x - \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{A}.$$

Šią lygybę siūlome skaitytojui įrodyti pačiam. Iš jos išplaukia sąlygos pakankamumas. □

5 teorema. *Jei f ir g yra mačios funkcijos, tai tokios yra ir $f+g$, $f \cdot g$, f/g, jei tik visiems ω tie reiškiniai turi prasmę.*

Į r o d y m a s. Funkcijas f ir g išreiškiame paprastųjų funkcijų sekų ribomis ir taikome 4 teoremą. □

6 teorema. *Jei f yra mati funkcija, tai tokios yra ir $|f|$ bei cf, kai c – konstanta.*

Į r o d y m a s išplaukia iš 5 teoremos. □

7 teorema. *Jei $f(\omega)$ yra mati funkcija, o $\varphi(x)$ – Borelio funkcija, apibrėžta aibėje $\bar{R}$, tai funkcija $g(\omega) = \varphi\big(f(\omega)\big)$ yra taip pat mati.*

Į r o d y m a s. Reikia įrodyti, kad $g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, kokia bebūtų Borelio aibė B. Tai išplaukia iš lygybių

$$g^{-1}(B) = \{\omega : g(\omega) \in B\} = \{\omega : \varphi\big(f(\omega)\big) \in B\} =$$
$$= \{\omega : f(\omega) \in \varphi^{-1}(B)\} \in \mathcal{A},$$

nes $\varphi^{-1}(B)$ yra Borelio aibė. □

Panagrinėsime mačių funkcijų sekų konvergavimą. Prisiminsime kai kuriuos faktus iš klasikinės matematinės analizės.

Sakykime, turime skaičių seką $x_n \in \bar{R}$, $(n = 1, 2, ...)$. Jei seka yra monotoniška, tai ji visada turi ribą (baigtinę ar begalinę). Jei seka yra nemažėjanti, tai

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n,$$

o jei – nedidėjanti, tai

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n.$$

Tarkime dabar, kad seka yra bet kuri, nebūtinai monotoniška. Pažymėkime

$$y_n = \inf_{k\geq n} x_k, \quad Y_n = \sup_{k\geq n} x_k.$$

Seka y_n yra nemažėjanti, o seka Y_n – nedidėjanti, be to, $y_n \leq Y_n$. Tų sekų ribos

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \sup_n \inf_{k\geq n} x_k,$$

$$Y = \lim_{n\to\infty} Y_n = \inf_n \sup_{k\geq n} x_k$$

yra vadinamos atitinkamai *apatine* bei *viršutine ribomis* ir žymimos

$$\liminf_{n\to\infty} x_n, \quad \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Aišku, $y \leq Y$.

Seka x_n $(n = 1, 2, ...)$ turi ribą

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

tada ir tik tada, kai

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Jei ta riba egzistuoja, tai ji sutampa su apatinės ir viršutinės ribų bendrąja reikšme.

8 teorema. *Jei $f_n(\omega)$ $(n = 1, 2, ...)$ yra mačių funkcijų seka, tai mačios ir funkcijos*

$$\inf_n f_n(\omega), \ \sup_n f_n(\omega), \ \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega), \ \limsup_{n\to\infty} f_n(\omega).$$

Į r o d y m a s. Jei kuriame nors taške ω_0 turime $\inf_n f_n(\omega_0) < x$, tai bent vienas iš skaičių $f_n(\omega_0)$ $(n = 1, 2, ...)$ yra mažesnis už x, ir atvirkščiai, jei bent vienas $f_n(\omega_0)$ $(n = 1, 2, ...)$ yra mažesnis už x, tai $\inf_n f_n(\omega) < x$. Todėl

$$\{\omega : \inf_n f_n(\omega) < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : f_n(\omega) < x\}.$$

Iš mačiosios funkcijos apibrėžimo ir mačiųjų aibių savybių išplaukia, kad aibė $\{\omega : \inf_n f_n(\omega) < x\}$ yra mati. Taigi funkcija $\inf_n f_n(\omega)$ yra mati.

Funkcijų sekos viršutinio rėžio matumas išplaukia iš ką tik įrodyto teiginio ir lygybės

$$\sup_n f_n(\omega) = -\inf_n \big(- f_n(\omega)\big)$$

arba lygybės

$$\{\omega : \sup_n f_n(\omega) \le x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : f_n(\omega) \le x\}.$$

Likę du teiginiai išplaukia iš ką tik įrodytųjų ir lygybių

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) = \sup_n \big(\inf_{k\ge n} f_k(\omega)\big),$$
$$\limsup_{n\to\infty} f_n(\omega) = \inf_n \big(\sup_{k\ge n} f_k(\omega)\big). \ \square$$

9 teorema. *Jei mačių funkcijų seka* $f_n(\omega)$ $(n = 1, 2, ...)$ *konverguoja į funkciją*

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega),$$

tai ribinė funkcija $f(\omega)$ *yra taip pat mati.*

Į r o d y m a s išplaukia iš 8 teoremos ir mūsų padarytų pastabų apie sekų konvergavimą. □

8. INTEGRALO SĄVOKA

Nagrinėsime erdvę su matu $\{\Omega, \mathcal{A}, \mu\}$ ir apibrėšime $\mathcal{A}$ mačių funkcijų $f : \Omega \to \bar{R}$ integralus. Pradėsime nuo paprastųjų neneigiamų funkcijų integralų, vėliau tą sąvoką praplėsime neneigiamoms mačioms funkcijoms ir, pagaliau, bet kurio ženklo mačioms funkcijoms.

Paprastąją funkciją, kaip žinome, galime parašyti pavidalu

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{r} y_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega); \tag{1}$$

čia y_k yra baigtiniai skaičiai, A_k – mačios disjunkčios aibės, kurių sąjunga yra Ω. Tarkime, kad ši funkcija yra neneigiama. Jos *integralu* vadinsime sumą

$$\sum_{k=1}^{r} y_k \mu(A_k) \tag{2}$$

ir žymėsime

$$\int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Integralas visada egzistuoja ir yra neneigiamas. Jis gali būti ir ∞. Jei būtume ėmę bet kurio ženklo paprastąsias funkcijas, tai būtume galėję gauti ir reiškinius, neturinčius prasmės – skirtingo ženklo begalybių sumas, jei tik kai kurių aibių A_k matai būtų buvę begaliniai.

Mums reikia parodyti, kad (2) suma nepriklauso nuo paprastosios funkcijos (1) išraiškos. Tarkime, kad $z_1, ..., z_s$ yra visos skirtingos funkcijos f reikšmės. Tada

$$\sum_{k=1}^{r} y_k \mu(A_k) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k, y_k = z_j} y_k = k\mu(A_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} z_j \sum_{k, y_k = z_j} \mu(A_k) = \sum_{j=1}^{s} z_j \mu\{\omega : f(\omega) = z_j\}.$$

Iš to išplaukia, kad (2) suma nepriklauso nuo funkcijos f išraiškos.

Be integralų visoje aibėje Ω tenka nagrinėti ir integralus tik tos aibės dalyje – kuriame nors mačiame poaibyje A. Pagal apibrėžimą

$$\int_{A} f(\omega)\mu(d\omega) = \int_{\Omega} f(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)\mu(d\omega).$$

Šiuos integralus galima traktuoti taip pat, kaip ir integralus visoje pagrindinėje aibėje Ω. Tam reikia erdvę su matu $\{\Omega, \mathcal{A}, \mu\}$ pakeisti kita erdve su matu $\{\Omega, \mathcal{A}_A, \mu\}$; čia $\mathcal{A}_A$ – aibių σ algebra, sudaryta iš tų $\mathcal{A}$ aibių, kurios yra aibės A poaibiai. Nesunku patikrinti, kad abu integralai yra tapatūs.

Kol kas aibėje A apibrėžėme tik neneigiamų paprastųjų funkcijų integralus. Visai taip pat juos galėsime apibrėžti ir kitais atvejais, kuriuos nagrinėsime vėliau.

1 teorema. *Sakykime, $A \in \mathcal{A}$, f ir g yra neneigiamos paprastosios funkcijos, o c – neneigiama konstanta. Teisingi teiginiai:*

1) $\int_{\Omega} \mathbf{1}_A(\omega)\mu(d\omega) = \mu(A)$;

2) $\int_{\Omega} cf(\omega)\mu(d\omega) = c\int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega)$;

3) $\int_{\Omega} \big(f(\omega) + g(\omega)\big)\mu(d\omega) = \int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) + \int_{\Omega} g(\omega)\mu(d\omega)$;

4) *jei* $f(\omega) \le g(\omega)$, *tai*

$$\int_{\Omega} \big(g(\omega) - f(\omega)\big)\mu(d\omega) + \int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) = \int_{\Omega} g(\omega)\mu(d\omega),$$

$$\int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) \le \int_{\Omega} g(\omega)\mu(d\omega);$$

5) *jei* $f(\omega) \le c$, *tai*

$$\int_\Omega f(\omega) \le c\mu(\Omega).$$

Į r o d y m a s. 1 ir 2 savybės yra akivaizdžios. Įrodysime trečiąją. Jei

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{r} y_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega), \quad g(\omega) = \sum_{l=1}^{s} z_l \mathbf{1}_{B_l}(\omega),$$

tai

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) + \int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega) &= \sum_{k=1}^{r} y_k\mu(A_k) + \sum_{l=1}^{s} z_l\mu(B_l) = \\ = \sum_{k=1}^{r} y_k\mu\Big(\bigcup_{l=1}^{s}(A_k\cap B_l)\Big) &+ \sum_{l=1}^{s} z_l\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{r}(A_k\cap B_l)\Big) = \\ = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s}(y_k+z_l)\mu(A_k\cap B_l) &= \int_\Omega \big(f(\omega)+g(\omega)\big)\mu(d\omega).\end{aligned}$$

Ketvirtąją savybę įrodome šitaip:

$$\begin{aligned}\int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega) &= \int_\Omega \Big(f(\omega) + \big(g(\omega)-f(\omega)\big)\Big)\mu(d\omega) = \\ &= \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) + \int_\Omega \big(g(\omega)-f(\omega)\big)\mu(d\omega) \ge \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).\end{aligned}$$

5 savybė išplaukia iš 4 ir 1. □

Neneigiamų mačių funkcijų integralams apibrėžti reikės kelių pagalbinių teiginių.

1 lema. *Jei f yra neneigiama paprastoji funkcija, o f_n $(n = 1, ...)$ – nemažėjanti paprastųjų neneigiamų funkcijų seka ir*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \ge f(\omega),$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) \ge \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).$$

P a s t a b a. Čia minima riba egzistuoja, kadangi pagal 1 teoremą integralų seka yra monotoniška.

Į r o d y m a s. Pažymėkime $a = \min f(\omega)$.

1. Tarkime, kad $a > 0$. Imkime bet kokį teigiamą $\varepsilon < a$. Pažymėkime $A_n = \{\omega : f_n(\omega) > f(\omega) - \varepsilon\}$. Aibės A_n sudaro didėjančią seką ir

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega.$$

Todėl

$$\mu(A_n) \to \mu(\Omega). \tag{3}$$

Iš 1 teoremos išplaukia

$$\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) \geq \int_\Omega f_n(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega)\mu(d\omega) \geq \int_\Omega \big(f(\omega) - \varepsilon\big)\mathbf{1}_{A_n}(\omega)\mu(d\omega). \tag{4}$$

Jei $\mu(\Omega) < \infty$, tai iš (3) išplaukia, kad $\mu(A_n^c) \to 0$. Tada pagal 1 teoremą

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) &\geq \int_\Omega f(\omega)\mathbf{1}_{A_n}(\omega)\mu(d\omega) - \varepsilon\mu(A_n) = \\ &= \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) - \int_\Omega f(\omega)\mathbf{1}_{A_n^c}(\omega)\mu(d\omega) - \varepsilon\mu(A_n) \geq \\ &\geq \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) - \mu(A_n^c)\max f(\omega) - \varepsilon\mu(A_n).\end{aligned}$$

Paėmę $n \to \infty$, po to $\varepsilon \to 0$, gauname lemos nelygybę.

Jei $\mu(\Omega) = \infty$, tai iš (4) išplaukia

$$\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) \geq (a - \varepsilon)\mu(A_n) \to \infty = \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).$$

Lemos nelygybė ir šiuo atveju teisinga.

