III skyrius. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SEKOS. ATSITIKTINIAI PROCESAI

1. BORELIO–KANTELIO LEMA. NULIO ARBA VIENETO DĖSNIS

Nagrinėsime atsitiktinių dydžių sekas bei įvairius jų konvergavimo tipus.

Šiame skyrelyje tiriamos aibės yra iš tikimybinės erdvės $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$.

1 lema. *Jei* $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, ...)$, *tai*

$$P(\limsup_n A_n) = \lim_{k\to\infty} P\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big),$$

$$P(\liminf_n A_n) = \lim_{k\to\infty} P\Big(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\Big).$$

Į r o d y m a s. Pažymėkime

$$C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ (n = 1, 2, ...), \tag{1}$$

$$D_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \ (n = 1, 2, ...). \tag{2}$$

(1) aibės sudaro monotoniškai mažėjančią seką, todėl pagal I.10.8 teoremą

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\Big) = \lim_{k\to\infty} P(C_k).$$

(2) aibės sudaro monotoniškai didėjančią seką, todėl pagal I.10.7 teoremą

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\Big) = \lim_{k\to\infty} P(D_k). \ \square$$

2 lema. *Kiekvienam realiajam x*

$$1 + x \le e^x.$$

Į r o d y m a s. Funkcijos $f(x) = e^x - 1 - x$ pirmoji ir antroji išvestinės yra

$$f'(x) = e^x - 1, \ f''(x) = e^x.$$

Kadangi antroji išvestinė teigiama, tai stacionarusis taškas $x = 0$ yra f minimumo taškas. Todėl $f(x) \ge f(0)$ visiems realiesiems x. □

Dabar įrodysime teoremą, kuri labai plačiai taikoma.

1 teorema (Borelio–Kantelio[1] lema). *Tarkime, kad* $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Jei eilutė*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{3}$$

konverguoja, tai

$$P(\limsup_n A_n) = 0. \tag{4}$$

Jei įvykiai A_n *yra nepriklausomi ir* (3) *eilutė diverguoja, tai*

$$P(\limsup_n A_n) = 1. \tag{5}$$

Į r o d y m a s. 1. Iš (3) eilutės konvergavimo išplaukia, kad

$$P\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \to 0,$$

kai $k \to \infty$. Iš 1 lemos išplaukia 4 formulė.

2. Sakykime, A_n yra nepriklausomi. Pagal 1 lemą

$$P(\liminf_n A_n^c) = \lim_{k\to\infty} P\Big(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\Big). \tag{6}$$

Kadangi įvykiai A_n^c yra taip pat nepriklausomi, tai kiekvienam $N \ge k$

$$P\Big(\bigcap_{n=k}^{N} A_n^c\Big) = \prod_{n=k}^{N} P(A_n^c) = \prod_{n=k}^{N} \big(1 - P(A_n)\big). \tag{7}$$

Pagal 2 lemą (7) reiškinys yra ne didesnis už

[1] Francesco Paolo Cantelli (1875–1966) – italų matematikas.

$$\prod_{n=k}^{N} e^{-P(A_n)} = \exp\bigl(-\sum_{n=k}^{N} P(A_n)\bigr).$$

Jei (3) eilutė diverguoja, tai

$$P\bigl(\bigcap_{n=k}^{N} A_n^c\bigr) \to 0,$$

kai $N \to \infty$. Tačiau aibės

$$\bigcap_{n=k}^{N} A_n^c \quad (N = k, k+1, ...)$$

sudaro monotoniškai mažėjančią seką. Todėl

$$P\bigl(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\bigr) = \lim_{N\to\infty} P\bigl(\bigcap_{n=k}^{N} A_n^c\bigr) = 0.$$

Iš (6) lygybės išplaukia

$$P(\liminf_n A_n^c) = 0.$$

Iš čia, kadangi $\liminf_n A_n^c = (\limsup_n A_n)^c$, gauname

$$P\bigl((\limsup_n A_n)^c\bigr) = 0,$$

t. y. (5) lygybę. □

Antrojoje Borelio–Kantelio lemos dalyje reikalavome, kad įvykiai A_n būtų nepriklausomi. Nesunku parodyti, kad priešingu atveju ta lema gali ir negalioti. Imkime tikimybinę erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, kurioje $\Omega = [0,1]$, sistema $\mathcal{A}$ sudaryta iš visų mačių Lebego prasme intervalo $[0,1]$ poaibių, o P yra Lebego matas. Aibių sekos $A_n = (0, 1/n)$ riba $\lim_n A_n = \varnothing$, $P(\lim_n A_n) = 0$, tuo tarpu eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguoja.

Tačiau nepriklausomumo reikalavimą galima susilpninti. Pakanka, pavyzdžiui, reikalauti, kad įvykiai A_n būtų kas du nepriklausomi, arba bendriau, kad

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} P(A_k \cap A_l)}{\bigl(\sum_{l=1}^{n} P(A_k)\bigr)^2} = 1$$

(žr. [30], p. 327).

Abu Borelio–Kantelio lemos teiginiai, kai atsitiktiniai įvykiai yra nepriklausomi, vadinami Borelio nulio arba vieneto dėsniu. Tai yra atskiras atvejis bendresnio dėsnio, kurį netrukus įrodysime.

Tarkime, kad $\{X_n\}$ yra atsitiktinių dydžių seka. Pažymėkime $A_n^\infty = \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$ atsitiktinių dydžių $X_n, X_{n+1}, ...$ generuotą σ algebrą, t. y. mažiausią σ algebrą, kuriai priklauso visos aibės

$$\{\omega : X_n(\omega) \in B_n, ..., X_{n+k}(\omega) \in B_{n+k}\};$$

čia k yra bet koks natūralusis skaičius, $B_n, ..., B_{n+k}$ – bet kokios Borelio aibės. σ algebrų $\mathcal{A}_n^\infty (n = 1, 2, ...)$ seka yra monotoniškai mažėjanti. Jų sankirta

$$\mathcal{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n^\infty$$

vadinama *asimptotine* atsitiktinių dydžių sekos $\{X_n\}$ σ algebra. Ji nesikeičia, atmetus baigtinį sekos $\{X_n\}$ narių skaičių. Įvykis $A \in \mathcal{E}$ taip pat vadinamas *asimptotiniu.*

Paminėsime keletą asimptotinių įvykių.

1 p a v y z d y s. Tarkime, kad $B_1, B_2, ...$ yra Borelio aibių seka. Įvykis "$X_n \in B_n$ be galo dideliam indeksų n skaičiui", t. y.

$$\limsup_n \{\omega : X_n(\omega) \in B_n\}$$

yra σ algebros $\mathcal{E}$ įvykis.

2 p a v y z d y s. Sekos $\{X_n\}$ konvergavimas (arba divergavimas) yra įvykis iš $\mathcal{E}$. Iš tikrųjų sekos konvergavimo aibė yra (žr. II.1.3 teoremos įrodymą)

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{r=n}^{\infty} \bigcap_{s=n}^{\infty} \Big\{\omega : |X_r(\omega) - X_s(\omega)| < \frac{1}{k}\Big\}.$$

3 p a v y z d y s. Atsitiktinių dydžių eilutės

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$$

konvergavimas bei divergavimas yra įvykiai iš $\mathcal{E}$. Įrodykite!

4 p a v y z d y s. Įvykis

$$\Big\{\omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big(X_1(\omega) + ... + X_n(\omega)\big) < \infty\Big\}$$

taip pat priklauso $\mathcal{E}$. Įrodykite!

2 teorema (Kolmogorovo nulio arba vieneto dėsnis). *Jei* $\{X_n\}$ *yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka, tai kiekvieno jos asimptotinio įvykio tikimybė yra lygi* 0 *arba* 1.

Ši teorema teigia, kad asimptotinė σ algebra yra sudaryta iš įvykių, kurie nuo $\varnothing$ ir Ω skiriasi tik nuline tikimybe.

Į r o d y m a s. Pažymėkime $\mathcal{A}_1^n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ mažiausią σ algebrą, kuriai priklauso visos aibės $\{\omega : X_1(\omega) \in B_1, ..., X_n(\omega) \in B_n\}$, kai $B_1, ..., B_n$ yra Borelio aibės. Tada

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_1^n$$

yra taip pat algebra, tačiau nebūtinai σ algebra. Nesunku suvokti, kad $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_1^\infty$.

Atkreipsime dėmesį, kad σ algebros $\mathcal{A}_1^n$ ir $\mathcal{A}_{n+1}^\infty$ kiekvienam n yra nepriklausomos. Kadangi $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_{n+1}^\infty$, tai $\mathcal{E}$ ir $\mathcal{A}_1^n$ yra taip pat nepriklausomos kiekvienam n. Iš čia išplaukia, kad ir $\mathcal{E}$, ir $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_1^\infty$ yra nepriklausomos (įrodykite!). Vadinasi, kiekvienam $A \in \mathcal{E}$ ir bet kuriam $C \in \mathcal{A}_1^\infty$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C).$$

Kadangi $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_1^\infty$, tai ši lygybė teisinga ir tuo atveju, kai $C = A$, t. y. $P(A) = P^2(A)$. Tokia lygybė teisinga tada ir tik tada, kai $P(A)$ lygi 0 arba 1. □

Iš 2 teoremos išplaukia, kad 1–4 pavyzdžiuose nurodytų įvykių, kai $X_1, X_2, ...$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tikimybės lygios 0 arba 1.

2. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SEKŲ KONVERGAVIMAS

Tikimybių teorijoje ir, apskritai, matematinėje analizėje funkcijų konvergavimo visuose jų apibrėžimo taškuose sąvoka yra per daug siaura. Susipažinsime su kai kuriais bendresniais mačių funkcijų sekų konvergavimo tipais.

Tarkime, kad tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ duota atsitiktinių dydžių $\{X_n(\omega)\}$ seka ir atsitiktinis dydis $X(\omega)$. Sakykime, $X_n(\omega)$ konverguoja į $X(\omega)$ visuose aibės Ω taškuose, išskyrus aibę, kurios tikimybinis matas yra 0. Toks konvergavimas

$$P\big(\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\big) = P(X_n \to X) = 1$$

yra vadinamas *konvergavimu beveik visur mato* P *atžvilgiu*, arba konvergavimu P beveik visur, arba konvergavimu su tikimybe 1. Ribinė funkcija $X(\omega)$ yra vienareikšmiškai nusakyta tik tuose aibės Ω taškuose, kuriuose seka $X_n(\omega)$

konverguoja. Jei tikimybinė erdvė yra pilna, tai ribinę funkciją galima bet kaip keisti kiekviename aibės Ω poaibyje, turinčiame nulinį matą P.

Nurodysime porą konvergavimo su tikimybe 1 kriterijų.

1 teorema. *Atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ konverguoja su tikimybe 1 į atsitiktinį dydį X tada ir tik tada, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$P\{\omega : \sup_{m \geq n} |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Į r o d y m a s. Pažymėkime Ω_0 aibę tų ω, kuriuose $X_n(\omega)$ konverguoja į $X(\omega)$. Priminsime: sekos $X_n(\omega)$ konvergavimas į $X(\omega)$ taške ω reiškia, jog kiekvienam $\varepsilon > 0$ galima rasti tokį $n(\omega, \varepsilon)$, kad būtų $|X_m(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$ visiems $m \geq n(\omega, \varepsilon)$. Vadinasi,

$$\Omega_0 = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}.$$

Aibė tų ω, kuriuose $X_n(\omega)$ nekonverguoja į $X(\omega)$, yra

$$\Omega_0^c = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon);$$

čia

$$A_n(\varepsilon) = \{\omega : \sup_{m \geq n} |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

Nesunku suvokti, kad

$$\Omega_0^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big(\frac{1}{k}\Big)$$

(įrodykite!). Iš čia išplaukia, kad $P(\Omega_0^c) = 0$ tada ir tik tada, kai kiekvienam k

$$P\bigg(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big(\frac{1}{k}\Big)\bigg) = 0.$$

Kadangi aibės $A_n(1/k)$ $(n = 1, 2, ...)$ sudaro monotoniškai mažėjančią seką, tai pastaroji lygybė ekvivalenti lygybei

$$\lim_{n \to \infty} P\bigg(A_n\Big(\frac{1}{k}\Big)\bigg) = 0.$$

Iš čia išplaukia, kad teoremos teiginys teisingas bet kuriam $\varepsilon > 0$. $\square$

Skaičių sekų $\{x_n\}$ konvergavimą galima patikrinti Koši kriterijumi: seka konverguoja tada ir tik tada, kai $x_n - x_m \to 0$, jei m ir $n \to \infty$, t. y.

$\sup\limits_{\nu\geq 1}|x_{n+\nu} - x_n| \to 0$, kai $n \to \infty$. Įrodysime jo analogą konvergavimui beveik visur.

2 teorema. *Atsitiktinių dydžių seka* $\{X_n\}$ *konverguoja su tikimybe* 1 *tada ir tik tada, kai kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega : \sup_{m>n}|X_m(\omega) - X_n(\omega)| \geq \varepsilon\}\Big) = 0.$$

Į r o d y m a s. Pažymėkime Ω_0 aibę tų ω, kuriuose seka $\{X_n(\omega)\}$ konverguoja. Kaip ir 1 teoremos įrodyme, remdamiesi Koši kriterijumi, gauname

$$\Omega_0 = \{\omega : \lim_{n\to\infty}\sup_{m>n}|X_m(\omega) - X_n(\omega)| = 0\} =$$

$$= \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n+1}^{\infty}\{\omega : |X_m(\omega) - X_n(\omega)| < \varepsilon\}.$$

Todėl

$$\Omega_0^c = \bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n+1}^{\infty}\{\omega : |X_m(\omega) - X_n(\omega)| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n(\varepsilon);$$

čia

$$A_n(\varepsilon) = \{\omega : \sup_{m>n}|X_m(\omega) - X_n(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

Teisinga lygybė

$$\Omega_0^c = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\Big(\frac{1}{k}\Big).$$

Atkreipsime dėmesį, kad $P(\Omega_0^c) = 0$ tada ir tik tada, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$P\big(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n(\varepsilon)\big) = 0.$$

Teoremą įrodėme. Nesunku rasti ir atsitiktinį dydį $X(\omega)$, į kurį beveik visur konverguoja seka $X_n(\omega)$. Pakanka paimti

$$X(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega), & \text{kai } \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \text{kai } \omega \in \Omega_0^c. \end{cases} \quad \square$$

Išvada. *Jei* $\{X_n\}$ *yra atsitiktinių dydžių seka ir kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$P\{\omega : \sup_{m>n}|X_m(\omega) - X_n(\omega)| \geq \varepsilon\} \to 0,$$

kai $n \to \infty$, tai seka $\{X_n\}$ konverguoja su tikimybe 1.

Į r o d y m a s. Kiekvienai įvykių sekai $\{A_n\}$ iš $\mathcal{A}$ teisinga nelygybė

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \inf_n P(A_n). \ \square$$

Išnagrinėsime kitą konvergavimo tipą. Sakome, kad atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ *konverguoja pagal tikimybę*, arba *stochastiškai*, į atsitiktinį dydį X, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\} \to 0,$$

kai $n \to \infty$, kitaip tariant, su tikimybe, kiek norima artima 1, X_n nuo X skiriasi dydžiu, mažesniu už ε, kai n yra pakankamai didelis.

Parodysime, kad konvergavimo pagal tikimybę sąvoka yra bendresnė už konvergavimo su tikimybe 1 sąvoką.