2. Tirsime atvejį $a = 0$. Pažymėkime $B = \{\omega : f(\omega) > 0\}$. Turime

$$\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) \geq \int_\Omega f_n(\omega)\mathbf{1}_B(\omega)\mu(d\omega) = \int_B f_n(\omega)\mu(d\omega).$$

Pastarajam integralui pritaikę pirmosios įrodymo dalies rezultatą, gauname

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) \geq \int_B f(\omega)\mu(d\omega) = \\ &= \int_\Omega f(\omega)\mathbf{1}_B(\omega)\mu(d\omega) + \int_\Omega f(\omega)\mathbf{1}_{B^c}(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega). \ \square\end{aligned}$$

2 lema. *Jei f_n ir g_n yra dvi nemažėjančios paprastųjų neneigiamų funkcijų sekos ir*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \le \lim_{n\to\infty} g_n(\omega),$$

tai ir

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(\omega)\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. Sekos yra monotoniškos, todėl visiems k

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) \ge f_k(\omega).$$

Pagal 1 lemą

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(\omega)\mu(d\omega) \ge \int_\Omega f_k(\omega)\mu(d\omega).$$

Iš čia

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(\omega)\mu(d\omega) \ge \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\mu(d\omega). \ \Box$$

3 lema. *Jei f_n ir g_n $(n = 1, 2, ...)$ yra nemažėjančios paprastųjų neneigiamų funkcijų sekos ir*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} g_n(\omega),$$

tai ir

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(\omega)\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. Ši lema yra 2 lemos išvada. $\Box$

Dabar jau galime apibrėžti neneigiamos mačios funkcijos integralą. Pagal 7.5 teoremą egzistuoja nemažėjanti neneigiamų paprastųjų funkcijų f_n seka, konverguojanti į f. Pagal 1 teoremą integralai

$$\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega)$$

sudaro nemažėjančią skaičių seką. Vadinasi, egzistuoja riba

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega),$$

kuri, kaip matome iš 3 lemos, nepriklauso nuo sekos f_n parinkimo. Tą ribą vadinsime funkcijos f integralu ir žymėsime

$$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f d\mu.$$

Šį integralą žymime taip pat, kaip ir paprastųjų neneigiamų funkcijų integralą, nes naujoji integralo sąvoka, kai pointegralinė funkcija yra neneigiama paprastoji, sutampa su anksčiau įvestąja. Tada seka, kurios reikia funkcijos f integralui apibrėžti, galime laikyti seką, kurios visos funkcijos yra lygios f.

Neneigiamų mačių funkcijų integralai turi analogiškas savybes, kaip ir paprastųjų neneigiamų funkcijų.

2 teorema. *Sakykime, f ir g yra neneigiamos mačios funkcijos, c – neneigiama konstanta. Tada:*

1) $\int_\Omega cf(\omega)\mu(d\omega) = c\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)$;

2) $\int_\Omega \big(f(\omega)+g(\omega)\big)\mu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) + \int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega)$;

3) *jei* $f(\omega) \le g(\omega)$, *tai*

$$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) \le \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. 1. Jei f_n yra nemažėjanti paprastųjų neneigiamų funkcijų seka, konverguojanti į f, tai cf_n yra taip pat nemažėjanti neneigiamų paprastųjų funkcijų seka, konverguojanti į cf. Pagal 1 teoremą

$$\int_\Omega cf(\omega)\mu(d\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega cf_n(\omega)\mu(d\omega) =$$
$$= c\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) = c\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).$$

2. Jei f_n ir g_n yra nemažėjančios paprastųjų neneigiamų funkcijų sekos, konverguojančios atitinkamai į f ir g, tai $f_n + g_n$ yra taip pat nemažėjanti paprastųjų neneigiamų funkcijų seka, konverguojanti į $f+g$. Iš 1 teoremos gauname

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big(f(\omega)+g(\omega)\big)\mu(d\omega) &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \big(f_n(\omega)+g_n(\omega)\big)\mu(d\omega) =\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) + \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n(\omega)\mu(d\omega) =\\ &= \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) + \int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega).\end{aligned}$$

Trečiasis teiginys išplaukia iš 3 lemos. □

Pagaliau galime pateikti bendrą integralo apibrėžimą. Tarkime, kad f yra mati funkcija, galinti įgyti bet kurio ženklo reikšmes. Ją, kaip žinome, galime parašyti pavidalu $f = f^+ - f^-$. Galime kalbėti apie integralus

$$\int_\Omega f^+(\omega)\mu(d\omega), \quad \int_\Omega f^-(\omega)\mu(d\omega). \tag{5}$$

Jei bent vienas iš tų integralų yra baigtinis, tai sakome, kad funkcija yra *kvaziintegruojama*, o skirtumas

$$\int_\Omega f^+(\omega)\mu(d\omega) - \int_\Omega f^-(\omega)\mu(d\omega)$$

vadinamas funkcijos f *integralu* ir žymimas taip pat, kaip ir anksčiau įvestieji integralai:

$$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f d\mu.$$

Jei abu (5) integralai yra baigtiniai, tai sakome, kad funkcija f yra *integruojamoji.*

Jei funkcija f yra neneigiama mati, tai $f^+ = f,\ f^- = 0$, ir antrasis iš (5) integralų lygus 0. Matome, kad šiuo atveju naujasis integralas sutampa su anksčiau įvestuoju ir yra jo plėtinys gausesnei funkcijų klasei.

Tikimybių teorijoje ir apskritai matematinėje analizėje svarbų vaidmenį vaidina specialus integralo atvejis, kai turime erdvę su matu, kurioje $\Omega = R^s$, σ algebra $\mathcal{A}$ sutampa su Borelio aibių sistema $\mathcal{B}^s$, o matas yra Styltjeso matas μ_F. Tada integralą vadiname *Styltjeso integralu* ir žymime

$$\int_{R^s} f(x)\mu_F(dx) = \int_{R^s} f(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_s)dF(x_1, ..., x_s).$$

Praplėtę erdvę $\{R^s, \mathcal{B}^s, \mu_F\}$ iki pilnosios erdvės $\{R^s, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu}_F\}$, galime kalbėti apie *Lebego-Styltjeso integralą*. Jį žymėsime taip pat, kaip ir Styltjeso integralą. Kai matas $\bar{\mu}_F$ yra tiesiog Lebego matas, Lebego-Styltjeso integralą vadinsime tiesiog *Lebego integralu* ir žymėsime

$$\int_{R^s} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_s)dx_1...dx_s.$$

Suprantama, galime kalbėti ir apie integralus mačiose aibėse A:

$$\int_A f(x)\mu_F(dx) = \int_A f(x)dF(x).$$

Jei aibė A yra intervalas $[a_1, b_1] \times ... \times [a_s, b_s]$, tai vartojami ir žymėjimai, įprasti klasikinėje matematinėje analizėje,

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_s}^{b_s} f(x_1, ..., x_s)dx_1...dx_s.$$

Vėliau šiuos integralus dar apibendrinsime.

9. INTEGRALO SAVYBĖS

8 skyrelyje jau įrodėme keletą paprastųjų neneigiamų ir neneigiamų mačiųjų funkcijų integralo savybių. Dabar nagrinėsime integralo savybes bendruoju atveju.

1 teorema. *Jei f yra integruojama (kvaziintegruojama) funkcija, o c – baigtinė konstanta, tai cf yra taip pat integruojama (kvaziintegruojama) ir*

$$\int_\Omega cf(\omega)\mu(d\omega) = c\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. 1. Jei $c = 0$, tai teoremos teiginys yra trivialus.

2. Tarkime, kad $c > 0$. Tada $\big(cf(\omega)\big)^+ = cf^+(\omega)$, $\big(cf(\omega)\big)^- = cf^-(\omega)$. Iš 8.2 teoremos išplaukia, kad cf integruojama (kvaziintegruojama) ir

$$\int_\Omega cf(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega cf^+(\omega)\mu(d\omega) - \int_\Omega cf^-(\omega)\mu(d\omega) =$$
$$= c\int_\Omega f^+(\omega)\mu(d\omega) - c\int_\Omega f^-(\omega)\mu(d\omega) = c\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).$$

3. Jei $c < 0$, tai $\big(cf(\omega)\big)^+ = -cf^-(\omega)$, $\big(cf(\omega)\big)^- = -cf^+(\omega)$. Tada vėl pagal 8.2 teoremą cf yra integruojama (kvaziintegruojama) ir

$$\int_\Omega cf(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega (-c)f^-(\omega)\mu(d\omega) - \int_\Omega (-c)f^+(\omega)\mu(d\omega) =$$
$$= -c\int_\Omega f^-(\omega)\mu(d\omega) + c\int_\Omega f^+(\omega)\mu(d\omega) = c\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega). \ \Box$$

2 teorema. *Jei A ir B yra viena kitos nedengiančios mačios aibės, o f – integruojama tose aibėse funkcija, tai f yra integruojama aibėje $A \cup B$ ir*

$$\int_{A\cup B} f(\omega)\mu(d\omega) = \int_A f(\omega)\mu(d\omega) + \int_B f(\omega)\mu(d\omega).$$

P a s t a b a. Kvaziintegruojamumo atveju teorema yra ne visada teisinga.

Į r o d y m a s. 1. Sakykime, f yra neneigiama mati funkcija. Pagal 8.2 teoremą

$$\int_{A\cup B} f(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mathbf{1}_{A\cup B}(\omega)\mu(d\omega) =$$
$$= \int_\Omega f(\omega)\big(\mathbf{1}_A(\omega) + \mathbf{1}_B(\omega)\big)\mu(d\omega) =$$
$$= \int_\Omega f(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)\mu(d\omega) + \int_\Omega f(\omega)\mathbf{1}_B(\omega)\mu(d\omega) =$$
$$= \int_A f(\omega)\mu(d\omega) + \int_B f(\omega)\mu(d\omega).$$

2. Jei f yra bet kurio ženklo mati funkcija, tai pagal pirmąją įrodymo dalį

$$\int_{A\cup B} f^+(\omega)\mu(d\omega) = \int_A f^+(\omega)\mu(d\omega) + \int_B f^+(\omega)\mu(d\omega),$$
$$\int_{A\cup B} f^-(\omega)\mu(d\omega) = \int_A f^-(\omega)\mu(d\omega) + \int_B f^-(\omega)\mu(d\omega).$$

Iš čia išplaukia, kad funkcija f yra integruojama aibėje $A \cup B$. Iš pirmosios lygybės panariui atėmę antrąją, gauname teoremos lygybę. □

3 teorema. *Jei f ir g yra integruojamos funkcijos, tai jų suma, jei ji apibrėžta, yra taip pat integruojama ir*

$$\int_\Omega \big(f(\omega) + g(\omega)\big)\mu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) + \int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega).$$

P a s t a b a. Ir čia reikalingas integruojamumas, nes kvaziintegruojamoms funkcijoms šis teiginys ne visada teisingas.

Į r o d y m a s. Tokią teoremą įrodėme neneigiamoms mačioms funkcijoms (8.2 teorema). Pažymėję $h = f + g$, suskaidykime Ω į šešias disjunkčias aibes:

$$A_1 = \{\omega : f(\omega) \geq 0, g(\omega) \geq 0\},\ A_2 = \{\omega : f(\omega) \geq 0, g(\omega) < 0, h(\omega) \geq 0\},$$
$$A_3 = \{\omega : f(\omega) \geq 0, g(\omega) < 0, h(\omega) < 0\},$$
$$A_4 = \{\omega : f(\omega) < 0, g(\omega) \geq 0, h(\omega) \geq 0\},$$
$$A_5 = \{\omega : f(\omega) < 0, g(\omega) \geq 0, h(\omega) < 0\},\ A_6 = \{\omega : f(\omega) < 0, g(\omega) < 0\}.$$

Kiekvienai iš tų aibių įrodysime teoremos lygybę, remdamiesi 8.2 ir 1 teoremomis. Perrašysime reiškinį $h(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$, taip perkeldami narius į atitinkamas lygybės puses, kad visi gautos lygybės nariai būtų neneigiami. Teoremos lygybę įrodinėdami, sakysime, aibei A_5, turėsime nagrinėti lygybę

$$g(\omega) + \big(-h(\omega)\big) = \big(-f(\omega)\big).$$

Pagal 8.2 teoremą

$$\int_{A_5} g(\omega)\mu(d\omega) + \int_{A_5} \big(-h(\omega)\big)\mu(d\omega) = \int_{A_5} \big(-f(\omega)\big)\mu(d\omega).$$

Remdamiesi 1 teorema, gauname

$$\int_{A_5} g(\omega)\mu(d\omega) - \int_{A_5} h(\omega)\mu(d\omega) = -\int_{A_5} f(\omega)\mu(d\omega).$$

Tai yra teoremos lygybė, kol kas įrodyta ne visai aibei Ω, bet tik jos daliai.

Analogiškai įrodome teoremos lygybę ir kitoms aibėms A_k. Susumavę tas lygybes ir pasinaudoję 2 teorema, įsitikiname, kad teoremos lygybė teisinga ir visai aibei Ω. □

4 teorema. *Jei f, g yra integruojamos funkcijos ir $f(\omega) \le g(\omega)$, tai ir*

$$\int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) \le \int_{\Omega} g(\omega)\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. Pastebėsime, kad $f^+(\omega) \le g^+(\omega)$, $f^-(\omega) \ge g^-(\omega)$. Todėl pagal 8.2 teoremą

$$\int_{\Omega} f^+(\omega)\mu(d\omega) \le \int_{\Omega} g^+(\omega)\mu(d\omega),$$
$$\int_{\Omega} f^-(\omega)\mu(d\omega) \ge \int_{\Omega} g^-(\omega)\mu(d\omega).$$

Iš pirmosios nelygybės panariui atėmę antrąją, gauname įrodomąjį teiginį. □

5 teorema. *Jei funkcija f yra integruojama aibėje A, o B – matus aibės A poaibis, tai funkcija f yra integruojama ir aibėje B.*

Į r o d y m a s. Kadangi $\big(f(\omega)\mathbf{1}_B(\omega)\big)^+ \le \big(f(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)\big)^+$ ir $\big(f(\omega)\mathbf{1}_B(\omega)\big)^- \le \big(f(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)\big)^-$, tai iš $f(\omega)$ integruojamumo aibėje A ir 8.2 teoremos išplaukia, kad integralai

$$\int_{\Omega} \big(f(\omega)\mathbf{1}_B(\omega)\big)^+\mu(d\omega), \quad \int_{\Omega} \big(f(\omega)\mathbf{1}_B(\omega)\big)^-\mu(d\omega)$$

yra baigtiniai. □

6 teorema. *Mati funkcija f yra integruojama tada ir tik tada, kai yra integruojama funkcija $|f|$, be to,*

$$\Big|\int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega)\Big| \le \int_{\Omega} |f(\omega)|\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. $|f(\omega)| = f^+(\omega) + f^-(\omega)$. Jei f yra integruojama, tai f^+ ir f^- integralai yra baigtiniai. Tada pagal 8.2 teoremą ir funkcijos $|f|$ integralas yra baigtinis.

Jei $|f|$ yra integruojama, tai iš 8.2 teoremos trečiojo teiginio išplaukia, jog funkcijų f^+ ir f^- integralai yra baigtiniai, vadinasi, f yra integruojama.

Nelygybė įrodoma remiantis 8.2 teoremos antruoju teiginiu:

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)\Big| = \Big|\int_\Omega f^+(\omega)\mu(d\omega) - \int_\Omega f^-(\omega)\mu(d\omega)\Big| \le \\
&\le \int_\Omega f^+(\omega)\mu(d\omega) + \int_\Omega f^-(\omega)\mu(d\omega) = \\
&= \int_\Omega \big(f^+(\omega) + f^-(\omega)\big)\mu(d\omega) = \int_\Omega |f(\omega)|\mu(d\omega). \ \square
\end{aligned}$$

7 teorema. *Jei f yra mati funkcija, o g – neneigiama integruojama funkcija ir $|f(\omega)| \le g(\omega)$, tai funkcija f taip pat yra integruojama ir*

$$\Big|\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)\Big| \le \int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. Kadangi $f^+(\omega) \le g(\omega)$ ir $f^-(\omega) \le g(\omega)$, tai pagal 8.2 teoremą funkcijų f^+ ir f^- integralai yra baigtiniai, vadinasi, f yra integruojama. Iš 6 ir 8.2 teoremų turime

$$\Big|\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega)\Big| \le \int_\Omega |f(\omega)|\mu(d\omega) \le \int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega). \ \square$$

8 teorema (Bjenemė–Čebyšovo nelygybė). *Jei f yra neneigiama mati funkcija, tai, koks bebūtų $c > 0$,*

$$\mu\{\omega : f(\omega \ge c)\} \le c^{-1} \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. Pažymėkime $A = \{\omega : f(\omega) \ge c\}$. Pagal 2 teoremą

$$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) = \int_A f(\omega)\mu(d\omega) + \int_{A^c} f(\omega)\mu(d\omega).$$

Antrasis integralas yra neneigiamas. Remiantis 8.2 ir 8.1 teoremomis, pirmasis integralas yra ne mažesnis už

$$c\int_A \mu(d\omega) = c\mu(A).$$

Todėl

$$c\mu(A) \le \int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega). \ \square$$

9 teorema. *Jei f yra neneigiama mati funkcija ir*

$$\int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) = 0,$$

tai $\mu\{\omega : f(\omega) \ne 0\} = 0.$

Jei kuris nors teiginys yra teisingas visur aibėje A, išskyrus nulinio mato poaibį, tai sakoma, kad jis teisingas aibėje A *beveik visur*. Taigi teiginį $\mu\{\omega : f(\omega) \ne 0\} = 0$ galime skaityti ir šitaip: "funkcija f yra beveik visur lygi 0".

Į r o d y m a s. Pažymėję $A_k = \{\omega : f(\omega) \ge 1/k\}$, gauname lygybę

$$\{\omega : f(\omega) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Pagal 8 teoremą

$$\mu(A_k) \le k \int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) = 0.$$

Todėl

$$\mu\{\omega : f(\omega) > 0\} \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 0. \ \square$$

10 teorema. *Integruojama funkcija yra beveik visur baigtinė.*

Į r o d y m a s. Jei funkcija f yra integruojama, tai pagal 6 teoremą funkcija $|f|$ taip pat integruojama; vadinasi, integralas

$$J = \int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega)$$

yra baigtinis. Pažymėkime

$$H = \{\omega : |f(\omega)| = \infty\}.$$

Koks bebūtų $N > 0$,

$$H \subset \{\omega : |f(\omega)| \ge N\}.$$

Pagal 8 teoremą

$$\mu(H) \le \frac{J}{N}.$$

Skaičius N yra bet koks. Iš čia $\mu(H) = 0.$ $\square$

11 teorema. *Jei funkcija f yra mati aibėje A ir $\mu(A) = 0$, tai ji yra integruojama toje aibėje ir*

$$\int_A f(\omega)\mu(d\omega) = 0.$$

Jei erdvė $\{\Omega, \mathcal{A}, \mu\}$ yra pilna, t. y. nulinio mato aibių poaibiai priklauso $\mathcal{A}$, tai reikalavimą, kad funkcija f būtų mati, galime praleisti. Tada kiekviena funkcija yra mati nulinio mato aibėje.

Į r o d y m a s. Lengva suvokti, kad neneigiamos paprastosios funkcijos integralas nulinio mato aibėje yra lygus 0. Iš čia išplaukia, kad tokią savybę turi ir neneigiamų mačių funkcijų integralai. Vadinasi, tas teiginys yra teisingas ir bet kurio ženklo mačių funkcijų integralams. □

12 teorema. *Jei f yra integruojama funkcija, g – mati funkcija, beveik visur sutampanti su f:*

$$\mu\{\omega : f(\omega) \neq g(\omega)\} = 0,$$

tai g yra taip pat integruojama ir

$$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega).$$

Kai matas yra pilnasis, reikalavimą, kad funkcija g būtų mati, galime praleisti: jis išplaukia iš funkcijos f matumo.

Į r o d y m a s. Pažymėkime $A = \{\omega : f(\omega) = g(\omega)\}$. Aibės A ir A^c yra mačios. Funkcija f yra integruojama aibėje A, taigi integruojama ir funkcija g. Kadangi $\mu(A^c) = 0$, tai pagal 11 teoremą g yra integruojama aibėje A^c. Iš 2 teoremos gauname, kad g integruojama aibėje $A \cup A^c = \Omega$.

Kadangi pagal 11 teoremą mačių funkcijų integralai nulinio mato aibėse yra lygūs 0, tai

$$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) = \int_A f(\omega)\mu(d\omega) + \int_{A^c} f(\omega)\mu(d\omega) =$$
$$= \int_A g(\omega)\mu(d\omega) + \int_{A^c} g(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega). \ \square$$

13 teorema (Koši nelygybė). *Jei funkcijų f_1 ir f_2 kvadratai yra integruojami, tai sandauga $f_1 f_2$ yra taip pat integruojama ir*

$$\left(\int_\Omega f_1(\omega)f_2(\omega)\mu(d\omega)\right)^2 \leq \int_\Omega f_1^2(\omega)\mu(d\omega) \cdot \int_\Omega f_2^2(\omega)\mu(d\omega). \tag{1}$$

Nelygybė virsta lygybe tada ir tik tada, kai egzistuoja tokios konstantos c_1 *ir* c_2*, kurių bent viena nelygi* 0*, kad*

$$c_1 f_1(\omega) + c_2 f_2(\omega) = 0 \tag{2}$$

beveik visur mato μ *atžvilgiu.*

Į r o d y m a s. Sandaugos $f_1 f_2$ integruojamumas išplaukia iš elementarios nelygybės $|f_1 f_2| \le (f_1^2 + f_2^2)/2$. Jei bent vienas iš integralų

$$K_1 = \int_\Omega f_1^2(\omega)\mu(d\omega), \quad K_2 = \int_\Omega f_2^2(\omega)\mu(d\omega)$$

yra lygus 0, tai (1) nelygybė yra teisinga. Dar daugiau: ji virsta lygybe. Tarkime, kad $K_1 = 0$. Tada f_1 pagal 9 teoremą beveik visur lygi 0. Vadinasi, (1) nelygybės abiejų pusių nariai yra lygūs 0. Antra vertus, tada teisinga ir (2) lygybė su bet kuria $c_1 \ne 0$ ir $c_2 = 0$.

Todėl lieka išnagrinėti atvejį, kai $K_1 \ne 0,\ K_2 \ne 0$. Teisinga nelygybė

$$\int_\Omega \Big(\frac{|f_1(\omega)|}{\sqrt{K_1}} - \frac{|f_2(\omega)|}{\sqrt{K_2}}\Big)^2 \mu(d\omega) \ge 0. \tag{3}$$

Pointegralinį reiškinį pakėlę kvadratu ir sumos integralą pakeitę integralų suma, gauname

$$\int_\Omega |f_1(\omega) f_2(\omega)|\mu(d\omega) \le \sqrt{K_1 K_2}.$$

Todėl

$$\Big|\int_\Omega f_1(\omega) f_2(\omega)\mu(d\omega)\Big| \le \sqrt{K_1 K_2}.$$

Remiantis 9 teorema, (3) nelygybė virsta lygybe, kai

$$\frac{(f_1(\omega))}{\sqrt{K_1}} - \frac{(f_2(\omega))}{\sqrt{K_2}} = 0$$

beveik visur mato μ atžvilgiu. Vadinasi, teisinga (2) lygybė.