3 teorema. *Jei atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ konverguoja į atsitiktinį dydį X su tikimybe* 1, *tai ji konverguoja į tą dydį ir pagal tikimybę.*

Į r o d y m a s. Teisinga priklausomybė

$$\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\} \subset \{\omega : \sup_{m \ge n} |X_m(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\}.$$

Todėl

$$P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\} \le P\{\omega : \sup_{m \ge n} |X_m(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\}.$$

Pakanka remtis 1 teorema. $\square$

Priešingas šiai teoremai teiginys nėra teisingas. Tai matysime iš pavyzdžio.

P a v y z d y s. Tarkime, kad $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ – to intervalo visų Borelio poaibių sistema, P – Lebego matas. Pažymėkime

$$A_{nk} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \ (k = 1, ..., n; \ n = 1, 2, ...),$$
$$X_{nk}(\omega) = \mathbf{1}_{\mathbf{A_{nk}}}(\omega).$$

Tada atsitiktinių dydžių seka

$$X_{11}, X_{21}, X_{22}, X_{31}, X_{32}, X_{33}, ...$$

konverguoja pagal tikimybę į 0, bet nekonverguoja nė viename intervalo $[0, 1]$ taške.

Ir šiam konvergavimo tipui įrodysime Koši kriterijaus analogą. Prieš tai įrodysime šitokį teiginį.

Lema. *Jei atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ turi savybę: kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$P\{\omega : |X_m(\omega) - X_n(\omega)| \geq \varepsilon\} \to 0,$$

kai $m, n \to \infty$, tai galima rasti posekį $\{X_{n_k}\}$, konverguojantį su tikimybe 1.

Į r o d y m a s. Imkime $n_1 = 1$. Pažymėkime n_k $(k > 1)$ mažiausią r, tenkinantį sąlygas

$$P\{\omega : |X_m(\omega) - X_n(\omega)| > 2^{-k}\} < 2^{-k}, \; m \geq r, \; n \geq r, \; r > n_{k-1}.$$

Tada eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\omega : |X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)| > 2^{-k}\}$$

konverguoja. Iš Borelio–Kantelio lemos išplaukia, kad su tikimybe 0 nelygybės $|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)| > 2^{-k}$ yra teisingos be galo dideliam indeksų k skaičiui. Vadinasi, su tikimybe 1 teisingos nelygybės $|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)| \leq 2^{-k}$ visiems pakankamai dideliems k. Todėl su tikimybe 1 konverguoja eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)|.$$

Tos eilutės konvergavimo taškų aibę pažymėkime Ω_0. Tarkime, kad $X(\omega)$ yra lygus eilutės

$$X_{n_1}(\omega) + \sum_{r=1}^{\infty} \big(X_{n_{r+1}}(\omega) - X_{n_r}(\omega)\big) \tag{1}$$

sumai taškuose $\omega \in \Omega_0$ ir lygus 0, kai $\omega \in \Omega_0^c$. Kadangi (1) eilutės k-oji dalinė suma yra $X_{n_{k+1}}$, tai seka $\{X_{n_k}\}$ su tikimybe 1 konverguoja į X. $\square$

4 teorema. *Atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal tikimybę tada ir tik tada, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$P\{\omega : |X_m(\omega) - X_n(\omega)| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0. \tag{2}$$

Į r o d y m a s. 1. Tarkime, kad seka $\{X_{n_k}\}$ konverguoja pagal tikimybę į X. Teisinga priklausomybė

$$\{\omega : |X_m(\omega) - X_n(\omega)| \geq \varepsilon\} \subset \Big\{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \cup$$
$$\cup \Big\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big\}.$$

Todėl

$$P(|X_m - X_n| \geq \varepsilon) \leq P\Big(|X_m - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big) + P\Big(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Iš čia
$$P(|X_m - X_n| \geq \varepsilon) \to 0,$$
kai $m, n \to \infty$.

2. Sakykime, teisingas (2) teiginys. Pagal lemą iš sekos $\{X_n\}$ galima išskirti posekį $\{X_{n_k}\}$, konverguojantį su tikimybe 1 į kurį nors atsitiktinį dydį X. Iš nelygybės
$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq P\Big(|X_n - X_{n_k}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big) + P\Big(|X_{n_k} - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big),$$
3 teoremos ir prielaidos, kad teisingas (2) teiginys, išplaukia, jog seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal tikimybę į X. $\square$

Iš 4 teoremos ir lemos išplaukia, kad iš konverguojančios pagal matą atsitiktinių dydžių sekos galima išskirti posekį, konverguojantį su tikimybe 1.

Konvergavimo pagal tikimybę atveju ribinė funkcija nėra vienareikšmiškai nusakyta, bet yra teisingas šitoks teiginys.

5 teorema. *Jei atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal tikimybę į atsitiktinį dydį X ir į atsitiktinį dydį Y, tai $P(X \neq Y) = 0$.*

Į r o d y m a s. Remsimės priklausomybe
$$\{\omega : |X(\omega) - Y(\omega)| \geq \varepsilon\} \subset \Big\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \cup$$
$$\cup \Big\{\omega : |X_n(\omega) - Y(\omega)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big\}.$$
Dešinės pusės įvykių tikimybės konverguoja į 0, kai $n \to \infty$. Todėl kairės pusės įvykio tikimybė lygi 0. Iš čia išplaukia, kad $P(X \neq Y) = 0$ (įrodykite!). $\square$

3. DIDŽIŲJŲ SKAIČIŲ DĖSNIS

Nagrinėdami atsitiktinį įvykį A su tikimybe $P(A)$, apskritai negalime iš anksto pasakyti, ar įvykis A įvyks, ar neįvyks konkrečiame eksperimente. Bet kai tikimybė $P(A)$ yra artima 1 arba 0, jau daugiau galime pasakyti apie jo įvykimą arba neįvykimą atskirame eksperimente. Jei, sakysime, $P(A) = 0,01$, tai įvykis A įvyks vidutiniškai vieną kartą iš 100 eksperimentų. Jei $P(A) = 0,99$, tai iš 100 eksperimentų įvykis A vidutiniškai neįvyks tik vieną kartą. Vadinasi, pirmuoju atveju įvykį A galime laikyti praktiškai negalimu, o antruoju – praktiškai būtinu.

Suprantama, tik kiekvienu konkrečiu atveju galime nuspręsti, kada įvykis yra praktiškai laikytinas būtinu arba negalimu. Sakykime, turime kokį nors prietaisą, kuris gali sugesti su tikimybe 0,01. Jei jis naudojamas eilinėje laboratorijoje, tai į galimybę sugesti galime nekreipti dėmesio ir laikyti tokį įvykį praktiškai negalimu. Kitaip būtų, jei tas prietaisas būtų naudojamas kosminiame laive. Čia, sugedus aparatui, galimos labai rimtos pasekmės. Tokiomis sąlygomis negalima nesiskaityti su tikimybe 0,01.

Įvykiai, kurių tikimybės artimos 0 arba 1, pasitaiko tiriant daugelį atsitiktinių reiškinių. Imkime, pavyzdžiui, seką nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $\{X_n\}$, turinčių vidurkius a ir dispersijas σ^2. Pirmųjų n tų dydžių aritmetinio vidurkio

$$(X_1 + ... + X_n)/n \tag{1}$$

vidurkis yra a, o dispersija σ^2/n. Kai n didelis, ta dispersija yra maža, vadinasi, (1) atsitiktinis dydis yra beveik pastovus, beveik lygus a. Vėliau parodysime, kad jis su tikimybe, kiek norima artima 1, kiek norima mažai skiriasi nuo a, kai n yra pakankamai didelis.

Apskritai, kai tiriame daug atsitiktinių reiškinių, konkretūs atskirų atsitiktinių reiškinių ypatumai dažnai beveik neturi įtakos tokių reiškinių vidutiniam rezultatui: atsitiktiniai nukrypimai, pasitaikantys atskirais atvejais, vieni kitus išlygina. Vidurkių stabilumas ir sudaro vadinamojo didžiųjų skaičių dėsnio turinį plačiąja prasme.

Didžiųjų skaičių dėsnis yra gana svarbus praktiškai taikant tikimybių teoriją. Kai jis tinka, su atsitiktiniais dydžiais, kurie yra didelio skaičiaus atsitiktinių reiškinių vidutiniai rezultatai, praktiškai galima operuoti kaip su pastoviais.

Nagrinėjant matematiškai, didžiųjų skaičių dėsnis yra susijęs su atsitiktinių dydžių konvergavimo sąvokomis. Pats didžiųjų skaičių dėsnio terminas yra tradicinis. Jis ne visai atitinka esmę, tačiau ir šiandien plačiai vartojamas tikimybių teorijoje.

Apibrėšime tiksliau šią sąvoką. Tarkime, kad $\{X_n\}$ yra bet kokių atsitiktinių dydžių seka. Pažymėkime jos dalines sumas

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Jei egzistuoja tokia realiųjų skaičių seka $\{a_n\}$ ir tokia teigiamų skaičių seka $\{b_n\}$, kad

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \tag{2}$$

konverguoja pagal tikimybę į 0, tai sakome, kad seka $\{X_n\}$ tenkina *silpnąjį didžiųjų skaičių dėsnį* su normuojančiomis konstantomis a_n ir b_n; jei (2) konverguoja į 0 su tikimybe 1, tai sakome, kad $\{X_n\}$ tenkina *stiprųjį didžiųjų skaičių dėsnį* su konstantomis a_n, b_n. Dažniausiai nagrinėjamas atvejis, kai

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} MX_k$$

(jei vidurkiai MX_k egzistuoja) ir $b_n = n$.

Pirmiausia nagrinėsime paprasčiausius atvejus, kai teisingas silpnasis didžiųjų skaičių dėsnis. Mums pravers V.9.8 teoremos atskiras atvejis.

(Bjenemė[1]–Čebyšovo lema. *Jei atsitiktinis dydis Z turi dispersiją, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$P(|Z - MZ| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} DZ.$$

Į r o d y m a s. Atsitiktinis dydis $(Z - MZ)^2$ tenkina V.9.8 teoremos sąlygas. Todėl

$$P(|Z - MZ| \geq \varepsilon) = P\big((Z - MZ)^2 \geq \varepsilon^2)\big) \leq$$
$$\leq \varepsilon^{-2} M(Z - MZ)^2 = \varepsilon^{-2} DZ. \ \square$$

1 (Markovo) teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_n yra kas du nekoreliuoti, turi dispersijas ir*

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{n} DX_k \to 0, \tag{3}$$

kai $n \to \infty$, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$P\Big(\frac{1}{n}|S_n - MS_n| \geq \varepsilon\Big) \to 0,$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s. Atsitiktiniam dydžiui $Z = S_n/n$ taikome lemą ir gauname

$$P\Big(\frac{1}{n}|S_n - MS_n| \geq \varepsilon\Big) \leq \varepsilon^{-2} D(S_n/n) = \frac{DS_n}{\varepsilon^2 n^2}.$$

Iš II.9.8 teoremos išvados ir (3) sąlygos išplaukia teoremos teiginys. $\square$

2 (Čebyšovo) teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_n yra nepriklausomi ir turi tolygiai aprėžtas dispersijas, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$P\Big(\frac{1}{n}|S_n - MS_n| \geq \varepsilon\Big) \to 0,$$

kai $n \to \infty$.

[1] Jules Bienaymé (1796–1878) – prancūzų matematikas.

Į r o d y m a s. Pakanka įrodyti, kad šiuo atveju yra tenkinamos 1 teoremos sąlygos. Tarkime, kad $DX_k \le C$ $(k = 1, 2, ...)$. Turime

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{n} DX_k \le n^{-1} C \to 0,$$

kai $n \to \infty$. □

1 išvada. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_n yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, turi vidurkius $MX_n = a$ ir dispersijas, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - a\Big| \ge \varepsilon\Big) \to 0,$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s. Šiuo atveju atsitiktiniai dydžiai tenkina 2 teoremos sąlygas, be to, $MS_n = na$.

2 išvada (Bernulio teorema). *Sakykime, turime Bernulio eksperimentų schemą. Atlikus bet kurį eksperimentą, gali įvykti įvykis A su tikimybe p. Pažymėkime κ_n įvykių A skaičių, atlikus n eksperimentų. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$P\Big(\Big|\frac{\kappa_n}{n} - p\Big| \ge \varepsilon\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Į r o d y m a s. Šią teoremą jau įrodėme I.15 skyrelyje. Dabar ją įrodysime paprastesniu būdu. Pažymėkime X_k įvykių A skaičių, atlikus k-ąjį eksperimentą. Aišku, X_k yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai,

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{su tikimybe } p, \\ 0 & \text{su tikimybe } 1-p \end{cases}$$

ir $\kappa_n = S_n$. Dydžio X_k vidurkis

$$MX_k = p,$$

o dispersija

$$DX_k = MX_k^2 - M^2X_k = p - p^2.$$

1 išvados sąlygos yra tenkinamos. Iš jos išplaukia reikiamas teiginys. □

Bernulio teorema parodo, kad mūsų įvesta tikimybės sąvoka atitinka intuityvų tikimybės, kaip įvykio įvykimų dažnio ribos, supratimą.

1 išvadoje buvo reikalaujama, kad vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai turėtų dispersijas. Pasirodo, to reikalavimo galima atsisakyti.

3 (Chinčino[1]) teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_n yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę ir turi vidurkius $MX_n = a$, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$*

[1] Aleksandr Chinčin (1894–1959) – rusų matematikas.

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}-a\Big|\geq\varepsilon\Big)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Į r o d y m a s. Paėmę bet kurį $\delta>0$, apibrėžkime atsitiktinius dydžius

$$Y_{nk}=\begin{cases}X_k, & \text{kai } |X_k|<\delta n,\\ 0, & \text{kai } |X_k|\geq\delta n,\end{cases}$$
$$Z_{nk}=X_k-Y_{nk}.$$

Dydžiai Y_{nk} $(k=1,2,...)$ yra nepriklausomi; tokie pat yra ir dydžiai Z_{nk}. Pažymėkime

$$U_n=n^{-1}\sum_{k=1}^{n}Y_{nk},\ V_n=\sum_{k=1}^{n}Z_{nk}.$$

Kadangi

$$\{|n^{-1}S_n-a|\geq\varepsilon\}=\{|n^{-1}S_n-a|\geq\varepsilon,\ V_n=0\}\cup$$
$$\cup\,\{|n^{-1}S_n-a|\geq\varepsilon,\ V_n\neq0\}\subset\{|U_n-a|\geq\varepsilon\}\cup\{V_n\neq0\},$$

tai

$$P\{|n^{-1}S_n-a|\geq\varepsilon\}\leq P\{|U_n-a|\geq\varepsilon\}+P\{V_n\neq0\}. \tag{4}$$

Įvertinsime šios nelygybės dešinės pusės tikimybes.