Įrodėme (1) nelygybę ir (2) sąlygos būtinumą, kad (1) nelygybė virstų lygybe. (2) sąlygos pakankamumą paliekame įrodyti skaitytojui. □

14 teorema. *Jei* $f_1, f_2, \ldots$ *yra nemažėjanti neneigiamų mačių funkcijų seka ir*

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega),$$

tai

$$\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) \to \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega),$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s. Kiekvienam k imkime nemažėjančią paprastųjų neneigiamų funkcijų f_{kn} seką, konverguojančią į f_k. Pažymėkime

$$g_n(\omega) = \max_{k \le n} f_{kn}(\omega).$$

Šios funkcijos taip pat yra neneigiamos paprastosios funkcijos, jų seka nemažėjanti ir

$$f_{kn}(\omega) \le g_n(\omega) \le f_n(\omega),$$
$$\int_\Omega f_{kn}(\omega)\mu(d\omega) \le \int_\Omega g_n(\omega)\mu(d\omega) \le \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega),$$

jei $k \le n$. Kai $n \to \infty$, gauname

$$f_k(\omega) \le \lim_{n\to\infty} g_n(\omega) \le f(\omega),$$
$$\int_\Omega f_k(\omega)\mu(d\omega) \le \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n(\omega)\mu(d\omega) \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega).$$

Kai $k \to \infty$, turime

$$f(\omega) \le \lim_{n\to\infty} g_n(\omega) \le f(\omega),$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\mu(d\omega) \le \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n(\omega)\mu(d\omega) \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega).$$

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) = f(\omega)$$

ir

$$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega). \ \square$$

15 (Fatu[1]) teorema. *Jei* f_n $(n = 1, 2, ...)$ *yra neneigiamos mačios funkcijos, tai*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega)\mu(d\omega) \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. Pažymėkime

$$h_n(\omega) = \inf_{m \ge n} f_m(\omega).$$

Funkcijos h_n yra neneigiamos ir mačios, jų seka nemažėjanti, be to,

[1] Pierre Fatou (1878–1929) – prancūzų matematikas.

$$h_n(\omega) \le f_n(\omega).$$

Todėl

$$\int_\Omega h_n(\omega)\mu(d\omega) \le \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega).$$

Imame abiejų pusių apatines ribas

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(\omega)\mu(d\omega) \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega).$$

Tačiau funkcijų h_n integralų seka yra nemažėjanti, todėl apatinė riba yra tiesiog riba. Be to, toms funkcijoms galima taikyti 14 teoremą. Turime

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} h_n(\omega)\mu(d\omega) \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega).$$

Kadangi

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{m\ge n} f_m(\omega)\big) = \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega),$$

tai teoremos teiginys yra teisingas. □

16 (Lebego) teorema. *Jei f_n $(n = 1, 2, ...)$ yra mačios funkcijos, g – neneigiama integruojama funkcija, $|f_n(\omega)| \le g(\omega)$ $(n = 1, 2, ...)$ ir $f_n \to f$, tai*

$$\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) \to \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. f integruojamumas išplaukia iš nelygybės $|f| \le g$ ir 7 teoremos. Funkcijų sekai $g(\omega) - f_n(\omega) \ge 0$ pritaikę Fatu teoremą, gauname

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \big(g(\omega) - f_n(\omega)\big)\mu(d\omega) \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \big(g(\omega) - f_n(\omega)\big)\mu(d\omega),$$

t. y.

$$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) \ge \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega). \tag{4}$$

Tą pačią teoremą taikome ir sekai funkcijų $g(\omega) + f_n(\omega) \ge 0$:

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \big(g(\omega) + f_n(\omega)\big)\mu(d\omega) \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \big(g(\omega) + f_n(\omega)\big)\mu(d\omega).$$

Iš čia gauname

$$\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega). \tag{5}$$

Iš (4) ir(5) išplaukia

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) = \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).\ \square$$

17 teorema. *Jei g_k $(k = 1, 2, ...)$ yra neneigiamos mačios funkcijos, tai*

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega)\mu(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega g_k(\omega)\mu(d\omega).$$

Į r o d y m a s. Funkcijos

$$f_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} g_k(\omega)$$

yra neneigiamos mačios, jų seka nemažėja, o tos sekos riba lygi

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega).$$

Iš 14 teoremos išplaukia

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega).$$

Pagal 3 teoremą

$$\int_\Omega f_n(\omega)\mu(d\omega) = \sum_{k=1}^{n}\int_\Omega g_k(\omega)\mu(d\omega).$$

Iš čia išplaukia teoremos teiginys. □

18 teorema. *Jei f yra integruojama aibėje A, o A yra mačių disjunkčių aibių sekos sąjunga,*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

tai

$$\int_A f(\omega)\mu(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f(\omega)\mu(d\omega).$$

Jei f yra neneigiama mati funkcija, tai pastaroji lygybė yra teisinga ir tada, kai ta funkcija nėra integruojama.

Į r o d y m a s. Tarkime, kad f yra neneigiama mati funkcija. Kadangi

$$f(\omega)\mathbf{1}_A(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\omega)\mathbf{1}_{A_k}(\omega),$$

tai pagal 17 teoremą

$$\int_\Omega f(\omega)\mathbf{1}_A(\omega)\mu(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega f(\omega)\mathbf{1}_{A_k}(\omega)\mu(d\omega),$$

t. y.

$$\int_A f(\omega)\mu(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f(\omega)\mu(d\omega).$$

Jei f yra bet kurio ženklo integruojama funkcija, tai ką tik įrodytą lygybę taikome kiekvienai iš funkcijų f^+, f^-. Iš čia gauname teoremos teiginį. □

Pakomentuosime šią teoremą. Tarkime, kad f yra neneigiama mati arba bet kurio ženklo integruojama funkcija erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, \mu\}$. Pažymėkime

$$\nu(A) = \int_A f(\omega)\mu(d\omega), \ A \in \mathcal{A}. \tag{6}$$

Iš 18 teoremos išplaukia, kad ν yra visiškai adityvi aibės funkcija: jei A yra disjunkčių aibių A_k sekos sąjunga, tai

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Vadinasi, kai f yra neneigiama mati funkcija, tai ν taip pat yra matas mačioje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ (nes $\nu(\varnothing) = 0$).

Jei φ ir ϱ yra matai mačioje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ ir iš lygybės $\varrho(A) = 0, \ A \in \mathcal{A}$, išplaukia $\varphi(A) = 0$, tai sakome, kad *matas* ϱ yra *absoliučiai tolydus mato* φ *atžvilgiu.*

Iš 18 teoremos turime, kad matas ν yra absoliučiai tolydus mato μ atžvilgiu. Pasirodo, matą ϱ, absoliučiai tolydų mato φ atžvilgiu, visada galima užrašyti (6) pavidalu.

19 (Radono–Nikodimo) teorema. *Jei φ ir ϱ yra matai mačioje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}\}$, matas φ yra σ baigtinis, o matas ϱ – absoliučiai tolydus mato φ atžvilgiu, tai egzistuoja neneigiama $\mathcal{A}$ mati funkcija f, tenkinanti lygybę*

$$\varrho(A) = \int_A f(\omega)\varphi(d\omega),$$

kokia bebūtų $A \in \mathcal{A}$. Jei ir matas ϱ yra σ baigtinis, tai funkcija f yra beveik visur baigtinė. Jei, be funkcijos f, yra dar ir kita $\mathcal{A}$ mati funkcija g, tenkinanti lygybę

$$\varrho(A) = \int_A g(\omega)\varphi(d\omega),$$

kokia bebūtų $A \in \mathcal{A}$, tai funkcijos f ir g yra beveik visur lygios mato φ atžvilgiu.

Panaši teorija yra teisinga ir tuo atveju, kai (6) integrale f yra bet kuri integruojama funkcija. Tada aibės funkcija ν gali būti ir neigiama, tačiau visiškai adityvi. Tokią aibės funkciją galime pavadinti apibendrintuoju matu. Apskritai *apibendrintuoju matu*, arba *krūviu*, vadiname realią visiškai adityvią aibės funkciją ν, mačioje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ turinčią savybes: 1) $\nu(\varnothing) = 0$; 2) iš dviejų begalinių reikšmių $-\infty$ ir ∞ funkcija ν gali įgyti tik kurią nors vieną. Krūvis ν yra vadinamas baigtiniu, jei jo reikšmės $\nu(A)$ yra baigtinės, kokios bebūtų $A \in \mathcal{A}$, ir σ baigtiniu, jei Ω galima suskaidyti į skaičią sistemą aibių Ω_k ($k = 1, 2, ...$), kurių poaibiams, priklausantiems $\mathcal{A}$, krūvio reikšmės yra baigtinės. Kiekvieną krūvį galima išreikšti dviejų matų skirtumu. Pažymėkime

$$\nu^+(A) = \sup_{B \subset A, B \in \mathcal{A}} \nu(B), \quad \nu^-(A) = \sup_{B \subset A, B \in \mathcal{A}} \big(-\nu(B)\big), \ A \in \mathcal{A}.$$

Galima įrodyti, kad ν^+ ir ν^- yra neneigiamos, visiškai adityvios aibės funkcijos. Jei ν yra baigtinis arba σ baigtinis, tai tokie yra ir ν^+, ν^-. Kiekvieną krūvį galima parašyti pavidalu

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

Ir krūviams galime įvesti absoliutaus tolydumo sąvoką. Sakysime, kad krūvis ϱ yra absoliučiai tolydus krūvio φ atžvilgiu, jei iš $\varphi(A) = 0, \ A \in \mathcal{A}$, išplaukia $\varrho(A) = 0$.

Teisinga ir bendresnė Radono–Nikodimo teorema. Tarkime, kad erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, \varphi\}$, kurioje matas φ yra σ baigtinis, σ baigtinis krūvis ϱ yra absoliučiai tolydus mato φ atžvilgiu. Tada egzistuoja mati funkcija f, tenkinanti sąlygą

$$\varrho(A) = \int_A f(\omega)\varphi(d\omega), \ A \in \mathcal{A}.$$

Jei egzistuoja dar viena funkcija g su sąlyga

$$\varrho(A) = \int_A g(\omega)\varphi(d\omega),$$

tai funkcijos f ir g yra beveik visur lygios mato φ atžvilgiu.

Galima nagrinėti ir bendresnius negu iki šiol nagrinėtieji integralus – integralus apibendrinto mato atžvilgiu. Jei φ yra krūvis mačioje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ ir jis išreiškiamas dviejų matų skirtumu $\mu - \nu$, tai pagal apibrėžimą

$$\int_\Omega f(\omega)\varphi(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) - \int_\Omega f(\omega)\nu(d\omega).$$

Abu dešinės pusės integralai ir jų skirtumas turi turėti prasmę. Įrodoma, kad integralas nepriklauso nuo krūvio φ išraiškos dviejų matų skirtumu, t. y. jei $\varphi = \mu_1 - \nu_1$ ir $\varphi = \mu_2 - \nu_2$, tai

$$\int_\Omega f(\omega)\mu_1(d\omega) - \int_\Omega f(\omega)\nu_1(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)\mu_2(d\omega) - \int_\Omega f(\omega)\nu_2(d\omega).$$

Taip apibendrinti vadinamieji *Radono* integralai turi daugelį svarbiausių integralo savybių.

Teisinga ir Radono–Nikodimo teorema, kai φ yra krūvis. Beje, ji yra teisinga ir tada, kai ϱ nėra σ baigtinis, bet tada funkcija f gali įgyti ir begalines reikšmes.

Funkcija f Radono-Nikodimo teoremoje dažnai vadinama mato ϱ *Radono-Nikodimo išvestine* mato φ atžvilgiu ir žymima $d\varrho/d\varphi$. Ji turi daugelį paprastos klasikinėje analizėje nagrinėjamos išvestinės savybių.

Radono-Nikodimo teoremos įrodymą ir jos apibendrinimus galima rasti, pvz., [12, 22].