Pažymėję $F(x)$ dydžio X_n pasiskirstymo funkciją ir

$$b=\int_{-\infty}^{\infty}|x|dF(x),$$

turime

$$\begin{aligned}a_n=MY_{nk}&=\int_{|x|<\delta n}xdF(x),\\ DY_{nk}&=\int_{|x|<\delta n}x^2dF(x)-a_n^2\leq\\ &\leq\delta n\int_{|x|<\delta n}|x|dF(x)\leq\delta bn.\end{aligned}\tag{5}$$

Iš Bjenemė–Čebyšovo ir (5) nelygybių gauname

$$P(|U_n-a_n|\geq\varepsilon/2)=P\Big(\Big|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(y_{nk}-a_n)\Big|\geq\varepsilon/2\Big)\leq$$
$$\leq n^{-2}\cdot n\delta bn(\varepsilon/2)^{-2}=4b\delta\varepsilon^{-2}.$$

Kai $n \to \infty$, $a_n \to a$. Todėl kiekvienam $\varepsilon > 0$ ir pakankamai dideliems n

$$|a_n - a| < \varepsilon/2.$$

Vadinasi,

$$P(|U_n - a| \geq \varepsilon) \leq 4b\delta\varepsilon^{-2}. \tag{6}$$

Toliau

$$P(Z_{nk} \neq 0) = \int_{|x|\geq \delta n} dF(x) \leq \frac{1}{\delta n} \int_{|x|\geq \delta n} |x| dF(x) \leq \delta/n,$$

kai n yra pakankamai didelis. Kadangi

$$\{V_n \neq 0\} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{Z_{nk} \neq 0\},$$

tai

$$P(V_n \neq 0) \leq \sum_{k=1}^{n} P(Z_{nk} \neq 0) \leq \delta. \tag{7}$$

Įrašę (6) ir (7) įvertinimus į (4), gauname

$$P(|n^{-1}S_n - a| \geq \varepsilon) \leq 4b\delta\varepsilon^{-2} + \delta.$$

Kadangi δ buvo bet koks, tai iš čia gauname teoremos teiginį. □

Tačiau ir vidurkiai ne visada egzistuoja. Vis dėlto ir tada galima kalbėti apie didžiųjų skaičių dėsnius. Paminėsime be įrodymo keletą bendrų rezultatų.

4 teorema. *Tarkime, kad X_n yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $\{b_n\}$ – teigiamų skaičių seka, $b_n \nearrow \infty$. Egzistuoja konstantų $\{a_n\}$ seka su sąlyga, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$P(|b_n^{-1}(S_n - a_n)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

tada ir tik tada, kai

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{b_k^2 + x^2} dF_{X_k}(x + m_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

čia m_k yra atsitiktinio dydžio X_k mediana. Jei ši sąlyga tenkinama, tai

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \Big(m_k + \int_{|x|<\tau b} x dF_{X_k}(x + m_k) \Big) + o(1);$$

čia τ yra bet koks teigiamas skaičius.

5 teorema. *Jei X_n yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $\{b_n\}$ – teigiamų skaičių seka, tai sąryšis*

$$P(|b_n^{-1}S_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

yra teisingas tada ir tik tada, kai

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\geq b_n} dF_{X_k}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$b_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \int_{|x|<b_n} x^2 dF_{X_k}(x) - \Big(\int_{|x|<b_n} x dF_{X_k}(x) \Big)^2 \Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$b_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<b_n} x dF_{X_k}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Kai atsitiktiniai dydžiai yra vienodai pasiskirstę, teisinga paprastesnė teorema.

6 teorema. *Tarkime, kad X_n yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, kurių pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$. Kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$P(|n^{-1}S_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

tada ir tik tada, kai

$$n \int_{|x|\geq n} dF(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\int_{|x|<n} x dF(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

4, 5, ir 6 teoremų įrodymus galima rasti, pvz., [28] knygoje.

4. TRIJŲ EILUČIŲ TEOREMA

Įvykis, kai nepriklausomų atsitiktinių dydžių eilutė

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$$

konverguoja arba diverguoja, yra asimptotinis ir todėl pagal 1 skyrelio rezultatus jo tikimybė lygi 0 arba 1. Išsiaiškinsime, kada (1) eilutė konverguoja su tikimybe 1. Iš pradžių įrodysime reikalingus pagalbinius teiginius.

1 lema. *Jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai $X_1, ..., X_n$ turi vidurkius, lygius 0, ir dispersijas,*

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} DX_k,$$

tai kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$P(\max_{k \le n} |X_1 + ... + X_k| \ge \varepsilon) \le \varepsilon^{-2} B_n^2.$$

Jei, be to, $|X_k| \le C$ $(k = 1, ..., n)$, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$P(\max_{k \le n} |X_1 + ... + X_k| \ge \varepsilon) \ge 1 - \frac{(C+\varepsilon)^2}{B_n^2}.$$

Pirmoji iš šių nelygybių paprastai vadinama Kolmogorovo nelygybe.

Į r o d y m a s. Pažymėkime

$$S_k = X_1 + ... + X_k \quad (k = 1, ..., n).$$

Imkime įvykius

$$\begin{aligned} A &= \{\max_{k \le n} |S_k| \ge \varepsilon\}, \\ A_k &= \{|S_r| < \varepsilon \ (r = 1, ..., k-1), |S_k| \ge \varepsilon\} \ (k = 2, ..., n), \\ A_1 &= \{|S_1| \ge \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Įvykiai A_k $(k = 1, ..., n)$ yra kas du nesutaikomi ir

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Teisinga lygybė

$$M(S_n^2 \mathbf{1}_A) = \sum_{k=1}^{n} M(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}) \tag{2}$$

ir lygybė

$$\begin{aligned} M(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}) &= M\{[S_k + (S_n - S_k)]^2 \mathbf{1}_{A_k}\} = \\ &= M(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) + 2M[(S_n - S_k)\mathbf{1}_{A_k}] + M[(S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k}]. \end{aligned}$$

Kadangi $S_n - S_k$ ir $S_k \mathbf{1}_{A_k}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ir $M(S_n - -S_k) = 0$, tai pagal II.8 teoremą ką tik parašytosios lygybės antrasis narys lygus 0:

$$M(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}) = M(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) + M[(S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k}]. \tag{3}$$

Įrodysime pirmąją nelygybę. Kadangi atsitiktinių dydžių X_k vidurkiai yra lygūs 0, o (3) formulės dešinės pusės antrasis narys neneigiamas, tai

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} DX_k = MS_n^2 \geq M(S_n^2 \mathbf{1}_A).$$

Be to,

$$M(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) \geq \varepsilon^2 P(A_k).$$

Todėl, pasinaudoję (2) lygybe, gauname

$$B_n^2 \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \varepsilon^2 P(A).$$

Iš čia išplaukia pirmoji nelygybė.

Įrodysime antrąją. Jei $\omega \in A_k$, tai $|S_{k-1}(\omega)| < \varepsilon$ ir $|S_k(\omega)| < C + \varepsilon$. Todėl iš (2)

$$\begin{aligned} M(S_n^2 \mathbf{1}_A) &\leq (C+\varepsilon)^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \sum_{j=k+1}^{n} MX_j^2 \leq \\ &\leq \big((C+\varepsilon)^2 + B_n^2\big) P(A). \end{aligned} \tag{4}$$

Antra vertus, kadangi $\mathbf{1}_A(\omega) = 1 - \mathbf{1}_{A^c}(\omega)$, tai

$$\begin{aligned} M(S_n^2 \mathbf{1}_A) &= MS_n^2 - M(S_n^2 \mathbf{1}_{A^c}) \geq \\ &\geq B_n^2 - \varepsilon^2 P(A^c) = B_n^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 P(A). \end{aligned}$$

Iš (4) gauname

$$P(A) \geq \frac{B_n^2 - \varepsilon^2}{(C+\varepsilon)^2 B_n^2 - \varepsilon^2} \geq 1 - \frac{(C+\varepsilon)^2}{B_n^2}. \ \square$$

Bjenemė–Čebyšovo nelygybę pritaikę sumai S_n, gauname įvertį $P(|S_n| \geq \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} DS_n$. Todėl Kolmogorovo nelygybė sustiprina Bjenemė–Čebyšovo nelygybę.

2 lema. *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai* $\{X_n\}$ *yra nepriklausomi,* $|X_n| \le C$, $MX_n = 0$ $(n = 1, 2, ...)$. *Jei* (1) *eilutė konverguoja su tikimybe* 1, *tai eilutė*

$$\sum_{n=1}^{\infty} DX_n \tag{5}$$

konverguoja.

Į r o d y m a s. Pagal 1 lemą bet kuriems N, n

$$P\big(\max_{k\le n}\Big|\sum_{r=N+1}^{N+k} X_r\Big| \ge \varepsilon\big) \ge 1 - (C+\varepsilon)^2\big(\sum_{r=N+1}^{N+n} DX_r\big)^{-1}.$$

Tarkime, kad (5) eilutė diverguoja. Tada pastarosios nelygybės dešinė pusė konverguoja į (1), kai $n \to \infty$. Antra vertus, iš (1) eilutės konvergavimo su tikimybe 1 išplaukia, kad

$$\sup_{k\ge 1}\Big|\sum_{r=N+1}^{N+k} X_r\Big| \to 0$$

su tikimybe 1, kai $N \to \infty$. Vadinasi,

$$P\big(\sup_{k\ge 1}\Big|\sum_{r=N+1}^{N+k} X_r\Big| \ge \varepsilon\big) < \frac{1}{2}$$

kiekvienam $\varepsilon > 0$ ir pakankamai dideliems N. Iš gauto prieštaravimo išplaukia lema. □

3 lema. *Jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai* $\{X_n\}$ *turi vidurkius, lygius* 0, *ir dispersijas, be to, eilutė*

$$\sum_{n=1}^{\infty} DX_n \tag{6}$$

konverguoja, tai (1) *eilutė konverguoja su tikimybe* 1.

Į r o d y m a s. Iš Kolmogorovo nelygybės

$$P\Big(\max_{k\le n}\Big|\sum_{r=N+1}^{N+k} X_r\Big| \ge \varepsilon\Big) \le \varepsilon^{-2}\sum_{r=N+1}^{N+n} DX_r.$$

Kadangi įvykiai po tikimybės ženklu, kai $n = 1, 2, ...$, sudaro monotoniškai didėjančią seką, kurios riba yra

$$\Big\{\sup_k \Big|\sum_{r=N+1}^{N+k} X_r\Big| \geq \varepsilon\Big\},$$

tai pagal I.10.7 teoremą

$$P\Big(\sup_k \Big|\sum_{r=N+1}^{N+k} X_r\Big| \geq \varepsilon\Big) \leq \varepsilon^{-2} \sum_{r=N+1}^{\infty} DX_r.$$

Iš (6) eilutės konvergavimo išplaukia

$$P\Big(\sup_k \Big|\sum_{r=N+1}^{N+k} X_r\Big| \geq \varepsilon\Big) \to 0,$$

kai $N \to \infty$. Lieka pritaikyti 2.2 teoremos išvadą. $\square$

Jei X yra atsitiktinis dydis su pasiskirstymo funkcija F, o $\phi(x)$ – Borelio funkcija, tai atsitiktinio dydžio $\phi(X)$ vidurkis

$$M\phi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dF(x),$$

jei tik jis egzistuoja. Kiekvienam atsitiktiniam dydžiui X ir konstantai c pažymėkime

$$X^c = \begin{cases} X, & \text{kai } |X| \leq c, \\ 0, & \text{kai } |X| > c. \end{cases}$$

Šio dydžio vidurkis

$$MX^c = \int_{|x| \leq c} x dF(x),$$

o dispersija

$$DX^c = \int_{|x| \leq c} x^2 dF(x) - \Big(\int_{|x| \leq c} x dF(x)\Big)^2.$$

1 (trijų eilučių) teorema. *Tarkime, kad $\{X_n\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka. Jei kuriam nors $c > 0$ eilutės*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\big(|X_n| > c\big), \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} MX_n^c, \tag{8}$$

(9) $$\sum_{n=1}^{\infty} DX_n^c$$

konverguoja, tai su tikimybe 1 *konverguoja* (1) *eilutė. Atvirkščiai, jei su tikimybe* 1 *konverguoja* (1) *eilutė, tai kiekvienam* $c > 0$ *konverguoja* (7), (8), (9) *eilutės.*

Į r o d y m a s. 1. Tarkime, kad (1) eilutė konverguoja su tikimybe 1. Iš čia išplaukia, kad $P(X_n \to 0) = 1$. Todėl su tikimybe 1 kiekvienam $c > 0$ nelygybė $|X_n| > c$ gali būti teisinga tik baigtiniam indeksų n skaičiui. Vadinasi, su tikimybe 0 kiekvienam $c > 0$ nelygybė $|X_n| > c$ yra teisinga be galo dideliam indeksų n skaičiui. Iš Borelio–Kantelio lemos antrosios dalies išplaukia, kad (7) eilutė turi konverguoti.

Imkime kitą seką atsitiktinių dydžių $\{Y_n\}$, kurie nepriklausomi tarp savęs ir nuo visų atsitiktinių dydžių $\{X_n\}$, be to, kiekvienas atsitiktinis dydis Y_n yra taip pat pasiskirstęs, kaip ir atsitiktinis dydis X_n. Pažymėję $\bar{X}_n^c = X_n^c - Y_n^c$, turime

$$|\tilde{X}_n^c| \leq 2c,\ M\tilde{X}_n^c = 0,\ D\bar{X}_n^c = 2D\tilde{X}_n^c.$$

Kadangi eilutė

(10) $$\sum_{n=1}^{\infty} X_n^c,$$

taigi ir eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n^c,$$

su tikimybe 1 konverguoja, tai iš 2 lemos išplaukia, kad ir eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} DX_n^c$$

konverguoja.

Pagal 3 lemą su tikimybe 1 konverguoja eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n^c - MX_n^c).$$

Vadinasi, eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} MX_n^c$$

konverguoja.

2. Tarkime, kad kuriam nors $c > 0$ konverguoja (7), (8), (9) eilutės. Iš (7) eilutės konvergavimo, remiantis Borelio–Kantelio lema, išplaukia, kad nelygybės $|X_n| \geq c$ yra teisingos su tikimybe 0 be galo dideliam indeksų n skaičiui.

Vadinasi, kai n pakankamai dideli, teisingos lygybės $X_n = X_n^c$. Todėl pakanka įrodyti, kad su tikimybe 1 konverguoja (10) eilutė. Tačiau iš (9) eilutės konvergavimo ir 3 lemos išplaukia, kad su tikimybe 1 konverguoja eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty}(X_n^c - MX_n^c).$$

Iš (8) eilutės konvergavimo išplaukia (10) eilutės konvergavimas su tikimybe 1. □

5. STIPRUSIS DIDŽIŲJŲ SKAIČIŲ DĖSNIS

Iš Bernulio teoremos dar negalime daryti išvados, kad stebimojo įvykio statistinis dažnis κ_n/n Bernulio schemoje konverguoja į tikimybę p, kai eksperimentų skaičius n neaprėžtai didėja. Iš konvergavimo pagal tikimybę, kaip žinome, neišplaukia konvergavimas su tikimybe 1. Kai kuri nors seka $\{X_n(\omega)\}$ konverguoja į dydį $X(\omega)$ pagal tikimybę, gali pasitaikyti, kad sekos $X_n(\omega)$ riba neegzistuoja nė viename taške ω.

1909 m. E. Borelis įrodė, kad

$$P\Big(\frac{\kappa_n}{n} \to p\Big) = 1,$$

kitaip tariant (žr. 2.1 teoremą),

$$P\Big(\sup_{k \geq n}\Big|\frac{\kappa_k}{k} - p\Big| \geq \varepsilon\Big) \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Tame Borelio darbe pirmą kartą tikimybių teorijoje buvo remtasi Lebego integralo idėja.

Pirmiausia įrodysime gana paprastą teoremą, kurios atskiras atvejis yra Borelio teiginys. Vėliau panagrinėsime keletą bendresnių teiginių. Visur $S_n = X_1 + ... + X_n$.

1 lema. *Jei $\{X_n\}$ yra atsitiktinių dydžių seka ir kiekvienam natūraliajam r eilutė*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(|X_n| \geq \frac{1}{r}\Big)$$

konverguoja, tai X_n konverguoja į 0 su tikimybe 1.