10. MATŲ SANDAUGA. KARTOTINIAI INTEGRALAI

Priminsime aibių sandaugos sąvoką. Dviejų aibių A ir B (Dekarto)*sandauga* $A \times B$ vadiname visumą dvejetų (x, y), kai x yra bet kuris aibės A, o y – aibės B elementas:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Aibių sandauga nėra nei komutatyvi, nei asociatyvi. Tačiau ji turi šias distributyvumo savybes: jei A, B, C, D yra bet kurios aibės, tai

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C),\\
C \times (A \cup B) &= (C \times A) \cup (C \times B),\\
A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C),\\
(B \cap C) \times A &= (B \times A) \cap (C \times A),\\
(A \times B) \cap (C \times D) &= (A \cap C) \times (B \cap D).
\end{aligned}$$

Panašiai apibrėžiama ir kelių aibių sandauga. Aibių $A_1, ..., A_n$ sandauga

$$A_1 \times ... \times A_n = \bigtimes_{k=1}^{n} A_k$$

vadinsime visumą baigtinių sekų $(x_1, ..., x_n)$, kuriose x_1 yra bet kuris aibės A_1 elementas, ir t. t., x_n yra bet kuris aibės A_n elementas:

$$\big\{(x_1, ..., x_n) : x_1 \in A_1, ..., x_n \in A_n\big\}.$$

Aibių sekos $A_1, A_2, ...$ sandauga

$$A_1 \times A_2 \times ... = \bigtimes_{k=1}^{\infty} A_k$$

yra visuma sekų

$$\big\{(x_1, x_2, ...) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ...\big\}.$$

Toliau kalbėsime apie mačių erdvių sandaugas. Kad būtų paprasčiau, iš pradžių imsime tik dvi erdves. Tarkime, turime dvi mačias erdves $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\}$ ir $\{\Omega_2, \mathcal{A}_2\}$. Dviejų aibių $A_1 \subset \Omega_1, A_2 \subset \Omega_2$ sandaugą $A_1 \times A_2$ susitarsime vadinti *stačiakampiu.* Jei aibės A_1 ir A_2 būtų realiųjų skaičių aibės – intervalai ir jas atidėtume plokštumos stačiakampių koordinačių ašyse, tai sandauga $A_1 \times A_2$ būtų tikrai stačiakampis įprastine prasme. Kai $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$, tai stačiakampį $A_1 \times A_2$ vadinsime *mačiuoju.* Visų mačių stačiakampių sistema apskritai nėra aibių σ algebra, tačiau ji generuoja σ algebrą, vadinamą algebrų $\mathcal{A}_1$ ir $\mathcal{A}_2$ *sandauga.* Ją žymėsime $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Ši sandaugos sąvoka skiriasi nuo aibių sandaugos sąvokos. Todėl vartojame ir skirtingą žymėjimą.

Mati erdvė $\{\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2\}$ yra vadinama mačių erdvių $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\}$ ir $\{\Omega_2, \mathcal{A}_2\}$ *sandauga* ir žymima $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\} \otimes \{\Omega_2, \mathcal{A}_2\}$.

Imkime aibę $A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Jos *pjūviu* taške $\omega_1 \in \Omega_1$ vadinama aibė

$$A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\},$$

o *pjūviu* taške $\omega_2 \in \Omega_2$ – aibė

$$A^{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}.$$

Specialiu atveju, kai $A = A_1 \otimes A_2$,

$$A_{\omega_1} = \begin{cases} A_2, & \text{kai } \omega_1 \in A_1, \\ \varnothing, & \text{kai } \omega_1 \notin A_1, \end{cases} \tag{1}$$

$$A^{\omega_2} = \begin{cases} A_1, & \text{kai } \omega_2 \in A_2, \\ \varnothing, & \text{kai } \omega_2 \notin A_2. \end{cases} \tag{2}$$

1 teorema. *Jei* $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\} \otimes \{\Omega_2, \mathcal{A}_2\}$ *yra dviejų mačių erdvių sandauga ir* $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$*, tai pjūvis* $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$*, kai* $\omega_1 \in \Omega_1$*, ir pjūvis* $A^{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$*, kai* $\omega_2 \in \Omega_2$ (*kitaip tariant,* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *mačios aibės* A *pjūviai* A_{ω_1} *ir* A^{ω_2} *yra atitinkamai* $\mathcal{A}_2$ *matus ir* $\mathcal{A}_1$ *matus*).

Į r o d y m a s. Pažymėkime $\mathcal{C}_{\omega_1}$ visų aibės $\Omega_1 \times \Omega_2$ poaibių A su sąlyga $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ sistemą. Aišku, šiai sistemai pagal (1) ir (2) priklauso visi matūs stačiakampiai $A_1 \times A_2,\ A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Parodysime, kad sistema $\mathcal{C}_{\omega_1}$ yra uždara papildymo ir sekos jungimo operacijų atžvilgiu. Iš tikrųjų, jei $A \in \Omega_1 \times \Omega_2$, tai

$$\big((\Omega_1 \times \Omega_2)\backslash A\big)_{\omega_1} = \Omega_2 \backslash A_{\omega_1};$$

jei $A_1, A_2 ...$ yra aibės $\Omega_1 \times \Omega_2$ poaibiai, tai

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)_{\omega_1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k)_{\omega_1}.$$

Vadinasi, sistema $\mathcal{C}_{\omega_1}$ yra σ algebra ir jai priklauso matūs stačiakampiai. Todėl $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{C}_{\omega_1}$.

Analogiškai nagrinėjami pjūviai A^{ω_2}. □

Išvada. *Netuščias stačiakampis* $A_1 \times A_2 \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ *mačių erdvių sandaugoje* $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\} \otimes \{\Omega_2, \mathcal{A}_2\}$ *yra* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *matus tada ir tik tada, kai* $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Į r o d y m a s. Jei $A_1 \in \mathcal{A}_1$ ir $A_2 \in \mathcal{A}_2$, tai $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ pagal σ algebros apibrėžimą.

Tarkime, kad stačiakampis $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ yra netuščias. Tada aibė A_1 yra netuščia, vadinasi, egzistuoja $\omega_1 \in A_1$. Pagal (1) $A_2 = (A_1 \times A_2)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$. Analogiškai įrodome, kad $A_1 \in \mathcal{A}_1$. □

2 teorema. *Jei* $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\} \otimes \{\Omega_2, \mathcal{A}_2\}$ *yra dviejų mačių erdvių sandauga ir* $f(\omega_1, \omega_2)$ *yra* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *mati funkcija, tai kiekvienam* $\omega_1 \in \Omega_1$ *funkcija* $\varphi_{\omega_1}(\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2)$*, traktuojama kaip vieno kintamojo* ω_2 *funkcija, yra* $\mathcal{A}_2$ *mati, o funkcija* $\psi_{\omega_2} = f(\omega_1, \omega_2)$*, traktuojama kaip vieno kintamojo* ω_1 *funkcija, yra* $\mathcal{A}_1$ *mati.*

Į r o d y m a s. Paėmę bet kurią tiesės Borelio aibę B, turime

$$\varphi_{\omega_1}^{-1}(B) = \{\omega_2 : \varphi_{\omega_1}(\omega_2) \in B\} = \{(\omega_1, \omega_2) : f(\omega_1, \omega_2) \in B\}_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2.$$

Analogiškai tiriama ir funkcija $\psi_{\omega_2}(\omega_1)$. □

3 teorema. *Jei* $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\} \otimes \{\Omega_2, \mathcal{A}_2\}$ *yra dviejų mačių erdvių sandauga, tai tapačiai nelygi nuliui funkcija* $f(\omega_1, \omega_2) = f_1(\omega_1) f_2(\omega_2)$*, apibrėžta aibėje* $\Omega_1 \times \Omega_2$*, yra* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *mati tada ir tik tada, kai* $f_1(\omega_1)$ *yra* $\mathcal{A}_1$ *mati, o* $f_2(\omega_2)$ *yra* $\mathcal{A}_2$ *mati.*

I r o d y m a s. 1. Tarkime, kad $f(\omega_1,\omega_2)$ nėra tapačiai lygi nuliui ir $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ mati. Galime rasti tokį $\omega_{10}\in\Omega_1$, kad $f_1(\omega_{10})\neq 0$. Pagal 2 teoremą funkcija $f_1(\omega_{10})f_2(\omega_2)$, t. y. $f_2(\omega_2)$ yra $\mathcal{A}_2$ mati. Analogiškai įrodomas $f_1(\omega_1)$ $\mathcal{A}_1$ matumas.

2. Įrodysime sąlygos pakankamumą. Pažymėkime $\tilde f_1(\omega_1,\omega_2)=f_1(\omega_1)$ ir $\tilde f_2(\omega_1,\omega_2)=f_2(\omega_2)$. Kadangi $\tilde f_1^{-1}(B)=\big(f_1^{-1}(B)\big)\times\Omega_2\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$, kokia bebūtų $B\in\mathcal{B}$, ir analogiškai $\tilde f_2^{-1}(B)\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$, tai funkcija $f_1(\omega_1)f_2(\omega_2)=$ $=\tilde f_1(\omega_1,\omega_2)\tilde f_2(\omega_1,\omega_2)$ yra $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ mati. □

1 lema. *Tarkime, kad $\{\Omega_1,\mathcal{A}_1\},\{\Omega_2,\mathcal{A}_2\}$ yra mačios erdvės. Sudarykime visas galimas baigtines sąjungas iš disjunkčių mačių stačiakampių $A_1\times$ $\times A_2, A_1\in\mathcal{A}_1, A_2\in\mathcal{A}_2$. Jų sistema yra aibių algebra.*

I r o d y m a s. Iš pradžių parodysime, kad visi matūs stačiakampiai sudaro aibių pusalgebrį. Pažymėkime jų sistemą raide $\mathcal{C}$. Aišku, jog $\Omega_1\times\Omega_2\in$ $\in\mathcal{C}$ ir $\varnothing\in\mathcal{C}$ (tuščia sąjunga laikoma tuščia aibe).

Imkime du mačius stačiakampius $A_1^1\times A_2^1$ ir $A_1^2\times A_2^2,\ A_1^k\in\mathcal{A}_1,\ A_2^k\in$ $\in\mathcal{A}_2$ $(k=1,2)$. Jų sankirta

$$(A_1^1\times A_2^1)\cap(A_1^2\times A_2^2)=(A_1^1\cap A_1^2)\times(A_2^1\cap A_2^2)$$

yra $\mathcal{C}$ aibė.

Tarkime, kad $A_1\times A_2,\ A_1\in\mathcal{A}_1,\ A_2\in\mathcal{A}_2$, yra matus stačiakampis. Turime lygybę

$$\begin{aligned}\Omega_1\times\Omega_2&=\big[A_1\cup(\Omega_1\backslash A_1)\big]\times\big[A_2\cup(\Omega_2\backslash A_2)\big]=\\&=\big[A_1\times A_2\big]\cup\big[A_1\times(\Omega_2\backslash A_2)\big]\cup\big[(\Omega_1\backslash A_1)\times A_2\big]\cup\big[(\Omega_1\backslash A_1)\times(\Omega_2\backslash A_2)\big];\end{aligned}$$

dešinėje pusėje jungiamosios aibės yra disjunktūs matūs stačiakampiai. Iš čia matome, kad papildinys $(\Omega_1\times\Omega_2)\backslash(A_1\times A_2)$ yra reiškiamas disjunkčių mačių stačiakampių sąjunga.

Lemos teiginys išplaukia iš 5.1 teoremos. □

2 lema. *Jei $\{\Omega_1,\mathcal{A}_1,\mu_1\}$ ir $\{\Omega_2,\mathcal{A}_2,\mu_2\}$ yra erdvės su σ baigtiniais matais ir $A\in\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$, tai funkcija $\mu_2(A_{\omega_1})$, apibrėžta aibėje Ω_1, yra $\mathcal{A}_1$ mati, o funkcija $\mu_1(A^{\omega_2})$, apibrėžta aibėje Ω_2, yra $\mathcal{A}_2$ mati, be to,*

$$\int_{\Omega_1}\mu_2(A_{\omega_1})\mu_1(d\omega_1)=\int_{\Omega_2}\mu_1(A^{\omega_2})\mu_2(d\omega_2).$$

Kai $A=A_1\times A_2$, tie integralai yra lygūs $\mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$.

I r o d y m a s. 1. Tarkime, kad matai μ_1 ir μ_2 yra baigtiniai. Pažymėkime $\mathcal{M}$ visų $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ mačių aibių, kurioms teisingas lemos teiginys, sistemą.

Parodysime, kad sistemai priklauso visi matūs stačiakampiai. Jei $A=$ $=A_1\times A_2,\ A_1\in\mathcal{A}_1,\ A_2\in\mathcal{A}_2$, tai pagal (1) ir (2)

$$\mu_2(A_{\omega_1}) = \mu_2(A_2)\mathbf{1}_{A_1}(\omega_1),\ \mu_1(A^{\omega_2}) = \mu_1(A_1)\mathbf{1}_{A_2}(\omega_2).$$

Iš čia matome, kad funkcijos $\mu_2(A_{\omega_1})$ ir $\mu_1(A^{\omega_2})$ yra neneigiamos, pirmoji iš jų $\mathcal{A}_1$ mati, antroji – $\mathcal{A}_2$ mati, ir

$$\int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1})\mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \mu_1(A^{\omega_2})\mu_2(d\omega_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Iš čia turime, kad visos baigtinės mačių stačiakampių sąjungos priklauso $\mathcal{M}$. Tačiau, kaip teigia 1 lema, disjunkčių stačiakampių visų baigtinių sąjungų sistema sudaro aibių algebrą. Vadinasi, $\mathcal{M}$ yra aibių algebra.

Parodysime, kad $\mathcal{M}$ yra σ algebra. Tam įrodysime, kad ji yra monotoninė aibų klasė. Imkime monotonišką sistemos $\mathcal{M}$ aibių seką $A^{(n)}$ $(n = 1, 2, ...)$. Pažymėkime $A = \lim A^{(n)}$. Tada aibės $A^{(n)\omega_2}$ ir aibė A^{ω_2} yra $\mathcal{A}_1$ mačios, o aibės $A^{(n)}_{\omega_1}$ ir aibė A_{ω_1} yra $\mathcal{A}_2$ mačios. Funkcijos $\mu_1(A^{(n)\omega_2})$ yra neneigiamos ir $\mathcal{A}_1$ mačios, jų seka konverguoja į neneigiamą $\mathcal{A}_1$ mačią funkciją $\mu(A^{\omega_2})$. Lygiai taip pat funkcijos $\mu_2(A^{(n)}_{\omega_1})$ yra $\mathcal{A}_2$ mačios ir neneigiamos, jų seka konverguoja į neneigiamą $\mathcal{A}_2$ mačią funkciją $\mu_2(A_{\omega_2})$. Perėję lygybėje

$$\int_{\Omega_1} \mu_2(A^{(n)}_{\omega_1})\mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \mu_1(A^{(n)\omega_2})\mu_2(d\omega_2)$$

prie ribos, kai $n \to \infty$, pagal 9.14 teoremą gauname

$$\int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1})\mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \mu_1(A^{\omega_2})\mu_2(d\omega_2).$$

Vadinasi, $A \in \mathcal{M}$. Taigi $\mathcal{M}$ yra σ algebra, kuriai priklauso visi matūs stačiakampiai. Kadangi $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ yra σ algebra, generuota visų mačių stačiakampių sistemos, tai $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{M}$.

2. Tarkime dabar, kad visi matai yra σ baigtiniai. Aibes Ω_1 ir Ω_2 galime parašyti disjunkčių aibių skaičiomis sąjungomis

$$\Omega_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{1k}, \quad \Omega_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{2j}$$

su sąlygomis $\mu_1(C_{1k}) < \infty$ $(k = 1, 2, ...)$, $\mu_2(C_{2j}) < \infty$ $(j = 1, 2, ...)$. Tada

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{1k}\Big) \times \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{2j}\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} (C_{1k} \times C_{2j}).$$

Kiekvienai iš aibių $C_{1k} \times C_{2j}$ galime pritaikyti įrodytąją lemos dalį. Susumavę gauname, jog lema teisinga ir bendruoju atveju. □

4 teorema. *Jei* $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\}$ *ir* $\{\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2\}$ *yra erdvės su* σ *baigtiniais matais, tai aibės funkcija*

$$\lambda(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{\omega_1})\mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \mu_1(A^{\omega_2})\mu_2(d\omega_2), \tag{3}$$

apibrėžta σ *algebros* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *aibėms* A, *yra* σ *baigtinis matas, kuris tenkina lygybę*

$$\lambda(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2),$$

kai $A_1 \times A_2$ *yra bet kuris matus stačiakampis. Kiekvienas kitas matas mačioje erdvėje* $\{\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2\}$, *turįs tą savybę, sutampa su* λ.

Į r o d y m a s. Iš 9.18 teoremos turime, kad aibės funkcija λ yra σ adityvi. Iš 9.11 teoremos išplaukia, kad ji yra matas.

Aibę $\Omega_1 \times \Omega_2$ galima suskaidyti į skaičią sistemą mačių stačiakampių, kurių kiekvienas turi baigtinį matą. Vadinasi, λ yra σ baigtinis matas. Jo vienatis išplaukia iš 4.6 teoremos apie mato pratęsimą. □

Nusakytas 4 teoremoje matas vadinamas matų μ_1 ir μ_2 (Dekarto) *sandauga* ir žymimas $\mu_1 \times \mu_2$. Erdvė su matu $\{\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \times \mu_2\}$ yra vadinama erdvių su matais $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\}$ ir $\{\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2\}$ *sandauga* ir dažnai žymima $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\} \otimes \{\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2\}$.

5 teorema. *Jei* $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\} \otimes \{\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2\}$ *yra erdvių su baigtiniais matais sandauga ir* A *yra* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *mati aibė, tai ji turi nulinį* $\mu_1 \times \mu_2$ *matą tada ir tik tada, kai beveik visur mato* μ_1 *atžvilgiu pjūviai* A_{ω_1} *turi nulinį* μ_1 *matą:*

$$\mu_1\{\omega_1 : \mu_2(A_{\omega_1}) \neq 0\} = 0,$$

arba beveik visur mato μ_2 *atžvilgiu pjūviai* A^{ω_2} *turi nulinį* μ_2 *matą:*

$$\mu_2\{\omega_2 : \mu_1(A^{\omega_2}) \neq 0\} = 0.$$

Į r o d y m a s. Jei $\mu_1 \times \mu_2(A) = 0$, tai iš 9.9 teoremos turime, kad (3) formulėje pointegralinės funkcijos turi būti beveik visur lygios nuliui, pirmajame integrale mato μ_1 atžvilgiu, antrajame – mato μ_2 atžvilgiu. Iš (3) formulės matome, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys. Reikia pasinaudoti 9.11 teorema. □

6 (Tonelio[1]) teorema. *Jei* $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\} \otimes \{\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2\}$ *yra dviejų erdvių su* σ *baigtiniais matais sandauga ir* f *yra neneigiama* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *mati funkcija, tai integralai*

$$\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\mu_1(d\omega_1), \quad \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\mu_2(d\omega_2)$$

[1] Leonida Tonelli (1885–1946) – italų matematikas.

yra atitinkamai $\mathcal{A}_2$ mati ir $\mathcal{A}_1$ mati neneigiamos funkcijos ir

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu_1\times\mu_2\big(d(\omega_1,\omega_2)\big) = \\ = \int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu_2(d\omega_2)\Big)\mu_1(d\omega_1) = \\ = \int_{\Omega_2}\Big(\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\mu_1(d\omega_1)\Big)\mu_2(d\omega_2).$$

Jei f yra $\mu_1\times\mu_2$ integruojama funkcija, tai beveik visur mato μ_1 atžvilgiu ta funkcija (kaip kintamojo ω_2 funkcija) yra μ_2 integruojama ir beveik visur mato μ_2 atžvilgiu ji (kaip kintamojo ω_1 funkcija) yra μ_1 integruojama.

Į r o d y m a s. 1. Tarkime, kad A yra $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ mati aibė ir $f(\omega_1,\omega_2) = \mathbf{1}_A(\omega_1,\omega_2)$. Tada

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu_2(d\omega_2) = \mu_2(A_{\omega_1}),\quad \int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\mu_1(d\omega_1) = \mu_1(A^{\omega_2}).$$

Pagal 2 lemą funkcija $\mu_2(A_{\omega_1})$ yra $\mathcal{A}_1$ mati, o funkcija $\mu_1(A^{\omega_2})$ yra $\mathcal{A}_2$ mati. Pagal 4 teoremą

$$\int_{\Omega_1}\mu_2(A_{\omega_1})\mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2}\mu_1(A^{\omega_2})\mu_2(d\omega_2) = \\ = \mu_1\times\mu_2(A) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu_1\times\mu_2\big(d(\omega_1,\omega_2)\big).$$

Vadinasi, šiai funkcijai teoremos teiginys yra teisingas.

2. Teorema teisinga ir kiekvienai paprastajai neneigiamai funkcijai, nes ją galima užrašyti kaip $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ mačių aibių tiesinę kombinaciją.

3. Jei f yra bet kuri neneigiama $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ mati funkcija, tai galima rasti nemažėjančią neneigiamų paprastųjų funkcijų f_n seką, konverguojančią į f. Pagal antrąją įrodymo dalį teisingos lygybės

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2)\mu_1\times\mu_2\big(d(\omega_1,\omega_2)\big) = \\ = \int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2)\mu_2(d\omega_2)\Big)\mu_1(d\omega_1) = \\ = \int_{\Omega_2}\Big(\int_{\Omega_1} f_n(\omega_1,\omega_2)\mu_1(d\omega_1)\Big)\mu_2(d\omega_2). \tag{4}$$

Pereisime prie ribos, kai $n\to\infty$. Pirmasis narys virs

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu_1\times\mu_2\big(d(\omega_1,\omega_2)\big).$$

Funkcijos

$$\int_{\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2)\mu_2(d\omega_2),\quad \int_{\Omega_1} f_n(\omega_1,\omega_2)\mu_1(d\omega_1)$$

sudaro nemažėjančias neneigiamų $\mathcal{A}_1$ mačių bei $\mathcal{A}_2$ mačių funkcijų sekas. Jų ribos yra $\mathcal{A}_1$ mati bei $\mathcal{A}_2$ mati funkcijos. Pastarosios pagal 9.14 teoremą yra lygios

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu_2(d\omega_2),\quad \int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\mu_1(d\omega_1).$$

Pagal tą pačią teoremą

$$\int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2)\mu_2(d\omega_2)\Big)\mu_1(d\omega_1)\to$$
$$\to\int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu_2(d\omega_2)\Big)\mu_1(d\omega_1),$$
$$\int_{\Omega_2}\Big(\int_{\Omega_1} f_n(\omega_1,\omega_2)\mu_1(d\omega_1)\Big)\mu_2(d\omega_2)\to$$
$$\to\int_{\Omega_2}\Big(\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\mu_1(d\omega_1)\Big)\mu_2(d\omega_2).$$

Iš (4) gauname įrodomąją lygybę.

Teiginys apie f integruojamumą išplaukia iš 9.10 teoremos. □

7 (Fubinio) teorema. *Tarkime, kad* $\{\Omega_1,\mathcal{A}_1,\mu_1\}\otimes\{\Omega_2,\mathcal{A}_2,\mu_2\}$ *yra dviejų mačių erdvių su* σ *baigtiniais matais sandauga ir* f *yra integruojama toje sandaugoje funkcija. Tada beveik visur mato* μ_1 *atžvilgiu funkcija* $f(\omega_1,\omega_2)$, *kaip kintamojo* ω_2 *funkcija, yra* μ_2 *integruojama ir beveik visur mato* μ_2 *atžvilgiu ji, kaip kintamojo* ω_1 *funkcija, yra* μ_1 *integruojama, be to, integralai*

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu_2(d\omega_2),\quad \int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\mu_1(d\omega_1)$$

yra integruojami atitinkamai matų μ_1 *bei* μ_2 *atžvilgiu ir*

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu_1\times\mu_2\big(d(\omega_1,\omega_2)\big)=$$
$$=\int_{\Omega_1}\Big(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)\mu_2(d\omega_2)\Big)\mu_1(d\omega_1)=$$
$$=\int_{\Omega_2}\Big(\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\mu_1(d\omega_1)\Big)\mu_2(d\omega_2).$$

Į r o d y m a s. Funkcijoms f^+ ir f^- taikome 5 teoremą. $\square$

Šioje teoremoje funkcijos integruojamumą galime pakeisti jos kvaziintegruojamumu. Įrodymas toks pat.

Remiantis 6 ir 7 teoremomis, iš dvilypių integralų galima gauti kartotinius.

Dabar pamėginsime ką tik išdėstytą teoriją apibendrinti kelių erdvių su matais sandaugai. Mačių erdvių $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\}, ..., \{\Omega_s, \mathcal{A}_s\}$ *sandauga* vadiname mačią erdvę $\{\Omega_1 \times ... \times \Omega_s, \mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_s\}$, kurioje $\mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_s$ yra σ algebra, generuota vadinamųjų mačių stačiakampių $A_1 \times ... \times A_s$, $A_k \in \mathcal{A}_k$ $(k = = 1, ..., s)$. Vartojamas žymėjimas $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\} \otimes ... \otimes \{\Omega_s, \mathcal{A}_s\}$.

Nežymiai pakeitę anksčiau išdėstytą teoriją, galime gauti tokią teoremą.