Į r o d y m a s. Pažymėkime

$$E=\bigcup_{r=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\Big\{|X_n|\geq\frac{1}{r}\Big\}=\bigcup_{r=1}^{\infty}\limsup_n\Big\{|X_n|\geq\frac{1}{r}\Big\}.$$

Tai aibė tų ω, kuriems egzistuoja toks r, kad $|X_n|\geq 1/r$ be galo dideliam indeksų n skaičiui. Vadinasi, E yra aibė tų ω, kuriuose $X_n(\omega)$ nekonverguoja į 0. Pagal Borelio-Kantelio lemą

$$P(E)\leq\sum_{r=1}^{\infty}P\Big(\limsup_n\Big\{|X_n|\geq\frac{1}{r}\Big\}\Big)=0.\ \square$$

1 teorema. *Jei $\{X_n\}$ yra vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkį a ir ketvirtąjį momentą, tai*

$$P\Big(\frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}a\Big)=1.$$

Į r o d y m a s. Apskaičiuosime

$$M\Big(\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)\Big)^4=$$
$$=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_3=1}^{n}\sum_{k_4=1}^{n}M(X_{k_1}-a)(X_{k_2}-a)(X_{k_3}-a)(X_{k_4}-a).$$

Kadangi $M(X_k-a)=0$ ir dydžiai X_k yra nepriklausomi, tai pastarojoje sumoje lygūs nuliui visi dėmenys, turintys dauginamąjį X_k-a pirmuoju laipsniu. Taigi lieka tik dėmenys pavidalo $M(X_k-a)^4$ ir $M(X_k-a)^2\ (X_l-$ $-a)^2$ $(k\neq l)$. Pirmojo pavidalo dėmenų yra n, o antrojo $3n(n-1)$. Turime

$$M\Big(\sum_{k=1}^{n}(X_k=a)\Big)^4=nM(X_1-a)^4+3n(n-1)D^2X_1.$$

Iš Bjenemė–Čebyšovo nelygybės išplaukia

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}-a\Big|\geq\varepsilon\Big)\leq\frac{M(X_1-a)^4}{n^3\varepsilon^4}+\frac{3(n-1)D^2X_1}{n^3\varepsilon^4}.$$

Lieka pritaikyti 1 lemą. $\square$

Išvada (Borelio teorema.) *Sakykime, turime Bernulio eksperimentų schemą. Atlikus bet kurį eksperimentą, įvykis A gali įvykti su tikimybe p. Pažymėkime κ_n įvykių A skaičių, atlikus n eksperimentų. Tada*

$$P\Big(\frac{\kappa_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p\Big) = 1.$$

Į r o d y m a s. Tarkime, kad X_k yra atsitiktiniai dydžiai, nusakyti 3.2 teoremos 2 išvados įrodyme. Tie dydžiai turi vidurkius p ir visų eilių momentus. Todėl galime taikyti 1 teoremą. □

Apibendrinsime 1 teoremą. Joje buvo reikalaujama, kad atsitiktiniai dydžiai būtų vienodai pasiskirstę ir turėtų ketvirtuosius momentus. Dabar reikalausime, kad dydžiai turėtų tik antruosius momentus, be to, jie gali būti ir nevienodai pasiskirstę.

2 (Kronekerio[1]) lema. *Jei realiųjų skaičių eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

konverguoja, o $\{b_n\}$ *– neaprėžtai didėjanti teigiamų skaičių seka, tai*

$$b_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Į r o d y m a s. Imkime

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k$$

ir parinkime tokį $n_0 = n_0(\varepsilon)$, kad būtų $|r_n| < \varepsilon/3$, kai $n \ge n_0$. Pažymėję $b_0 = 0$, turime

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k(r_k - r_{k+1}) = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} r_k(b_k - b_{k-1}) - r_{n+1}.$$

Jei

$$\max_{k\ge 1}|r_k| = A,$$

tai

$$\frac{1}{b_n}\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k x_k\Big| \le \frac{Ab_{n_0}}{b_n} + \frac{2\varepsilon}{3},$$

kai $n > n_0$. Dabar parinkime tokį $n_1 > n_0$, kad būtų $Ab_{n_0}/b_n \le \varepsilon/3$. Tada

[1] Leopold Kronecker (1823–1891) – vokiečių matematikas.

$$\frac{1}{b_n}\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k x_k\Big| < \varepsilon,$$

kai $n > n_1$. □

2 teorema. *Jei $\{X_n\}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, $\{b_n\}$ – neaprėžtai didėjanti teigiamų skaičių seka ir eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{DX_k}{b_k^2}$$

konverguoja, tai

$$P\Big(b_n^{-1}(S_n - MS_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big) = 1.$$

Į r o d y m a s. Atsitiktiniai dydžiai $(X_k - MX_k)/b_k$ turi vidurkius 0 ir dispersijas DX_k/b_k^2. Todėl jiems pritaikoma 4.1 lema, iš kurios išplaukia, kad eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k - MX_k}{b_k}$$

konverguoja su tikimybe 1. Teoremos teiginys išplaukia iš 2 lemos. □

Paminėsime du atskirus atvejus.

1 išvada. *Jei $\{X_n\}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas, ir eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{DX_k}{k^2}$$

konverguoja, tai

$$P\Big(n^{-1}(S_n - MS_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big) = 1.$$

2 išvada. *Jei $\{X_n\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkius a ir dispersijas, tai*

$$P(n^{-1}S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a) = 1.$$

Pasirodo, kad 2 išvados teiginys, kaip ir silpnasis didžiųjų skaičių dėsnis, yra teisingas ir tuo atveju, kai reikalaujama tik vidurkio egzistavimo.

Įrodysime pagalbinį teiginį.

3 lema. *Jei $\{X_n\}$ yra vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai nelygybės $|X_n| > n$ yra teisingos be galo dideliam indeksų n skaičiui su tikimybe 0, kai MX_1 egzistuoja, ir su tikimybe 1, kai $M|X_1| = \infty$.*

Į r o d y m a s. Pažymėkime $F(x)$ dydžio X_n pasiskirstymo funkciją,

$$c_n = \int_{n<|x|\leq n+1} dF(x) \ (n=1,2,...),$$
$$A_n = \{|X_n| > n\} \ (n=1,2,...).$$

Įvykio A_n tikimybė yra

$$P(A_n) = P(|X_n| > n) = \int_{|x|>n} dF(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k.$$

Šią lygybę sumuojame pagal visus natūraliuosius n ir keičiame sumavimo tvarką

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k. \tag{1}$$

Įvertinsime šį reiškinį iš viršaus ir iš apačios. Susumavę nelygybes

$$kc_k \leq \int_{k<|x|\leq k+1} |x| dF(x) \leq (k+1)c_k$$

pagal visus k, gauname

$$\sum_{k=1}^{\infty} kc_k \leq \int_{|x|>1} |x| dF(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)c_k,$$

t. y.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq \int_{|x|>1} |x| dF(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) + \int_{|x|>1} dF(x).$$

Iš čia išplaukia, kad (1) eilutė konverguoja tada ir tik tada, kai MX_1 egzistuoja. Lieka pritakyti Borelio–Kantelio lemą. □

4 lema. *Jei seka x_n konverguoja į x, kai $n \to \infty$, tai ir*

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n} x_k \to x,$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s. Pažymėkime $y_n = x_n - x$. Tada $y_n \to 0$, kai $n \to \infty$. Kiekvienam $\varepsilon > 0$ galima rasti tokį $n_0 = n_0(\varepsilon)$, kad būtų $|y_n| < \varepsilon$, kai $n > n_0$. Turime

$$\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n} y_k\right| = \left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n_0} y_k + n^{-1}\sum_{k=n_0+1}^{n} y_k\right| \le$$

$$\le n^{-1}\sum_{k=1}^{n_0} |y_k| + \varepsilon(n-n_0)/n.$$

Vadinasi,

$$\limsup_{n\to\infty}\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n} y_k\right| \le \varepsilon.$$

Iš čia

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n} y_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \ \square$$

3 (Kolmogorovo) teorema. *Tarkime, kad $\{X_n\}$ yra vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Jei dydžiai X_n turi vidurkius a, tai*

$$P(n^{-1}S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a) = 1. \tag{2}$$

Jei $M|X_n| = \infty$, tai su tikimybe 1 seka S_n/n nėra konverguojanti.

Į r o d y m a s. 1. Nagrinėsime atvejį, kai dydžiai X_n turi vidurkį. Pažymėkime

$$Y_n = \begin{cases} X_n, & \text{kai } |X_n| \le n, \\ 0, & \text{kai } |X_n| > n, \end{cases}$$

$$Z_n = X_n - Y_n.$$

Tirsime dydžius Y_n. Pažymėkime $F(x)$ dydžio X_n pasiskirstymo funkciją. Tada

$$DY_n = MY_n^2 - M^2Y_n \le MY_n^2 = \int_{|x|\le n} x^2 dF(x).$$

Iš čia

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} DY_n \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\int_{|x|\le n} x^2 dF(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1<|x|\le k} x^2 dF(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1<|x|\le k} x^2 dF(x)\sum_{n=k}^{\infty} n^{-2}.$$

Tačiau

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^{-2} < k^{-2} + \int_k^{\infty} y^{-2} dy = k^{-2} + k^{-1} \le 2k^{-1}.$$

Todėl

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} DY_n \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1<|x|\leq k} |x| dF(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x).$$

Pagal 2 teoremos 1 išvadą

$$P\Big(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - MY_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big) = 1.$$

Kadangi $MY_n \to a$, kai $n \to \infty$, tai pagal 4 lemą

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n} MY_k \to a,$$

kai $n \to \infty$. Vadinasi,

$$P\Big(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} Y_k \xrightarrow[n\to\infty]{} a\Big) = 1. \tag{3}$$

Tikimybė, kad $Z_n \neq 0$ be galo dideliam indeksų n skaičiui, lygi tikimybei, kad $|X_n| > n$ be galo dideliam indeksų skaičiui. Pagal 3 lemą ta tikimybė lygi 0. Todėl

$$P\Big(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} Z_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big) = 1.$$

Iš (3) išplaukia (2).

2. Nagrinėsime atvejį, kai $M|X_n| = \infty$. Tarkime, kad seka $n^{-1}S_n$ konverguoja teigiamo tikimybinio mato aibėje. Pagal nulio ir vieneto dėsnį ji turi konverguoti su tikimybe 1. Kadangi

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1},$$

tai $X_n/n \to 0$ su tikimybe 1. Tačiau pastarasis teiginys pagal 3 lemą prieštarauja prielaidai $M|X_n| = \infty$. □

6. KARTOTINIO LOGARITMO DĖSNIS

Grįšime prie 5.2 teoremos. Jei X_n yra vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkius (kad būtų paprasčiau, laikysime juos lygiais 0) ir dispersijas, tai paėmę $b_n = n^{1/2} \ln n$, gauname

$$P\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}\ln n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Big)=1.$$

Vadinasi, beveik visiems ω ir kiekvienam $\varepsilon > 0$ galima rasti tokį $n_0 = n_0(\varepsilon, \omega)$, kad būtų

$$-\varepsilon\sqrt{n}\ln n < S_n < \varepsilon\sqrt{n}\ln n,$$

kai $n \geq n_0$.

Šį teiginį galima sustiprinti. Tuo reikalu įrodysime vadinamąjį kartotinio logaritmo dėsnį.

1 lema. *Visiems neneigiamiems* x

$$1 + x \geq e^{x(1-x)}.$$

Į r o d y m a s. Pažymėkime

$$f(x) = e^{x(1-x)} - 1 - x.$$

Apskaičiavę pirmąsias dvi išvestines

$$f'(x) = e^{x-x^2}(1-2x) - 1,$$
$$f''(x) = e^{x-x^2}\{(1-2x)^2 - 2\},$$

matome, kad $f'(0) = 0,\ f'(x) < 0$, kai $x \geq 1$, ir $f''(x) < 0$, kai $0 \leq x \leq 1$. Vadinasi, $f'(x) \leq 0$ visiems $x \geq 0$. Todėl

$$f(x) \leq f(0),$$

kai $x \geq 0$. Tai ir yra reikiama nelygybė. □

Toliau 2–6 lemose $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, tenkinantys sąlygą $P(|X_k| \leq K) = 1$ su kuria nors konstanta K, turintys vidurkius $MX_k = 0$ ir dispersijas $DX_k = \sigma^2$.

2 lema.

$$P(S_n \geq y) \leq \exp\Big\{-\frac{y^2}{2n\sigma^2}\Big(1 - \frac{Ky}{n\sigma^2}\Big)\Big\},$$

kai $0 \leq y \leq 2n\sigma^2K^{-1}$, *ir*

$$P(S_n \geq y) \leq \exp(-yK^{-1}/8),$$

kai $y \geq n\sigma^2K^{-1}/2$.

Į r o d y m a s. Paėmę bet kurį neneigiamą x, iš Bjenemė–Čebyšovo nelygybės gauname

$$P(S_n \geq y) = P(e^{xS_n} \geq e^{xy}) \leq e^{-xy} M e^{xS_n}. \tag{1}$$

Įvertinsime vidurkį Me^{xS_n}. Iš V.9.16 teoremos išplaukia lygybė

$$Me^{xX_1} = M \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r X_1^r}{r!} = 1 + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{x^r M X_1^r}{r!}.$$

Pasinaudoję nelygybe

$$|MX_1^r| \leq K^{r-2} M X_1^2 = K^{r-2}\sigma^2 \quad (r \geq 3),$$

kai $x \leq 2K^{-1}$, gauname

$$\begin{aligned} Me^{xX_1} &\leq 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{K^{r-2} x^r \sigma^2}{r!} \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + \frac{\sigma^2}{3!} \frac{Kx^3}{1 - \frac{Kx}{3}} \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 (1 + Kx). \end{aligned}$$

Pagal 1.2 lemą

$$Me^{xX_1} \leq \exp\Big\{\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 (1 + Kx)\Big\}.$$

Kadangi atsitiktiniai dydžiai $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, tai

$$Me^{xS_n} = M^n e^{xX_1},$$

vadinasi,

$$Me^{xS_n} \leq \exp\Big\{\frac{1}{2}n\sigma^2 x^2 (1 + Kx)\Big\}.$$

Įrašę šį įvertį į (1), gauname nelygybę

$$P(S_n \geq y) \leq \exp\Big\{\frac{1}{2}n\sigma^2 x^2 (1 + Kx) - xy\Big\}. \tag{2}$$

Ją įrodinėdami, darėme prielaidą $0 \leq x \leq 2K^{-1}$.

Imkime $x = n^{-1}\sigma^{-2}y$. Kai $0 \leq y \leq 2n\sigma^2 K^{-1}$, sąlyga $0 \leq x \leq 2K^{-1}$ yra tenkinama. Tada iš (2) gauname pirmąjį lemos įvertį.