8 teorema. *Jei $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\}, ..., \{\Omega_s, \mathcal{A}_s, \mu_s\}$ yra erdvės su σ baigtiniais matais, tai galima rasti vienintelį σ baigtinį matą μ, apibrėžtą σ algebroje $\mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_s$ ir turintį savybę: $\mu(A_1 \times ... \times A_s) = \mu_1(A_1)...\mu_s(A_s)$, kai $A_1 \in \in \mathcal{A}_1, ..., A_s \in \mathcal{A}_s$. Jei visi matai μ_k $(k = 1, ..., s)$ yra baigtiniai, tai ir matas μ yra baigtinis.*

Šis matas vadinamas *matų $\mu_1, ..., \mu_s$ sandauga* ir žymimas $\mu_1 \times ... \times \mu_s$. Erdvė $\{\Omega_1 \times ... \times \Omega_s, \mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_s, \mu_1 \times ... \times \mu_s\}$ dažnai žymima $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\} \otimes ... \otimes \{\Omega_s, \mathcal{A}_s, \mu_s\}$.

Galima apibendrinti ir Fubinio teoremą.

9 teorema. *Tarkime, kad $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\} \otimes ... \otimes \{\Omega_s, \mathcal{A}_s, \mu_s\}$ yra erdvių su σ baigtiniais matais sandauga, o f – integruojama toje sandaugoje funkcija. Tada beveik visiems $(\omega_1, ..., \omega_{s-1})$ mato $\mu_1 \times ... \times \mu_{s-1}$ atžvilgiu funkcija $f(\omega_1, ..., \omega_{s-1}, \omega_s)$ (kaip ω_s funkcija) yra μ_s integruojama; beveik visiems $(\omega_1, ..., \omega_{s-2})$ mato $\mu_1 \times ... \times \mu_{s-2}$ atžvilgiu funkcija*

$$\int_{\Omega_s} f(\omega_1, ..., \omega_{s-1}, \omega_s)\mu_s(d\omega_s)$$

(kaip ω_{s-1} funkcija) yra μ_{s-1} integruojama ir t. t.; beveik visiems ω_1 mato μ_1 atžvilgiu funkcija

$$\int_{\Omega_2} \mu_2(d\omega_2) \int_{\Omega_3} \mu_3(d\omega_3) ... \int_{\Omega_s} \mu_s(d\omega_s) f(\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_s)$$

yra μ_1 integruojama ir

$$\int_{\Omega_1 \times ... \times \Omega_s} f(\omega_1, ..., \omega_s)\mu_1 \times ... \times \mu_s\big(d(\omega_1, ..., \omega_s)\big) =$$
$$= \int_{\Omega_1} \mu_1(d\omega_1) \int_{\Omega_2} \mu_2(d\omega_2) ... \int_{\Omega_s} \mu_s(d\omega_s) f(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_s).$$

Ir čia funkcijos integruojamumą galima pakeisti jos kvaziintegruojamumu. Teisingas ir Tonelio teoremos analogas: vietoje integruojamos funkcijos galima imti neneigiamą mačią funkciją.

Galima apibendrinti ir kitas šio skyrelio teoremas. Tai paliekame skaitytojui.

Tikimybių teorijoje nagrinėjamos ir erdvių su matu begalinių sistemų sandaugos.

Tarkime, turime seką erdvių su σ baigtiniais matais $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\}, \{\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2\}, ...$ Sudarykime sandaugą $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ...$ Imkime visas galimas sandaugas $A_1 \times ... \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times ...$, kuriose $A_1 \in \mathcal{A}_1, ..., A_n \in \mathcal{A}_n, ...$, o n – bet kuris natūralusis skaičius, ir sudarykime baigtinio skaičiaus tokių sandaugų disjunkčių sąjungų sistemą. Ji bus aibės Ω poaibių algebra. Praplėskime ją iki jos generuotos σ algebros, kurią vėl žymėsime $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes ...$ Matą vėl iš pradžių įvedame aibėms $A_1 \times ... \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times ...$:

$$\mu(A_1 \times ... \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times ...) = \mu_1(A_1)...\mu_n(A_n),$$

vėliau baigtinio jų skaičiaus disjunkčioms sąjungoms

$$\mu\Bigg(\bigcup_{j=1}^{r}\big(A_1^j \times ... \times A_{n_j}^j \times \Omega_{n_j+1} \times \Omega_{n_j+2} \times ...\big)\Bigg) = \sum_{j=1}^{r} \mu_1(A_1^j)...\mu_{n_j}(A_{n_j}^j).$$

Po to, remdamiesi teorema apie mato pratęsimą, šį matą galime praplėsti visoms σ algebros $\mathcal{A}$ aibėms. Tą matą galima žymėti $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times ...$, o gautąją erdvę su matu –

$$\{\Omega, \mathcal{A}, \mu\} = \{\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1\} \otimes \{\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2\} \otimes ...$$

Reikia ir bendresnio atvejo, kai sistema yra begalinė ir bet kokios galios. Tokios erdvės praverčia atsitiktinių procesų teorijoje.

Bet kurios netuščių aibių sistemos $\{\Omega_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ sandauga vadiname sistemų

$$\omega = \{\omega_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

visumą, kurioje kiekvieną $\lambda \in \Lambda$ atitinka elementas ω_λ iš Ω_λ. Šią sandaugą paprastai žymi

$$\bigtimes_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda. \tag{5}$$

(5) sandaugos poaibis

$$A = B \times \Big(\bigtimes_{\lambda \in S^c} \Omega_\lambda\Big),$$

kai

$$B \subset \bigtimes_{\lambda \in S} \Omega_\lambda,$$

$S \subset \Lambda$, yra vadinamas *cilindru su pagrindu* B, kai S yra baigtinis Λ poaibis. Jei cilindras yra pavidalo

$$\Big(\bigtimes_{\lambda \in S} A_\lambda\Big) \times \Big(\bigtimes_{\lambda \in S^c} \Omega_\lambda\Big) \tag{6}$$

(čia S – baigtinis Λ poaibis, o $A_\lambda \subset \Omega_\lambda$), tai jis vadinamas *stačiakampiu.* Jei turime mačias erdves $\{\Omega_\lambda, \mathcal{A}_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ ir $A_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$ $(\lambda \in S)$, tai (6) stačiakampį vadiname *mačiu.* Nesunku įrodyti, kad visos galimos baigtinės mačių stačiakampių disjunkčios sąjungos sudaro aibių algebrą. Šios algebros generuota σ algebra yra žymima

$$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$$

ir vadinama σ algebrų $\mathcal{A}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ *sandauga.* Mati erdvė

$$\Big\{\bigtimes_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda, \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda\Big\} \tag{7}$$

vadinama mačių erdvių $\{\Omega_\lambda, \mathcal{A}_\lambda\}$ *sandauga* ir dažnai žymima

$$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \{\Omega_\lambda, \mathcal{A}_\lambda\}.$$

Tarkime, kad (7) mačių erdvių sandaugoje yra duotas tikimybinis matas P. Imkime bet kurį baigtinį aibės Λ poaibį S. Mačioje erdvėje

$$\Big\{\bigtimes_{\lambda \in S} \Omega_\lambda, \bigotimes_{\lambda \in S} \mathcal{A}_\lambda\Big\} \tag{8}$$

apibrėšime tikimybinį matą P_S, kiekvienai aibei

$$A \in \bigtimes_{\lambda \in S} \mathcal{A}_\lambda$$

priskirdami cilindro su pagrindu A (7) erdvėje matą

$$P_S(A) = P\Big\{A \times \bigtimes_{\lambda \in S^c} \Omega_\lambda\Big\}.$$

Matą P_S vadiname mato P *projekcija* (8) mačioje erdvėje. Nesunkiai įrodoma (tai gali padaryti skaitytojas), kad tikimybinio mato P projekcijų sistema $\{P_S\}$, kai S perbėga visus galimus baigtinius aibės Λ poaibius, tenkina vadinamąją *suderinimo sąlygą*: kai S_1 ir S_2, $S_1 \subset S_2$, yra bet kurie baigtiniai aibės λ poaibiai, erdvėje

$$\Big\{ \bigtimes_{\lambda \in S_2} \Omega_\lambda, \ \bigotimes_{\lambda \in S_2} \mathcal{A}_\lambda \Big\},$$

projekcija $(P_{S_2})_{S_1}$ mačioje erdvėje

$$\Big\{ \bigtimes_{\lambda \in S_1} \Omega_\lambda, \ \bigotimes_{\lambda \in S_2} \mathcal{A}_\lambda \Big\},$$

sutampa su matu P_{S_1}.

Kyla klausimas: ar teisingas atvirkštinis teiginys. Sakykime, duota mačių erdvių sistema $\{\Omega_\lambda, \mathcal{A}_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ ir kiekvienam baigtiniam aibės Λ poaibiui S nurodytas tikimybinis matas (8) mačioje erdvėje. Tarkime, kad matų sistema $\{P_S\}$ tenkina suderinimo sąlygą. Ar egzistuoja (7) mačioje erdvėje tikimybinis matas P, kurio projekcija kiekvienoje (7) pavidalo erdvėje sutampa su matu P_S? Bendruoju atveju toks matas, deja, neegzistuoja. Reikia įvesti kai kuriuos apribojimus. Toks matas egzistuoja, kai aibės Ω_λ yra visų tiesės taškų aibės R, o $\mathcal{A}_\lambda$ – tiesės taškų visų Borelio aibių σ algebros $\mathcal{B}$ (Kolmogorovo teorema); jos įrodymą žr., pvz., [27].

11. LEBEGO–STYLTJESO IR RYMANO–STYLTJESO INTEGRALAI

8 skyrelyje apibrėžėme Lebego–Styltjeso integralą. Jei F yra apibrėžta realiųjų skaičių tiesėje nemažėjanti tolydi iš kairės funkcija, tai ji generuoja Lebego–Styltjeso matą μ_F. Integralas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu_F(dx),$$

kaip sakėme, yra vadinamas Lebego-Styltjeso integralu ir dar kitaip žymimas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x).$$

Šį integralą (plg. 9 skyrelio gale įvestąjį Radono integralą) galime dar apibendrinti. Jei F yra dviejų nemažėjančių ir tolydžių iš kairės funkcijų skirtumas $F_1 - F_2$, o μ_{F_1} ir μ_{F_2} – jų generuoti matai, tai $\mu_{F_1} - \mu_{F_2}$ yra apibendrintas matas (arba krūvis). Jį vėl žymėsime μ_F ir vadinsime *krūviu*, generuotu funkcijos F. Tada integralų skirtumą

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu_{F_1}(dx) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu_{F_2}(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_1(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF_2(x),$$

kai kiekvienas iš jų ir skirtumas turi prasmę, vėl vadiname *Lebego–Styltjeso integralu* ir vėl žymime

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x).$$

Galime parodyti, kad jo reikšmė nepriklauso nuo F išraiškos dviejų nemažėjančių funkcijų skirtumu.

Matematikoje dažnai praverčia ir kitokie, vadinamieji Rymano–Styltjeso integralai. Tarkime, kad F yra apibrėžta baigtiniame intervale $[a, b)$, išreiškiama dviejų aprėžtų nemažėjančių tolydžių iš kairės funkcijų skirtumu, o f – bet kuri realioji funkcija, nusakyta tame pačiame intervale. Suskaidykime intervalą $[a, b)$ taškais

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

į intervalus $[x_{k-1}, x_k)$. Kiekviename intervale $[x_{k-1}, x_k)$ parinkime po bet kurį tašką ξ_k. Sudarykime integralines sumas

$$s = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big).$$

Čia laikome $F(x_n) = F(b-0)$. Ji priklausys nuo suskaidymo ir taškų ξ_k parinkimo. Didinkime suskaidymo taškų skaičių taip, kad suskaidymo intervalų ilgiai tolygiai konverguotų į nulį:

$$\max_{1\le k\le n} (x_k - x_{k-1}) \to 0.$$

Jei egzistuoja riba $\lim s$ ir ji nepriklauso nei nuo skaidymo taškų, nei nuo taškų ξ_k parinkimo būdų, tai sakome, kad funkcija f yra integruojama *Rymano–Styltjeso prasme funkcijos F atžvilgiu*, o pati riba vadinama funkcijos f *Rymano–Styltjeso integralu funkcijos F atžvilgiu* ir žymima taip pat kaip ir Lebego–Styltjeso integralas:

$$\int_{[a,b)} f(x)dF(x).$$

Kai $F(x) \equiv x$, turime įprastą Rymano integralą

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Apibrėždami Rymano–Styltjeso integralą, laikėme F nemažėjančia tolydžia iš kairės. Tačiau apibrėžimas tinka ir tada, kai ji yra dviejų bet kokių nemažėjančių funkcijų skirtumas. Tokias funkcijas vadina *baigtinės variacijos funkcijomis.* Analogiškai apibrėžiamas integralas ir intervaluose $(a,b]$, $[a,b]$, (a,b). Apskritai integralai minėtuose intervaluose ne visada sutampa. Pavyzdžiui, jei a yra funkcijos F trūkio taškas, tai integralas intervale $[a,b]$ yra lygus integralo intervale $(a,b]$ ir nario $f(a)\big(F(a+0)-F(a)\big)$ sumai.