Imkime $x = K^{-1}/2$. Kai $y \geq n\sigma^2 K^{-1}/2$, iš (2) išplaukia

$$\begin{aligned} P(S_n \geq y) &\leq \exp\Big\{xy\Big(\frac{n\sigma^2 x(1 + Kx)}{2y} - 1\Big)\Big\} \leq \\ &\leq \exp\Big(-\frac{1}{4}xy\Big) = \exp\Big(-\frac{y}{8K}\Big). \ \square \end{aligned}$$

3 lema. *Bet kuriam* $x \geq 0$

$$P(\max_{k\leq n} S_k \geq x) \leq 2P(S_n \geq x - \sqrt{2n\sigma^2}).$$

Į r o d y m a s. Pažymėkime

$$\begin{aligned} A &= \{\max_{k\leq n} S_k \geq x\}, \\ A_k &= \{S_r < x \ (r = 1, ..., k-1), \ S_k \geq x\} \quad (k = 2, ..., n), \\ A_1 &= \{S_1 \geq x\}. \end{aligned}$$

Įvykiai A_k yra nesutaikomi, jų sąjunga lygi A. Todėl

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Nagrinėkime lygybę

$$\begin{aligned} P(A) = P(A \cap \{S_n \geq x - \sqrt{2n\sigma^2}\}) + \\ + P(A \cap \{S_n < x - \sqrt{2n\sigma^2}\}). \end{aligned} \tag{3}$$

Pirmasis dešinės pusės narys yra ne didesnis už

$$P(S_n \geq x - \sqrt{2n\sigma^2}).$$

Įvertinsime antrąjį. Aišku,

$$P(A_k \cap \{S_n < x - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \leq P(A_k \cap \{|S_n - S_k| > \sqrt{2n\sigma^2}\}).$$

Įvykiai A_k ir $\{|S_n - S_k| > \sqrt{2n\sigma^2}\}$ yra nepriklausomi. Todėl

$$P(A_k \cap \{S_n < x - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \leq P(A_k)P(|S_n - S_k| > \sqrt{2n\sigma^2}).$$

Iš Bjenemė–Čebyšovo nelygybės išplaukia

$$P(|S_n - S_k| > \sqrt{2n\sigma^2}) \leq \frac{D(S_n - S_k)}{2n\sigma^2} = \frac{(n-k)\sigma^2}{2n\sigma^2} < \frac{1}{2},$$

vadinasi,

$$P(A_k \cap \{S_n < x - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \leq \frac{1}{2} P(A_k).$$

Susumuojame pastarąją nelygybę pagal visus k ir gautąją nelygybę įrašome į (3). Gauname

$$P(A) \le P(S_n \ge x - \sqrt{2n\sigma^2}) + \frac{1}{2}P(A). \ \square$$

4 lema.

$$P\Big(\limsup_n \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\sigma^2 \ln\ln n}} \le 1\Big) = 1.$$

Į r o d y m a s. Imkime bet kurią teigiamą konstantą γ ir bet kurią konstantą c, didesnę už 1. Pažymėkime

$$x(n) = \sqrt{2n\sigma^2 \ln\ln n},$$
$$n_k = [(1+\gamma)^k].$$

Pagal 3 lemą

$$P\Big(\max_{r \le n_k} S_r \ge cx(n_k)\Big) \le$$
$$\le 2P\Big(S_{n_k} \ge cx(n_k) - \sqrt{2n_k\sigma^2}\Big) \le$$
$$\le 2P\Big(S_{n_k} \ge cx(n_k)(1-\varepsilon)\Big),$$

kai $\varepsilon > 0$ – bet koks teigiamas skaičius ir $k \ge k_0(\varepsilon)$. Remiamės 2 lemos pirmąja nelygybe. Gauname, kad kiekvienam $\varepsilon_1 > 0$

$$P\Big(\max_{r \le n_k} S_r \ge cx(n_k)\Big) \le 2\exp\{-c^2(1-\varepsilon_1)\ln\ln n_k\},$$

kai $k \ge k_1$ yra pakankamai didelis. Tačiau

$$\ln\ln n_k = \ln k + O(1).$$

Todėl eilutė

$$\sum_{k \ge k_1}^{\infty} P\Big(\max_{r \le n_k} S_r \ge cx(n_k)\Big) \le 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{-c^2(1-\varepsilon_1)} e^{O(1)}$$

konverguoja. Iš Borelio–Kantelio lemos išplaukia, kad su tikimybe 1 visiems pakankamai dideliems k teisinga nelygybė

$$\max_{r \le n_k} S_r < cx(n_k),$$

vadinasi, su tikimybe 1 visiems pakankamai dideliems k ir visiems $r, n_{k-1} \le$ $\le r < n_k$ teisinga nelygybė

$$\frac{S_r}{\sqrt{2r\sigma^2 \ln\ln r}} \le \frac{cx(n_k)}{\sqrt{2n_{k-1}\sigma^2 \ln\ln n_{k-1}}}.$$

Pastarosios nelygybės dešinioji pusė konverguoja į $c(1+\gamma)^{1/2}$, kai k neaprėžtai didėja. Todėl kiekvienam $\eta > 0$ ir visiems pakankamai dideliems r su tikimybe 1

$$\frac{S_r}{\sqrt{2r\sigma^2 \ln\ln r}} \le c\sqrt{1+\gamma}(1+\eta).$$

Kiekvienas iš dydžių $c,\ 1+\gamma,\ 1+\eta$ gali būti parinktas kiek norima artimas 1. Todėl visiems $\delta > 0$ ir visiems pakankamai dideliems n

$$P\big(S_n \le (1+\delta)x(n)\big) = 1.$$

Pakeitę dydžius X_k dydžiais $-X_k$, gauname, kad visiems $\delta > 0$ ir visiems pakankamai dideliems n

$$P\big(-S_n \le (1+\delta)x(n)\big) = 1. \ \square$$

5 lema. *Jei realieji skaičiai a_n tenkina sąlygas*

$$\frac{a_n}{n} \to 0, \ \ \frac{a_n}{\sqrt{n}} \to \infty,$$

kai $n \to \infty$, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ ir pakankamai dideliems n

$$P(S_n \ge a_n) > \exp\Big\{-\frac{a_n^2}{2n\sigma^2}(1+\varepsilon)\Big\}.$$

Į r o d y m a s. Pažymėję

$$P(S_n \ge y) = G(y)$$

ir paėmę bet kurį teigiamą skaičių x, turime

$$Me^{xS_n} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xy} d\big(1 - G(y)\big) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{xy} dG(y).$$

Kadangi $G(y) = 0$, kai y yra pakankamai didelis (kai $y > nK$), tai, integruodami dalimis, gauname

$$Me^{xS_n} = -e^{xy}G(y)\big|_{-\infty}^{\infty} + x\int_{-\infty}^{\infty} e^{xy}G(y)dy = x\int_{-\infty}^{\infty} e^{xy}G(y)dy.$$

Imkime bet kokį mažą fiksuotą teigiamą skaičių δ. Pažymėję $y_1 = nx\sigma^2(1-\delta),\ y_2 = nx\sigma^2(1+\delta)$, suskaidykime integravimo sritį į penkias sritis

$$(-\infty, 0), [0, y_1), [y_1, y_2), [y_2, 8nx\sigma^2), [8nx\sigma^2, \infty).$$

Integralus tose srityse iš eilės pažymėkime $I_1, ..., I_5$. Gausime

$$Me^{xS_n} = x(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5). \tag{4}$$

Įvertinsime juos iš viršaus.

Lengviausiai įvertinamas pirmasis integralas

$$xI_1 = x\int_{-\infty}^{0} e^{xy}G(y)dy \le x\int_{-\infty}^{0} e^{xy}dy = 1. \tag{5}$$

Penktąjį integralą įvertinsime, remdamiesi 2 lema. Kai $y \ge 1/2n\sigma^2K^{-1}$, pakankamai mažiems x pagal 2 lemos antrąjį įvertį

$$G(y) \le \exp\Big(-\frac{1}{8}yK^{-1}\Big) \le e^{-2xy},$$

o kai $0 < y \le 1/2n\sigma^2K^{-1}$, pakankamai mažiems x ir pakankamai dideliems n, remiantis 2 lemos pirmuoju įverčiu,

$$G(y) \le \exp\Big\{-\frac{y^2}{2n\sigma^2}\Big(1 - \frac{Ky}{n\sigma^2}\Big)\Big\} \le \exp\Big(-\frac{y^2}{4n\sigma^2}\Big) \le e^{-2xy}.$$

Todėl

$$xI_5 = x\int_{8nx\sigma^2}^{\infty} e^{xy}G(y)dy \le x\int_{0}^{\infty} e^{-xy}dy = 1. \tag{6}$$

Panagrinėsime pointegralinę funkciją intervale $0 \le y \le 8nx\sigma^2$. Kai x yra pakankamai mažas, vėl galime remtis 2 lema, pagal kurią

$$e^{xy}G(y) \le \exp\Big\{xy - \frac{y^2}{2n\sigma^2}(1-\beta)\Big\} = e^{\psi(y)};$$

čia β – kiek norima mažas teigiamas skaičius, kai x pakankamai mažas. Funkcija $\psi(y)$ turi vienintelį maksimumą taške

$$\frac{n\sigma^2x}{1-\beta}.$$

Pakankamai mažiems β tas skaičius yra intervale (y_1, y_2). Įvertinsime funkciją $\psi(y)$ to intervalo galuose. Kai β yra pakankamai mažas,

$$\begin{aligned}\psi\big(nx\sigma^2(1\pm\delta)\big) &= \frac{1}{2}nx^2\sigma^2(1\pm\delta)\{2-(1\pm\delta)(1-\beta)\} = \\ &= \frac{1}{2}nx^2\sigma^2(1\pm\delta)\{1\mp\delta+(1\pm\delta)\beta\} = \\ &= \frac{1}{2}nx\sigma^2\{1-\delta^2+(1\pm\delta)^2\beta\} < \frac{1}{2}nx^2\sigma^2(1-\delta^2/2).\end{aligned}$$

Iš čia

$$xI_2 \le xy_1\psi(y_1) < nx^2\sigma^2 \exp\Big\{\frac{1}{2}nx^2\sigma^2(1-\delta^2/2)\Big\} \tag{7}$$

ir

$$xI_4 \le 8nx^2\sigma^2\psi(y_2) < 8nx^2\sigma^2 \exp\Big\{\frac{1}{2}nx^2\sigma^2(1-\delta^2/2)\Big\}. \tag{8}$$

Parinksime

$$x = \frac{a_n}{n\sigma^2(1-\delta)}. \tag{9}$$

Iš lemos sąlygų išplaukia, kad x yra kiek norima mažas, kai n pakankamai didelis.

Įvertinsime paskutinį integralą. Turime

$$\begin{aligned} xI_3 &\le x(y_2-y_1)e^{xy_2}G(y_1) = \\ &= 2nx^2\sigma^2\delta \exp\{nx^2\sigma^2(1+\delta)\}P(S_n \ge a_n). \end{aligned} \tag{10}$$

(5), (6), (7), (8), (10) sąryšius įrašę į (4) ir atsižvelgę į (9) bei lemos sąlygas, gauname

$$\begin{aligned} Me^{xS_n} &< \exp\Big\{\frac{1}{2}nx^2\sigma^2(1-\delta^2/3)\Big\}+ \\ &+ \exp\{nx^2\sigma^2(1+2\delta)\}P(S_n \ge a_n), \end{aligned} \tag{11}$$

kai n pakankamai didelis.

Įvertinsime šios nelygybės kairiosios pusės narį iš apačios. Kaip ir 2 lemos įrodyme, pakankamai mažiems x

$$\begin{aligned} Me^{xX_1} &= M\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^rX_1^r}{r!} = 1 + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 + \sum_{r=3}^{\infty}\frac{x^r}{r!}MX_1^r \ge \\ &\ge 1 + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 + \sum_{r=3}^{\infty}\frac{x^r}{r!}K^{r-2}\sigma^2 \ge \\ &\ge 1 + \frac{1}{2}x^2\sigma^2\Big\{1 - \sum_{r=3}^{\infty}\Big(\frac{Kx}{3}\Big)^{r-2}\Big\} \ge \\ &\ge 1 + \frac{1}{2}x^2\sigma^2(1-Kx). \end{aligned}$$

Pasinaudoję 1 lema, gauname

$$\begin{aligned} Me^{xX_1} &\ge \exp\Big\{\frac{1}{2}x^2\sigma^2(1-Kx)\Big[1 - \frac{1}{2}x^2\sigma^2(1-Kx)\Big]\Big\} \ge \\ &\ge \exp\Big\{\frac{1}{2}x^2\sigma^2(1-\gamma)\Big\}; \end{aligned}$$

čia γ yra kiek norima mažas teigiamas skaičius, kai x pakankamai mažas. Iš čia

$$Me^{xS_n} \geq \exp\Big\{\frac{1}{2}nx^2\sigma^2(1-\gamma)\Big\}.$$

Kai $\gamma < \delta^2/3$, iš pastarosios ir (11) nelygybių pakankamai dideliems n gauname

$$\exp\{nx^2\sigma^2(1+2\delta)\}P(S_n \geq a_n) > \frac{1}{2}\exp\Big\{\frac{1}{2}nx^2\sigma^2(1-\gamma)\Big\}.$$

Pagaliau

$$P(S_n \geq a_n) > \frac{1}{2}\exp\Big\{-\frac{a_n^2}{2n\sigma^2(1-\delta)^2}(1+\gamma+2\delta)\Big\} >$$
$$> \exp\Big\{-\frac{a_n^2}{2n\sigma^2}(1+\varepsilon)\Big\}$$

kiekvienam $\varepsilon > 0$, kai n pakankamai didelis. □

6 lema.

$$P\Big(\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2n\sigma^2 \ln\ln n}} \geq 1\Big) = 1.$$

Į r o d y m a s. Imkime kokius nors skaičius $L > 1$ ir $c < 1$. Pažymėkime

$$a(n) = \sqrt{2n\sigma^2 \ln\ln n},$$
$$n_k = [L^k] \ (k = 1, 2, ...).$$

Tirsime įvykius

$$A_k = \{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geq ca(n_k - n_{k-1})\}.$$

Iš 5 lemos kiek norima mažiems $\varepsilon > 0$ ir pakankamai dideliems k išplaukia, kad

$$P(A_k) > \exp\{-c^2(1+\varepsilon)\ln\ln(n_k - n_{k-1})\} \geq \exp\{-c^2(1+\varepsilon)^2 \ln k\}.$$

Jei ε tenkina sąlygą $c(1+\varepsilon)^2 < 1$, tai eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

diverguoja. Iš Borelio–Kantelio lemos išplaukia, kad su tikimybe 1 be galo dideliam indeksų k skaičiui

$$S_{n_k} \geq c\sqrt{2\sigma^2(n_k - n_{k-1})\ln\ln(n_k - n_{k-1})} + S_{n_{k-1}}.$$

Pagal 4 lemą visiems pakankamai dideliems k

$$S_{n_{k-1}} > -2\sqrt{2\sigma^2 n_{k-1}\ln\ln n_{k-1}}.$$

Lengva patikrinti, kad

$$\begin{aligned} &n_{k-1}\ln\ln n_{k-1} \sim L^{k-1}\ln k \sim L^{-1}n_k\ln\ln n_k,\\ &(n_k - n_{k-1})\ln\ln(n_k - n_{k-1}) \sim \Big(1-\frac{1}{L}\Big)L^k\ln k \sim\\ &\sim \Big(1-\frac{1}{L}\Big)n_k\ln\ln n_k. \end{aligned}$$

Todėl, imant bet kurį $\delta > 0$, su tikimybe 1 be galo dideliam indeksų skaičiui k bus teisingos nelygybės

$$S_{n_k} > \sqrt{2n_k\sigma^2\ln\ln n_k}\Big(c\sqrt{1-\frac{1}{L}} - 2^{L^{-1/2}}\Big)(1-\delta).$$

Skaičius $c < 1,\ L > 1$ ir $\delta > 0$ galima parinkti taip, kad pastarieji dauginamieji būtų kiek norima artimi 1. Taigi lema įrodyta. □

Iš 4 ir 6 lemų išplaukia šitoks teiginys.

1 teorema (kartotinio logaritmo dėsnis). *Sakykime, $\{X_n\}$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, tenkinantys sąlygą $P(|X_n| \le K) = 1$ su kuria nors konstanta K, turintys vidurkius $MX_n = 0$ ir dispersijas $DX_k = \sigma^2 > 0$. Pažymėkime $S_n = X_1 + ... + X_n$. Teisinga lygybė*

$$P\Big(\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2n\sigma^2\ln\ln n}} = 1\Big) = 1.$$

Yra ir daug bendresnių rezultatų. Šiek tiek apibendrinę 1 teoremos įrodymą, galime gauti Kolmogorovo kartotinio logaritmo dėsnį.

2 (Kolmogorovo) teorema. *Sakykime, $\{X_n\}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys dispersijas ir vidurkius $MX_n = 0$. Pažymėkime $S_n = X_1 + ... + X_n$. Jei egzistuoja seka tokių konstantų $\{K_n\}$, kad*

$$\begin{aligned} &K_n = o\Big(\frac{DS_n}{\sqrt{\ln\ln DS_n}}\Big),\\ &P(|X_n| \le K_n) = 1, \end{aligned}$$

tai

$$P\Big(\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2DS_n\ln\ln DS_n}} = 1\Big) = 1.$$

Bendresnių rezultatų galima rasti [28] knygoje.

7. SILPNASIS KONVERGAVIMAS

Susipažinsime dar su vienu atsitiktinių dydžių konvergavimo tipu. Natūralu įvesti tokią konvergavimo sąvoką, kad iš atsitiktinių dydžių sekos $\{X_n\}$ konvergavimo į atsitiktinį dydį X išplauktų dydžių X_n generuotų tikimybinių matų konvergavimas į dydžio X generuotą tikimybinį matą. Kadangi tarp generuotų tikimybinių matų ir pasiskirstymo funkcijų yra abipus vienareikšmė atitiktis, tai tą naująjį konvergavimą galima nusakyti pasiskirstymo funkcijų terminais.

Paprasčiausia reikalauti, kad pasiskirstymo funkcijų seka $\{F_{X_n}(x)\}$ konverguotų į $F_X(x)$ visuose taškuose $x \in R$. Tačiau toks konvergavimas būtų per siauras. Imkime, pavyzdžiui, atsitiktinius dydžius $X_n = -1/n$ $(n = 1, 2, ...)$ ir $X \equiv 0$. Atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ konverguoja į atsitiktinį dydį X. Pažiūrėsime, kaip yra su atitinkamomis pasiskirstymo funkcijomis. Funkcija $F_{X_n}(x) = 0$, kai $x \le -1/n$, ir $F_{X_n}(x) = 1$, kai $x > -1/n$; funkcija $F_X(x) = 0$, kai $x \le 0$, ir $F_X(x) = 1$, kai $x > 0$. Vadinasi, $F_{X_n}(x)$ konverguoja į $F_X(x)$ visiems x, išskyrus $x = 0$, kuris yra ribinės pasiskirstymo funkcijos trūkio taškas. Galima būtų išnagrinėti ir daugiau pavyzdžių, kai ribinė pasiskirstymo funkcija turi trūkio taškų. Iš jų išplauktų, kad tikslinga įvesti bendresnę pasiskirstymo funkcijų konvergavimo sąvoką: nereikalauti, kad pasiskirstymo funkcijų seka konverguotų ribinės pasiskirstymo funkcijos trūkio taškuose.

Sakysime, kad atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ *konverguoja pagal pasiskirstymą* į atsitiktinį dydį X, jei tų dydžių pasiskirstymo funkcijų seka F_{X_n} konverguoja į pasiskirstymo funkciją F_X visuose jos tolydumo taškuose. Šiuo atveju galime kalbėti apie silpnąjį pasiskirstymo funkcijų konvergavimą. Tiesa, matematinėje analizėje silpnasis funkcijų konvergavimas nusakomas šiek tiek kitaip. Tačiau vėliau matysime, kad tas konvergavimas yra ekvivalentus čia aprašytajam.

Palyginsime konvergavimą pagal pasiskirstymą su konvergavimais pagal tikimybę ir su tikimybe 1. Apie konvergavimą pagal pasiskirstymą galima kalbėti ir tada, kai atsitiktiniai dydžiai X_n yra apibrėžti skirtingose tikimybinėse erdvėse, tuo tarpu apie kitus du konvergavimus tada kalbėti nėra prasmės.

1 teorema. *Jei atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ konverguoja į atsitiktinį dydį X pagal tikimybę, tai ta seka konverguoja į X ir pagal pasiskirstymą.*

Į r o d y m a s. Bet kuriems realiesiems skaičiams x ir x_1

$$\{X < x_1\} = \{X_n < x,\ X < x_1\} \cup \{X_n \ge x, X < x_1\} \subset$$
$$\subset \{X_n < x\} \cup \{X_n \ge x,\ X < x_1\}.$$

Todėl

$$F_X(x_1) \le F_{X_n}(x) + P(X_n \ge x,\ X < x_1).$$

Kadangi X_n konverguoja pagal tikimybę į X, tai visiems $x_1 < x$

$$P(X_n \geq x,\ X < x_1) \leq P(|X_n - X| \geq x - x_1) \to 0,$$

kai $n \to \infty$, vadinasi,

$$F_X(x_1) \leq \liminf_n F_{X_n}(x),$$

kai $x_1 < x$. Sukeitę vietomis X ir X_n bei x ir x_1 analogiškai gauname, kad visiems $x < x_1$

$$\limsup_n F_{X_n}(x) \leq F_X(x_1).$$

Todėl

$$F_X(x_1') \leq \liminf_n F_{X_n}(x) \leq \limsup_n F_{X_n}(x) \leq F_X(x''),$$

kai $x' < x < x''$. Jei x yra funkcijos F tolydumo taškas, tai, paskutinėje nelygybėje paėmę $x' \nearrow x, x'' \searrow x$, gauname

$$F_{X_n}(x) \to F(x),$$

kai $n \to \infty$. $\square$

Atkreipsime dėmesį: jei X_n konverguoja į X pagal pasiskirstymą, tai iš to dar neišplaukia, kad X_n konverguoja į X pagal tikimybę. Tai matyti iš šitokio pavyzdžio. Tarkime, kad X ir Y yra vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, bet $X(\omega)$ ir $Y(\omega)$ nesutampa beveik visiems $\omega \in \Omega$. Imkime seką atsitiktinių dydžių $X_n = Y$ $(n = 1, 2, ...)$. Tada X_n konverguoja į X pagal pasiskirstymą, bet nekonverguoja į X pagal tikimybę.

Nurodysime atskirą atvejį, kai abu konvergavimai yra ekvivalentūs.

2 teorema. *Atsitiktinių dydžių seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal tikimybę į išsigimusį atsitiktinį dydį X, $P(X = c) = 1$, tada ir tik tada, kai ta seka konverguoja į X pagal pasiskirstymą.*

Į r o d y m a s. Jei seka X_n konverguoja į X pagal tikimybę, tai pagal 1 teoremą ji konverguoja į X ir pagal pasiskirstymą.

Tarkime, kad seka X_n konverguoja į X pagal pasiskirstymą. Pastebėsime, kad dydžio X pasiskirstymo funkcija yra

$$\varepsilon(x - c) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x > c, \\ 0, & \text{kai } x \leq c. \end{cases}$$

Todėl kiekvienam $\delta > 0$

$$\begin{aligned} &P(|X_n - X| \geq \delta) \leq P(X_n < c - \delta/2) + P(X_n \geq c + \delta) = \\ &= F_{X_n}(c - \delta/2) + 1 - F_{X_n}(c + \delta) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \ \square \end{aligned}$$

Remdamiesi bendrosiomis matematinės analizės koncepcijomis, silpnąjį pasiskirstymo funkcijų konvergavimą apibrėšime šitaip. Tarkime, kad F

ir F_n $(n = 1, 2, ...)$ yra pasiskirstymo funkcijos. Jei kiekvienai aprėžtai tolydžiajai funkcijai g, apibrėžtai visoje realiųjų skaičių tiesėje,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x),$$

tai sakome, kad seka F_n *konverguoja silpnai* į F. Įrodysime, kad šis konvergavimas yra ekvivalentus ankstesniajam. Kartu įrodysime ir keletą kitų teiginių, kurie mums pravers toliau.

Nagrinėsime nemažėjančias funkcijas, apibrėžtas realiųjų skaičių tiesėje; jų klasė yra platesnė už pasiskirstymo funkcijų.

3 teorema. *Nemažėjančių funkcijų seka F_n konverguoja į kokią nors (nemažėjančią) funkciją F jos tolydumo taškuose tada ir tik tada, kai ta seka konverguoja į F kokioje nors taškų aibėje, tirštoje visoje tiesėje.*

Į r o d y m a s. Sąlygos būtinumas yra trivialus, nes nemažėjančios funkcijos F trūkio taškų aibė yra baigtinė, arba skaiti (plg. II.2.5 teoremos įrodymą). Įrodysime sąlygos pakankamumą. Tarkime, kad F_n konverguoja į F visur tirštoje aibėje D. Imkime bet kurį F tolydumo tašką x_0 ir bet kuriuos aibės D taškus x' ir x'', tenkinančius sąlygą $x' < x_0 < x''$. Tada kiekvienam n

$$F_n(x') \le F_n(x_0) \le F_n(x'').$$

Iš čia ir iš teoremos sąlygų išplaukia

$$F(x') = \lim_{n\to\infty} F_n(x') \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x_0) \le$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} F_n(x_0) \le \lim_{n\to\infty} F_n(x'') = F(x'').$$

Kadangi aibė D yra visur tiršta, tai taškus x' ir x'' galime parinkti kiek norima artimus taškui x_0. Todėl

$$F(x_0 - 0) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x_0) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x_0) \le F(x_0 + 0).$$

x_0 yra $F(x)$ tolydumo taškas, todėl $F(x_0 - 0) = F(x_0 + 0) = F(x_0)$. Vadinasi, $F_n(x_0)$ konverguoja į $F(x_0)$. □

4 (Helio[1] kompaktiškumo) teorema. *Jei F_n $(n = 1, 2, ...)$ yra nemažėjančios funkcijos, aprėžtos ta pačia konstanta, tai iš jų sekos galima išskirti posekį, konverguojantį į kokią nors aprėžtą nemažėjančią funkciją F visuose jos tolydumo taškuose.*

Į r o d y m a s. Imkime kokią nors tirštą visoje skaičių tiesėje skaičių aibę $D = \{x_1, x_2, ...\}$, pavyzdžiui, visų racionaliųjų skaičių aibę. Duotosios

[1] Eduard Helly (1884–1943) – austrų ir amerikiečių matematikas.

funkcijų sekos reikšmių taške x_1 aibė $\{F_n(x_1)\}$ yra aprėžta. Pagal Bolcano[1]–Vejerštraso[2] teoremą iš tos sekos galima išskirti konverguojantį posekį $F_{1n}(x_1)$ $(n = 1, 2, ...)$. Pažymėkime jo ribą $F(x_1)$. Dabar imkime funkcijų sekos $\{F_{1n}(x)\}$ reikšmių taške x_2 aibę $\{F_{1n}(x_2)\}$. Ji, aišku, taip pat aprėžta. Todėl galime išskirti konverguojantį posekį $F_{2n}(x_2)$. Jo ribą pažymėkime $F(x_2)$.

Šį procesą galime tęsti neribotai. Taip gausime sekų seką

$$\begin{array}{llll} F_{11}(x), & F_{12}(x), & F_{13}(x), & ..., \\ F_{21}(x), & F_{22}(x), & F_{23}(x), & ..., \\ F_{31}(x), & F_{32}(x), & F_{33}(x), & ..., \\ \cdots & \cdots & \cdots & ... \end{array}$$

Sudarykime diagonaliąją funkcijų seką

$$F_{11}(x),\ F_{22}(x),\ F_{33}(x),\ ...$$

Taške x_1 ji konverguos į $F(x_1)$, taške x_2 – į $F(x_2)$ ir t. t., taške x_k – į $F(x_k)$ ir t. t.

Vadinasi, seka $F_{nn}(x)$ konverguos į $F(x)$ aibėje D. Funkcija $F(x)$, apibrėžta aibėje D, yra aprėžta ir nemažėjanti. Praplėsime jos apibrėžimą visiems tiesės taškams, imdami

$$F(x) = \sup_{x_k \le x} F(x_k).$$

Taip praplėsta funkcija yra aprėžta ir nemažėjanti. Pagal 3 teoremą seka $\{F_{nn}(x)\}$ konverguoja į $F(x)$ visuose jos tolydumo taškuose. □

5 (Helio–Brėjaus) teorema. *Tarkime, kad funkcijos* F_n $(n = 1, 2, ...)$ *yra nemažėjančios ir aprėžtos ta pačia konstanta. Jei seka* F_n *konverguoja į funkciją* F *jos tolydumo taškuose ir*

$$F_n(-\infty) \to F(-\infty),\ F_n(\infty) \to F(\infty),$$

tai kiekvienai tolydžiajai aprėžtai funkcijai g

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

Teoremoje nusakytas funkcijų konvergavimas yra vadinamas *pilnuoju.* Jei F bei F_n yra pasiskirstymo funkcijos ir F_n konverguoja į F jos tolydumo taškuose, tai F_n pilnai konverguoja į F.

Į r o d y m a s. Pažymėkime raide C konstantą, aprėžiančią funkcijas F_n:

[1] Bernard Bolzano (1781–1848) – čekų matematikas ir filosofas.

[2] Karl Weierstrass (1815–1897) – vokiečių matematikas.

$$|F_n(x)| \leq C \ (n = 1, 2, ...) \tag{1}$$

ir

$$K = \sup_{-\infty<x<\infty} |g(x)|. \tag{2}$$

Paėmę bet kokį $\varepsilon > 0$, parinkime funkcijos F tolydumo taškus $a < b$ su sąlyga

$$\int_{R\setminus[a,b)} dF(x) < \frac{\varepsilon}{6K}. \tag{3}$$

Funkcija g, tolydi segmente $[a, b]$, jame yra ir tolygiai tolydi. Todėl galime rasti tokį intervalo $[a, b]$ skaidinį funkcijos F tolydumo taškais x_k

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_s = b,$$

kad kiekviename intervale $[x_{k-1}, x_k)$ būtų

$$|g(x) - g(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{16C}.$$

Sudarykime funkciją

$$g_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{s} g(x_{k-1})\mathbf{1}_{[x_{k-1},x_k)}(x).$$

Visuose intervalo $[a, b)$ taškuose

$$|g(x) - g_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{16C}. \tag{4}$$

Galime rasti tokį didelį n_0, kad visiems $n \geq n_0$ būtų

$$|F(x_k) - F_n(x_k)| < \frac{\varepsilon}{8Ks} \ (k = 0, 1, ..., s), \tag{5}$$

$$\int_{R\setminus[a,b)} dF_n(x) < \frac{\varepsilon}{3K}. \tag{6}$$

Teisinga nelygybė

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)\Big| \leq \\
&\leq \int_{R\setminus[a,b)} |g(x)|dF_n(x) + \int_{R\setminus[a,b)} |g(x)|dF(x)+ \\
&+ \int_{[a,b)} |g(x) - g_\varepsilon(x)|dF(x) + \Big|\int_{[a,b)} g_\varepsilon(x)dF(x)- \\
&- \int_{[a,b)} g_\varepsilon(x)dF_n(x)\Big| + \int_{[a,b)} |g_\varepsilon(x) - g(x)|dF_n(x).
\end{aligned} \tag{7}$$

Pirmieji du dešiniosios pusės nariai pagal (2), (3) ir (6) yra mažesni už

$$K \cdot \frac{\varepsilon}{3K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{6K} = \frac{\varepsilon}{2},$$

trečiasis ir penktasis pagal (4) ir (1) mažesni už

$$\frac{\varepsilon}{16C} \cdot 2C \cdot 2 = \frac{\varepsilon}{4},$$

o ketvirtasis narys lygus

$$\begin{aligned} &\Big| \sum_{k=1}^{s} g(x_{k-1})\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) - \\ &- \sum_{k=1}^{s} g(x_{k-1})\big(F_n(x_k) - F_n(x_{k-1})\big) \Big| = \\ &= \Big| \sum_{k=1}^{s} g(x_{k-1})\big(F(x_k) - F_n(x_k)\big) - \\ &- \sum_{k=1}^{s} g(x_{k-1})\big(F(x_{k-1}) - F_n(x_{k-1})\big) \Big|. \end{aligned}$$