Rymano–Styltjeso integralu begaliniame intervale – visoje realiųjų skaičių tiesėje ar pustiesėje – laikoma integralo baigtiniame intervale riba, kai vienas ar abu to intervalo galai tolsta begalybėn. Antai, integralas tiesėje $R = (-\infty,\infty)$ nusakomas lygybe

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_{[a,b)} f(x)dF(x),$$

jei ta riba egzistuoja, kai a tolsta į $-\infty$, o b – į ∞ nepriklausomai vienas nuo kito.

Kaip matėme, Lebego–Styltjeso integralas yra apibrėžiamas bet kokiose mačiose aibėse, tuo tarpu Rymano–Styltjeso integralas – tik intervaluose, baigtiniuose ir begaliniuose.

Lebego ir Rymano integralų apibrėžimų principai yra iš esmės skirtingi. Apibrėždami Rymano integralą, mes grupuojame tiesės taškus, kurie yra arti vienas kito. Apibrėždami Lebego integralą, tuos taškus grupuojame pagal funkcijos reikšmių artumą. Todėl Rymano integralas egzistuoja tada, kai integruojamoji funkcija nėra "labai trūki", o Lebego integralas – žymiai platesnei funkcijų klasei.

Toliau rasime būtinas ir pakankamas integruojamumo Rymano prasme sąlygas bei ryšį tarp Rymano ir Lebego integralų.

Mums pravers keletas pažymėjimų.

Tarkime, kad f yra realioji funkcija intervale $[a,b)$. Imkime to intervalo skaidinių seką

$$a = x_{n0} < x_{n1} < ... < x_{nk_n} = b \quad (n = 1,2,...),$$

turinčią savybes: $(n+1)$-asis skaidinys yra gaunamas iš n-ojo skaidinio, pridėjus naujų skaidymo taškų, ir

$$\lambda_n = \max_{1\le k\le k_n} (x_{nk} - x_{n,k-1}) \to 0,$$

kai $n\to\infty$. Pažymėkime

$$\begin{aligned} I_{nk} &= [x_{n,k-1}, x_{nk}], \\ m_{nk} &= \inf_{x\in I_{nk}} f(x), \\ M_{nk} &= \sup_{x\in I_{nk}} f(x), \end{aligned}$$
$$(k = 1,...,k_n; n = 1,2,...)$$

ir įveskime funkcijas

$$A_n(x) = m_{nk}, \text{ kai } x \in I_{nk},$$
$$V_n(x) = M_{nk}, \text{ kai } x \in I_{nk}.$$

Visiems $x \in [a, b)$ turime

$$A_1(x) \le A_2(x) \le ... \le f(x) \le ... \le V_2(x) \le V_1(x).$$

Pažymėkime

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x), \ V(x) = \lim_{n\to\infty} V_n(x).$$

Aišku, kad

$$A(x) \le f(x) \le V(x).$$

Įveskime

$$s_n = \sum_{k=1}^{k_n} m_{nk}\Delta_{nk}, \ S_n = \sum_{k=1}^{k_n} M_{nk}\Delta_{nk};$$

čia $\Delta_{nk} = x_{nk} - x_{n,k-1}$. Pastarosios sumos yra vadinamos apatine ir viršutine Darbu[1] sumomis.

1 teorema. *Jei funkcija f yra aprėžta ir integruojama Rymano prasme intervale $[a, b)$, tai $V(x)$ beveik visur Lebego mato prasme lygi $A(x)$ ir*

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx.$$

Į r o d y m a s. Iš klasikinės matematinės analizės žinome: jei f yra integruojama Rymano prasme, tai

$$s_n \nearrow (R)\int_a^b f(x)dx, \quad s_n \searrow (R)\int_a^b f(x)dx.$$

Apatines ir viršutines Darbu sumas galime išreikšti Lebego integralais

$$s_n = \sum_{k=1}^{k_n} m_{nk}\Delta_{nk} = \sum_{k=1}^{k_n}\int_{I_{nk}} m_{nk}dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{k_n}\int_{I_{nk}} A_n(x)dx = \int_a^b A_n(x)dx,$$
$$S_n = \int_a^b V_n(x)dx.$$

[1] Gaston Darboux (1842–1917) – prancūzų matematikas.

Kadangi A_n ir V_n yra tolygiai aprėžtos (nes funkcija f yra aprėžta), tai iš integralo savybių turime

$$s_n = \int_a^b A_n(x)dx \nearrow \int_a^b A(x)dx,$$
$$S_n = \int_a^b V_n(x)dx \searrow \int_a^b V(x)dx.$$

Vadinasi,

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b V(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

Iš čia

$$\int_a^b \big(V(x) - A(x)\big)dx = 0.$$

Kadangi pointegralinė funkcija yra neneigiama, tai ji beveik visur Lebego mato prasme turi būti lygi nuliui.

Iš nelygybių $A(x) \le f(x) \le V(x)$ išplaukia, kad

$$\{x : f(x) \ne A(x)\} \subset \{x : V(x) \ne A(x)\}.$$

Todėl beveik visur

$$f(x) = A(x). \tag{1}$$

$A(x)$ yra Borelio funkcija, kaip Borelio funkcijų sekos $A_n(x)$ riba. Parodysime, kad f yra mati Lebego prasme. Kiekvienam $z \in R$ aibė

$$\{x : f(x) < z\} = \big(\{x : A(x) < z\} \cap \{x : A(x) = V(x)\}\big) \cup$$
$$\cup \big(\{x : f(x) < z\} \cap \{x : A(x) \ne V(x)\}\big)$$

yra mati Lebego prasme, nes pirmuosiuose skliaustuose esanti aibė yra Borelio aibė, o antruosiuose skliaustuose esanti aibė yra nulinė.

Iš (1) pagal 9.12 teoremą

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b A(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx. \;\square$$

Lema. *Tarkime, kad x_0 nesutampa nė su vienu iš taškų $x_{n0}, ..., x_{nk_n}$ ($n = 1, 2, ...$). Funkcija f yra tolydi taške x_0 tada ir tik tada, kai $V(x_0) = A(x_0)$ (ir, žinoma, $= f(x_0)$).*

Į r o d y m a s. 1. Tarkime, kad f yra tolydi taške x_0. Imkime bet kurį $\varepsilon > 0$. Egzistuoja toks $\delta > 0$, kad $|f(y) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, kai $|y - x_0| < \delta$. Egzistuoja toks n_0, kad $\lambda_n < \delta$, kai $n \ge n_0$. Jei $x_0 \in I_{nk}$ ir $n \ge n_0$, tai

$$V_n(x_0) - f(x_0) = M_{nk} - f(x_0) = \sup_{y \in I_{nk}} \big(f(y) - f(x_0)\big) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

ir analogiškai

$$f(x_0) - A_n(x_0) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Todėl, sudėję abi nelygybes, gauname

$$V_n(x_0) - A_n(x_0) \le \varepsilon.$$

Iš čia

$$V(x_0) - A(x_0) = \lim_{n\to\infty} \big(V_n(x_0) - A_n(x_0)\big) = 0.$$

2. Tarkime, kad x_0 nesutampa nė su vienu iš taškų $x_{n0}, ..., x_{nk_n}$ $(n = 1, 2, ...)$ ir $V(x_0) = A(x_0)$. Bet kuriam $\varepsilon > 0$ galime rasti tokį n_0, kad

$$V_n(x_0) - A(x_0) < \varepsilon,$$

kai $n \ge n_0$. Jei x_0 ir $y_0 \in (x_{n,k-1}, x_{nk})$, tai

$$f(y) - f(x_0) \le M_{nk} - f(x_0) = V_n(x_0) - f(x_0) \le V_n(x_0) - A_n(x_0) < \varepsilon$$

ir

$$f(x_0) - f(y) \le f(x_0) - m_{nk} = f(x_0) - A_n(x_0) \le V_n(x_0) - A_n(x_0) < \varepsilon,$$

kai $n \ge n_0$. Taigi

$$|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

kai $n \ge n_0$ ir $x_0, y \in (x_{n,k-1}, x_{nk})$. Vadinasi, f yra tolydi taške x_0. □

2 teorema. *Jei funkcija f yra aprėžta intervale $[a, b)$, tai ji integruojama Rymano prasme tame intervale tada ir tik tada, kai jos trūkio taškų aibės Lebego matas yra lygus nuliui.*

Į r o d y m a s. 1. Jei f yra integruojama intervale $[a, b)$ Rymano prasme, tai $V(x) = A(x)$ beveik visur Lebego mato prasme. Iš lemos išplaukia, kad f gali turėti trūkio taškus tik skaidinių taškuose x_{nk} $(n = 1, 2, ...;\ k = 0, 1, ..., k_n)$ ir tuose taškuose x_0, kuriuose $V(x_0) = A(x_0)$. Vadinasi, jų aibės matas yra lygus nuliui.

2. Tarkime, kad aprėžtos funkcijos f trūkio taškų aibės T Lebego matas yra 0. Tada aibės

$$\{x : V(x) \ne A(x)\} \cup \{x_{nk};\ n = 1, 2, ...;\ k = 0, 1, ..., k_n\}$$

Lebego matas taip pat yra lygus nuliui, t. y. beveik visur

$$A(x) = f(x) = V(x).$$

Todėl

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b V(x)dx.$$

Kadangi

$$s_n \nearrow \int_a^b A(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

ir

$$S_n \searrow \int_a^b V(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

gauname

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Tai reiškia, kad egzistuoja funkcijos f integralas Rymano prasme intervale $[a,b)$ ir

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \ \square$$

3 teorema. *Jei funkcija f yra tolydi, o F – baigtinės variacijos funkcija intervale $[a,b]$, tai Rymano–Styltjeso integralas*

$$(RS)\int_{[a,b)} f(x)dF(x) \tag{2}$$

egzistuoja ir sutampa su Lebego–Styltjeso integralu

$$(LS)\int_{[a,b)} f(x)dF(x). \tag{3}$$

Į r o d y m a s. Imkime intervalo $[a,b)$ skaidinius

$$a = x_{n0} < x_{n1} < ... < x_{nk_n} = b$$

su sąlyga

$$\max_{1\le k\le k_n} |x_{nk} - x_{n,k-1}| \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Kiekviename intervale $[x_{n,k-1}, x_{nk})$ parinkime po tašką ξ_{nk}. Pažymėkime $f_n(x) = f(\xi_{nk})$, kai $x_{n,k-1} \le x \le x_{nk}$. Kadangi funkcija f yra tolydi intervale $[a,b]$, tai ji ir tolygiai tolydi. Todėl

$$\sup_{a\le x<b} |f_n(x) - f(x)| \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Vadinasi, visiems pakankamai dideliems n

$$|f_n(x)| \le f(x) + C; \tag{4}$$

čia C yra konstanta. Tada suma

$$\sum_{k=1}^{k_n} f(\xi_{nk})\big(F(x_{nk}) - F(x_{n,k-1})\big)$$

yra lygi Lebego–Styltjeso integralui ($f_n(x)$ yra paprastoji funkcija)

$$(LS)\int_{[a,b)} f_n(x)dF(x).$$

Kadangi funkcija $f(x)$, kaip paprastųjų funkcijų sekos riba, yra mati, be to, pagal (4) aprėžta, tai pagal 9.16 (Lebego) teoremą (ji tinka ir krūviams)

$$\lim_{n\to\infty}(LS)\int_{[a,b)} f_n(x)dF(x) = (LS)\int_{[a,b)} f(x)dF(x).$$

Gavome, kad egzistuoja integralinių sumų riba, t. y. (2) Rymano–Styltjeso integralas ir jis lygus (3) Lebego–Styltjeso integralui. □