Iš (2) ir (5) išplaukia, kad jis mažesnis už

$$s \cdot K \frac{\varepsilon}{8Ks} \cdot 2 = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Vadinasi, (7) kairės pusės narys yra mažesnis už ε, kai $n \geq n_0$. □

6 teorema. *Sakykime, F, F_n $(n = 1, 2, ...)$ yra pasiskirstymo funkcijos. Seka F_n konverguoja į F visuose F tolydumo taškuose tada ir tik tada, kai kiekvienai aprėžtai, tolydžiai visoje realiųjų skaičių tiesėje funkcijai g*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

Į r o d y m a s. Sąlygos būtinumas išplaukia iš 5 teoremos. Įrodysime jos pakankamumą. Tarkime, kad x_0 yra F tolydumo taškas. Paėmę bet kokį teigiamą ε, parinkime tokį $\delta > 0$, kad būtų

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon,$$

kai $|x - x_0| \leq \delta$, ir imkime dvi funkcijas

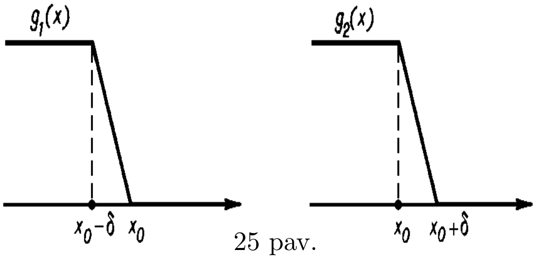
$$g_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \le x_0 - \delta, \\ \delta^{-1}(x_0 - x), & \text{kai } x_0 - \delta \le x \le x_0, \\ 0, & \text{kai } x \ge x_0, \end{cases}$$
$$g_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \le x_0, \\ 1 - \delta^{-1}(x - x_0), & \text{kai } x_0 \le x \le x_0 + \delta, \\ 0, & \text{kai } x \ge x_0 + \delta \end{cases}$$

(žr. 25 pav.). Teisingos nelygybės

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)dF(x) \ge \int_{-\infty}^{x_0-\delta} dF(x) = \\ &= F(x_0 - \delta) > F(x_0) - \varepsilon, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)dF(x) \le \int_{-\infty}^{x_0+\delta} dF(x) = \\ &= F(x_0 + \delta) < F(x_0) + \varepsilon \end{aligned} \tag{8}$$

ir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)dF_n(x) \le \int_{-\infty}^{x_0} dF_n(x) = F_n(x_0), \\ \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)dF_n(x) \ge \int_{-\infty}^{x_0} dF_n(x) = F_n(x_0). \end{aligned} \tag{9}$$



25 pav.

Kai n yra pakankamai didelis,

$$\begin{aligned} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)dF(x) \Big| < \varepsilon, \\ \Big| \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)dF(x) \Big| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Iš (8), (9),(10), kai n pakankamai didelis, išplaukia

$$F(x_0) - 2\varepsilon < F_n(x_0) < F(x_0) + 2\varepsilon. \ \square$$

Mums pravers dar viena teorema.

7 teorema. *Jei pasiskirstymo funkcijų seka $F_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ konverguoja į tolydžią pasiskirstymo funkciją $F(x)$, kai $n \to \infty$, tai $F_n(x) \to F(x)$ tolygiai visiems realiesiems x.*

Į r o d y m a s. Kadangi F yra monotoniška ir aprėžta, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ galime rasti tokį $N = N(\varepsilon)$ ir taškus $-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N = \infty$, jog funkcijos F pokytis intervaluose $I_1 = (x_0, x_1)$, $I_k = [x_{k-1}, x_k)$ $(k = 2, 3, ..., N-1)$, $I_N = [x_{N-1}, x_N)$ būtų mažesnis už $\dfrac{\varepsilon}{5}$, ir tokį $n_0 = n_0(\varepsilon)$, kad $|F(x_k) - F_n(x_k)| < \frac{\varepsilon}{5}$ $(k = 0, 1, ..., N)$.

Tarkime, kad $x \in I_k$. Kadangi

$$\begin{aligned} F_n(x) - F(x) = \big(F_n(x) - F_n(x_k)\big) + \\ + \big(F_n(x_k) - F(x_k)\big) + \big(F(x_k) - F(x)\big) \end{aligned}$$

ir iš pasiskirstymo funkcijų monotoniškumo

$$\begin{aligned} &|F_n(x) - F_n(x_k)| \leq F_n(x_{k+1}) - F(x_k) \leq \\ &\leq |F_n(x_{k+1}) - F(x_{k+1})| + F(x_{k+1}) - F(x_k) + \\ &+ |F(x_k) - F_n(x_k)|, \\ &|F(x_k) - F(x)| \leq F(x_{k+1}) - F(x_k), \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} &|F_n(x) - F(x)| \leq |F_n(x_{k+1}) - F(x_{k+1})| + \\ &+ 2\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big) + 2|F(x_k) - F_n(x_k)| < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon. \ \square \end{aligned}$$

Baigdami šį skyrelį, ryšius tarp atsitiktinių dydžių įvairių konvergavimo rūšių pailiustruosime tokia schema.

Konvergavimas su tikimybe 1	$\Rightarrow$	Konvergavimas pagal tikimybę	$\Rightarrow$	Konvergavimas pagal pasiskirstymą

8. CHARAKTERISTINĖS FUNKCIJOS IR PAPRASČIAUSIOS JŲ SAVYBĖS

Mums dabar reikės kompleksinių funkcijų integralų. Tarkime, kad turime erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}, \mu\}$. Jei kompleksinės funkcijos g, apibrėžtos aibėje Ω, komponentai $\mathrm{Re}\ g$, $\mathrm{Im}\ g$ yra matūs ir egzistuoja integralai

$$\int_\Omega \mathrm{Re}\ g(\omega)\mu(d\omega), \ \int_\Omega \mathrm{Im}\ g(\omega)\mu(d\omega),$$

tai funkcijos g integralu laikome

$$\int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega \mathrm{Re}\ g(\omega)\mu(d\omega) + i\int_\Omega \mathrm{Im}\ g(\omega)\mu(d\omega). \tag{1}$$

Sakome, kad g yra integruojama, jei $\mathrm{Re}\ g$ ir $\mathrm{Im}\ g$ yra integruojamos funkcijos.

Kompleksinių funkcijų integralai turi savybes, analogiškas realiųjų funkcijų integralų savybėms. Paminėsime porą iš jų.

Kadangi

$$|\mathrm{Re}\ g| \le |g|, \ |\mathrm{Im}\ g| \le |g|,$$
$$|g| \le |\mathrm{Re}\ g| + |\mathrm{Im}\ g|,$$

tai kompleksinė funkcija g yra integruojama tada ir tik tada, kai integruojama $|g|$. Parodysime, kad tuo atveju, kai g integruojama, galioja nelygybė

$$\Big|\int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega)\Big| \le \int_\Omega |g(\omega)|\mu(d\omega).$$

Bet kuriems kompleksiniams skaičiams z_1, z_2 teisinga nelygybė

$$\mathrm{Re}\ z_1\bar{z}_2 \le |z_1 z_2|.$$

Todėl

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega)\Big|^2 &= \mathrm{Re}\Big(\int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega)\cdot\int_\Omega \bar{g}(\omega_1)\mu(d\omega_1)\Big) = \\ &= \int_\Omega\int_\Omega \mathrm{Re}\ g(\omega)\bar{g}(\omega_1)\mu(d\omega)\mu(d\omega_1) \le \\ &\le \int_\Omega\int_\Omega |g(\omega)\bar{g}(\omega_1)|\mu(d\omega)\mu(d\omega_1) = \\ &= \Big(\int_\Omega |g(\omega)|\mu(d\omega)\Big)^2.\end{aligned}$$

Jei $G \ge 0$ yra integruojama funkcija, o g – mati kompleksinė funkcija ir $|g| \le G$, tai ir g yra integruojama, be to,

$$\Big|\int_{\Omega} g(\omega)\mu(d\omega)\Big| \le \int_{\Omega} G(\omega)\mu(d\omega).$$

Nagrinėsime taip pat ir kompleksinius atsitiktinius dydžius. Jei $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ yra tikimybinė erdvė ir X, Y yra realieji atsitiktiniai dydžiai, tai kompleksinę funkciją $Z = X + iY$ laikysime *kompleksiniu atsitiktiniu dydžiu.* Tokio atsitiktinio dydžio vidurkis yra

$$MZ = MX + iMY = \int_{\Omega} Z(\omega)P(d\omega),$$

kai Z yra integruojama funkcija, t. y. egzistuoja MX ir MY. Kompleksinių atsitiktinių dydžių vidurkiai turi tas pačias savybes, kaip ir realiųjų atsitiktinių dydžių vidurkiai.

Jie turi adityvumo savybę:

$$M(Z_1 + Z_2) = MZ_1 + MZ_2.$$

Kompleksinę konstantą c galima iškelti prieš vidurkio ženklą:

$$McZ = cMZ.$$

Du kompleksinius dydžius $Z_1 = X_1 + iY_1,\ Z_2 = X_2 + iY_2$ laikysime nepriklausomais, jei vektoriai (X_1, Y_1) ir (X_2, Y_2) yra nepriklausomi. Jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai Z_1 ir Z_2 turi vidurkius, tai

$$\begin{aligned}
&MZ_1Z_2 = M(X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2) = \\
&= MX_1X_2 + iMX_1Y_2 + iMX_2Y_1 - MY_1Y_2 = \\
&= MX_1 \cdot MX_2 + iMX_1 \cdot MY_2 + iMX_2MY_2 - MY_1 \cdot MY_2 = \\
&= (MX_1 + iMY_1)(MX_2 + iMY_2) = MZ_1 \cdot MZ_2.
\end{aligned}$$

Labai svarbios, nagrinėjant atsitiktinius dydžius bei jų pasiskirstymą, yra vadinamosios charakteristinės funkcijos. Tarkime, kad X yra realusis atsitiktinis dydis. Tada kiekvienam $t \in R$

$$e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$$

yra kompleksinis atsitiktinis dydis, nes $\cos tx$ ir $\sin tx$ yra tolydžios, taigi jos yra Borelio funkcijos. Šio dydžio vidurkis egzistuoja kiekvienam $t \in R$, nes

$$|e^{itX}| = 1.$$

Atsitiktinio dydžio X *charakteristine funkcija* vadinsime

$$f(t) = f_X(t) = Me^{itX} = \int_\Omega e^{itX}(\omega)P(d\omega) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P_X(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x),$$

apibrėžtą visiems $t \in R$.

Jei X yra diskretusis atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes x_k su tikimybėmis $P(X = x_k) = p_k$, tai jo charakteristinę funkciją galime užrašyti šitaip:

$$f_X(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}.$$

Jei X yra absoliučiai tolydus dydis su tankio funkcija p_X, tai

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_X(x)dx.$$

Nagrinėsime charakteristinių funkcijų savybes.

1 teorema. *Visiems realiesiems t*

$$|f(t)| \le f(0) = 1.$$

Į r o d y m a s. Pagal charakteristinės funkcijos apibrėžimą

$$f(0) = \int_\Omega P(d\omega) = P(\Omega) = 1$$

ir

$$|f(t)| = \Big| \int_\Omega e^{itX(\omega)} P(\omega) \Big| \le \int_\Omega |e^{itX(\omega)}| P(d\omega) = \int_\Omega P(d\omega). \ \square$$

2 teorema. *Visiems realiesiems t teisingos lygybės*

$$f_X(-t) = f_{-X}(t) = \bar{f}_X(t);$$

čia brūkšnys reiškia kompleksinį jungtinį skaičių.

Į r o d y m a s išplaukia iš charakteristinės funkcijos apibrėžimo ir lygybių

$$Me^{-itX} = Me^{it(-X)} = \overline{Me^{itX}}. \ \square$$

3 teorema. *Charakteristinė funkcija yra tolygiai tolydi visoje realiųjų skaičių tiesėje.*

Į r o d y m a s. Paėmę bet kokį teigiamą ε, pagal II.2.2 teoremą galime rasti tokį $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$, kad būtų

$$\int_{|x|>\lambda} dF(x) < \frac{\varepsilon}{3},$$

ir tokį $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, kad visiems x ir h, $|x| \leq \lambda$, $|h| \leq \delta$,

$$|e^{ihx} - 1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Todėl

$$|f(t+h) - f(t)| = \Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(e^{ihx} - 1)dF(x) \Big| \leq$$
$$\leq \int_{|x|\leq\lambda} |e^{ihx} - 1| dF(x) + 2 \int_{|x|>\lambda} dF(x) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \ \square$$

4 teorema. *Jei a ir b yra realios konstantos, X – atsitiktinis dydis, tai*

$$f_{aX+b}(t) = e^{ibt} f_X(at).$$

Į r o d y m a s. Iš vidurkio savybių išplaukia

$$f_{aX+b}(t) = Me^{it(aX+b)} = e^{ibt} Me^{i(at)X} = e^{ibt} f_X(at). \ \square$$

5 teorema. *Jei $X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tai jų sumos charakteristinė funkcija yra lygi tų dydžių charakteristinių funkcijų sandaugai:*

$$f_{X_1+...+X_n}(t) = f_{X_1}(t)...f_{X_n}(t).$$

Į r o d y m a s. Teoremą pakanka įrodyti tik tuo atveju, kai $n = 2$. Kadangi X_1 ir X_2 yra nepriklausomi, tai nepriklausomi yra ir kompleksiniai atsitiktiniai dydžiai

$$e^{itX_1} = \cos tX_1 + i \sin tX_1, \ e^{itX_2} = \cos tX_2 + i \sin tX_2.$$

Todėl

$$f_{X_1+X_2}(t) = Me^{it(X_1+X_2)} = M(e^{itX_1} \cdot e^{itX_2}) =$$
$$= Me^{itX_1} \cdot Me^{itX_2} = f_{X_1}(t) f_{X_2}(t). \ \square$$

Lema. *Bet kuriems realiesiems x ir sveikiesiems neneigiamiems n*

$$\Big|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!}\Big| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Į r o d y m a s. Nelygybę įrodinėsime matematinės indukcijos metodu. Iš lygybės

$$\int_0^x e^{iu} du = \frac{e^{ix} - 1}{i}$$

išplaukia

$$|e^{ix} - 1| = \Big|\int_0^x e^{iu} du\Big| \le \int_0^{|x|} du = |x|.$$

Vadinasi, įrodomoji nelygybė yra teisinga, kai $n = 0$. Tarkime, kad ji teisinga kuriam nors n. Iš lygybės

$$\int_0^x \Big(e^{iu} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iu)^k}{k!}\Big) du = \frac{e^{ix} - 1}{i} - \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k x^{k+1}}{(k+1)!}$$

ir indukcinės prielaidos išplaukia

$$\Big|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(ix)^k}{k!}\Big| = \Big|\int_0^x \Big(e^{iu} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iu)^k}{k!}\Big) du\Big| \le$$

$$\le \int_0^{|x|} \Big|e^{iu} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iu)^k}{k!}\Big| du \le \int_0^{|x|} \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} du = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Todėl pagal matematinės indukcijos principą įrodomoji nelygybė yra teisinga visiems sveikiesiems neneigiamiems n. □

6 teorema. *Jei atsitiktinis dydis X turi n-ąjį momentą, tai jo charakteristinė funkcija turi n tolydžių išvestinių,*

(2) $$f^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} dF(x) \ (k = 0, 1, ..., n);$$

(3) $$MX^k = i^{-k} f^{(k)}(0) \ (k = 0, 1, ..., n);$$

(4) $$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} MX^k + o(|t|^n),$$

kai $t \to 0$;

$$(5) \qquad f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} MX^k + \Theta \frac{|t|^k}{k!} M|X|^n;$$

čia $|\Theta| \leq 1, \ n \geq 1.$

Į r o d y m a s. Pakanka imti $n \geq 1$. Teisinga lygybė

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{h} dF(x).$$

Pagal lemą ($x \neq 0$)

$$\Big| \frac{e^{ihx} - 1}{hx} \Big| \leq 1.$$

Kadangi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty,$$

tai iš V.9.16 teoremos išplaukia, kad egzistuoja riba

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{hx} dF(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} \lim_{h \to 0} \frac{e^{ihx} - 1}{hx} dF(x) = i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} dF(x).$$

Todėl išvestinė

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

egzistuoja ir lygi

$$f'(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} dF(x).$$

Parodysime, kad ji yra tolydi. Iš gautosios formulės išplaukia

$$f'(t+h) - f'(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} (e^{ihx} - 1) dF(x).$$

Kadangi pointegralinės funkcijos modulis neviršija $2|x|$, tai vėl pagal tą pačią V.9.16 teoremą galime pereiti prie ribos po integralo ženklu, kai $h \to 0$. Gauname, kad $f'(t+h) - f'(t) \to 0$, kai $h \to 0$. Vadinasi, $f'(t)$ yra tolydi.

Toliau taikome indukcijos metodą. Tarkime, kad kuriam nors $k < n$

$$f^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} dF(x).$$

Pritaikę šiam integralui tuos pačius samprotavimus, gauname

$$f^{(k+1)}(t) = i^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k+1} e^{itx} dF(x).$$

Taip įrodome (2) lygybę. Iš čia trivialiai gauname (3). Įrodinėjant (4) lygybę, reikia remtis Teiloro formule. Matematinės analizės kurse ta formulė paprastai įrodoma tik realiosioms funkcijoms. Tokiu pavidalu formulę galime atskirai pritaikyti realiajai ir menamajai daliai.

Įrodinėdami (5) lygybę, integruojame lemos nelygybę (pakeitę n skaičiumi $n-1$) funkcijos $F(x)$ atžvilgiu. □

Jei egzistuoja visų eilių momentai, tai galime formaliai užrašyti

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} MX^k.$$

Pakeitę $z = it$, gautume

$$f(-iz) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} dF(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} MX^k.$$

Jei šis reiškinys turi prasmę, tai funkciją $f(-iz)$ vadiname *momentų generuojančiąja funkcija.*

7 teorema. *Jei atsitiktinis dydis X yra absoliučiai tolydus, tai jo charakteristinė funkcija $f_X(t) \to 0$, kai $t \to \pm\infty$.*

Į r o d y m a s. Šis teiginys yra Lebego teoremos apie Furjė transformacijas išvada (žr. [16], VIII.4). □

8 (Bochnerio[1]–Chinčino) teorema. *Tolydžioji kompleksinė funkcija f, apibrėžta realiųjų skaičių tiesėje, yra charakteristinė funkcija tada ir tik tada, kai ji yra neneigiamai apibrėžta, t. y. bet kuriems kompleksiniams $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ir bet kuriems realiesiems skaičiams $t_1, ..., t_n$ teisinga nelygybė*

$$\sum_{k,l=1}^{n} \lambda_k \bar{\lambda}_l f(t_k - t_l) \geq 0.$$

Į r o d y m ą žr. [10], VII.39. □

Rasime keletą charakteristinių funkcijų.

1 p a v y z d y s. Jei $P(X = c) = 1$, tai

$$f_X(t) = 1 \cdot e^{ict} = e^{ict}.$$

[1] Salomon Bochner (1899–1982) – amerikiečių matematikas.

2 p a v y z d y s. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal binominį dėsnį(žr. II.2.2 pvz.). Jo charakteristinė funkcija yra

$$f_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{itk} = (pe^{it} + q)^n.$$

Šią funkciją galėjome ir kitaip gauti. Dydį X galime išreikšti nepriklausomų atsitiktinių dydžių suma $X = X_1 + ... + X_n$, kurioje dydis X_k įgyja dvi reikšmes: 1 su tikimybe p ir 0 su tikimybe q. Dydžio X_k charakteristinė funkcija yra

$$f_{X_k}(t) = pe^{it} + q.$$

Pagal 5 teoremą

$$f_X(t) = f_{X_1}(t)...f_{X_n}(t) = (pe^{it} + q)^n.$$

3 p a v y z d y s. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį (žr. II.5.2 pvz.). Jo charakteristinė funkcija

$$f_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{itk} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

4 p a v y z d y s. Rasime atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį $N(a, \sigma^2)$ (žr. II.5.6 pvz.), charakteristinę funkciją. Atkreipsime dėmesį, kad atsitiktinio dydžio $Y = (X - a)/\sigma$ pasiskirstymo funkcija yra

$$\begin{aligned} &P(Y < x) = P(X < a + \sigma x) = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a+\sigma x} \exp\Big\{ -\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2} \Big\} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du. \end{aligned}$$

Todėl pakanka rasti atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį $N(0, 1)$, charakteristinę funkciją

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} dx. \tag{6}$$

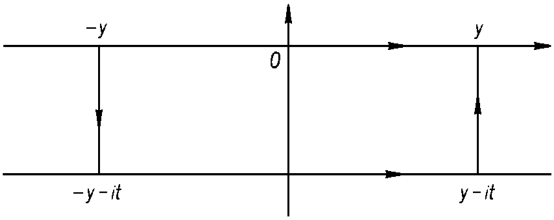
Ją galima apskaičiuoti įvairiais būdais.

Pakeisime integravimo kintamąjį $z = x - it$. Gausime

$$f_Y(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - it}^{\infty - it} e^{-z^2/2} dz;$$

čia integruojama kompleksinėje plokštumoje tiese, lygiagrečia realiajai ašiai (žr. 26 pav.). Imkime didelį teigiamą skaičių y; jam vėliau leisime tolti į begalybę. Kadangi $\exp(-z^2/2)$ yra sveikoji funkcija, tai pagal Koši teoremą

$$I_1 + I_2 + I_3 = \int_{-y}^{-y-it} + \int_{-y-it}^{y-it} + \int_{y-it}^{y} e^{-z^2/2} dz = \\ = \int_{-y}^{y} e^{-z^2/2} dz. \tag{7}$$



26 pav.

Įvertinsime I_1 ir I_3. Turime

$$|I_1| \le |t| \sup |e^{-(-y-iu)^2/2}|;$$

čia supremumas imamas pagal visus u nuo 0 iki t. Gauname

$$|I_1| \le |t| \sup |e^{-y^2/2-2iuy+u^2/2}| \le |t| e^{-y^2/2+t^2/2}.$$

Todėl $I_1 \to 0$, kai $y \to \infty$. Analogiškai įrodome, kad $I_3 \to 0$, kai $y \to \infty$. Perėję prie ribos (7) lygybėje, kai $y \to \infty$, pagal I.15.3 lemą gauname

$$\int_{-\infty-it}^{\infty-it} e^{-z^2/2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}.$$

Vadinasi,

$$f_Y(t) = e^{-t^2/2}.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$f_X(t) = f_{\sigma Y+a}(t) = e^{iat} f_Y(\sigma t) = e^{iat-\sigma^2 t^2/2}.$$

Dabar apskaičiuosime $f_Y(t)$ kitu būdu. Išskleidę $\exp(itx)$ laipsnine eilute ir sukeitę sumavimo bei integravimo tvarką, iš (6) gauname

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2/2} dx.$$

Integralas lygus 0, kai k nelyginis, ir lygus

$$\frac{(k-1)!\sqrt{2\pi}}{2^{k/2-1}(k/2-1)!},$$

kai k lyginis (žr. II.9.1 pavyzdį). Todėl

$$f_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2/2)^n}{n!} = e^{-t^2/2}.$$

Apskaičiuosime $f_Y(t)$ dar vienu būdu. Pagal 6 teoremą

$$f_Y'(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx - x^2/2} dx.$$

Integruojame dalimis

$$f_Y'(t) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} de^{-x^2/2} = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2/2} dx = -t f_Y(t).$$

Vadinasi,

$$\frac{f_Y'(t)}{f_Y(t)} = -t.$$

Kadangi $f_Y(0) = 1$, tai

$$\ln f_Y(t) = -t^2/2.$$

5 p a v y z d y s. Tarkime, kad X yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį $N(0,1)$. Apskaičiuosime X^2 charakteristinę funkciją. Pirmiausia rasime jo pasiskirstymo funkciją. $P(X^2 < x) = 0$, kai $x \le 0$, ir

$$P(X^2 < x) = P(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-u^2/2} du =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} \frac{e^{-v/2}}{\sqrt{v}} dv,$$

kai $x > 0$. Pakeitėme $u^2 = v$. Todėl X^2 charakteristinė funkcija yra

$$f_{X^2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-(1-2it)x/2} dx.$$

Po pakeitimo $x = y^2$ gauname

$$f_{X^2}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2(1-2it)/2} dy.$$

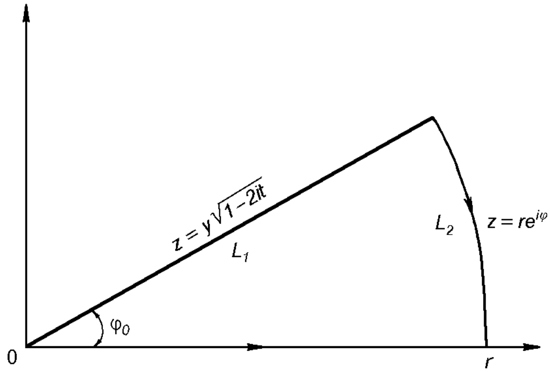
Dar kartą keičiame kintamąjį $z = y(1-2it)^{1/2}$; čia imame pagrindinę šaknies reikšmę (t. y. 1, kai $t = 0$). Gauname

$$f_{X^2}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(1-2it)}} \int e^{-z^2/2} dz; \tag{8}$$

čia integruojama (žr. 27 pav.) nuo 0 spinduliu $z = y(1-2it)^{1/2}$. Pažymėsime L_1 spindulio $z = y(1-2it)^{1/2}$ dalį, kai $0 \le y \le r$, o L_2 – lanką $z = r\exp(i\varphi)$ tarp realiosios ašies ir L_1. Funkcija $\exp(-z^2/2)$ yra sveikoji. Todėl pagal Koši teoremą

$$\int_{L_1} + \int_{L_2} e^{-z^2/2} dz = \int_0^r e^{-z^2/2} dz. \tag{9}$$

Dešiniosios pusės integralas yra imamas realiosios ašies atkarpa.



27 pav.

Įvertinsime antrąjį integralą

$$\Big|\int_{L_2} e^{-z^2/2} dz\Big| \le \frac{1}{4}\pi r \sup_{z \in L_2} |e^{-z^2/2}| = \frac{1}{4}\pi r \sup |e^{-1/2 r^2 e^{2i\varphi}}| =$$
$$= \frac{1}{4}\pi r \sup e^{-1/2 r^2 \cos 2\varphi} \le \frac{1}{4}\pi r e^{-1/2 r^2 \cos 2\varphi_0};$$

čia $\varphi_0 = \arg\sqrt{1-2it}$, $|\varphi_0| < \pi/4$.

Pastarasis reiškinys konverguoja į nulį, kai $r \to \infty$.

Todėl, perėję prie ribos (9) lygybėje, kai $r \to \infty$, iš (8) gauname

$$f_{X^2}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(1-2it)}} \int_0^\infty e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{1-2it}}.$$

9. APVERTIMO IR VIENATIES TEOREMOS

Kiekvieną pasiskirstymo funkciją atitinka viena charakteristinė funkcija. Įrodysime, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys. Kartu bus pateisintas ir charakteristinės funkcijos terminas.

1 lema. *Visiems realiesiems x*

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Į r o d y m a s. Iš 8 skyrelio lemos, kai $n = 0$, išplaukia

$$|e^{ix} - 1| \leq |x|.$$

Kadangi bet kuriam kompleksiniam skaičiui z visada $|\mathrm{Im}\ z| \leq |z|$, tai

$$|\mathrm{Im}\ (e^{ix} - 1)| \leq |x|,$$

arba

$$|\sin x| \leq |x|. \ \square$$

2 lema. *Visiems kompleksiniams z*

$$|e^z - 1| \leq |z| e^{|z|}.$$

Į r o d y m a s niekuo nesiskiria nuo I.15.2 lemos įrodymo. $\square$

3 lema. *Jei α ir T yra realieji skaičiai,*

$$I(T, \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{\sin \alpha t}{t} dt,$$

tai

$$|I(T, \alpha)| \leq 2 \tag{1}$$

ir

$$I(T, \alpha) \to \operatorname{sgn} \alpha, \tag{2}$$

kai $T \to \infty$, tolygiai visiems α, $|\alpha| \geq \delta$, kai δ – fiksuotas teigiamas skaičius.

Į r o d y m a s. Pakeitę integrale $I(T, \alpha)$ kintamąjį t nauju kintamuoju t/α, gauname

$$I(T, \alpha) = I(T\alpha, 1). \tag{3}$$

Taip pat aišku, kad

$$I(-T,1) = -I(T,1). \tag{4}$$

Tirsime integralą $I(T,1)$, kai $T > 0$. Pažymėję

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}dt = (-1)^k\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{k\pi + t}dt,$$
$$r(T) = \frac{2}{\pi}\int_{[T/\pi]\pi}^{T}\frac{\sin t}{t}dt,$$

turime

$$I(T,1) = \sum_{k=0}^{[T/\pi]-1} c_k + r(T).$$

Skaičių c_k ženklai eina pakaitomis, o jų absoliutusis didumas mažėja. Iš čia ir iš Leibnico[1] kriterijaus išplaukia, kad integralas

$$J = \int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \lim_{T\to\infty} I(T,1)$$

egzistuoja. Dydis $r(T)$ yra teigiamas, kai $[T/\pi]$ lyginis, ir neigiamas, kai $[T/\pi]$ nelyginis. Todėl lyginiams $[T/\pi]$

$$\sum_{k=0}^{[T/\pi]-1} c_k \le I(T,1) \le \sum_{k=0}^{[T/\pi]} c_k,$$

o nelyginiams $[T/\pi]$

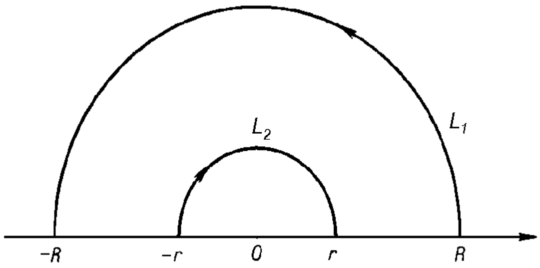
$$\sum_{k=0}^{[T/\pi]} c_k \le I(T,1) \le \sum_{k=0}^{[T/\pi]-1} c_k.$$

Iš čia $0 \le I(T,1) \le c_0 \le 2$, nes pagal 1 lemą

$$c_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}dt = 2.$$

[1] Gotfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) – vokiečių matematikas.

Iš (3) ir (4) lygybių išplaukia, kad visada teisinga (1) nelygybė. Jei įrodytume lygybę $J = 1$, tai iš (3) ir (4) gautume, kad teisingas (2) teiginys ir teiginys apie tolygų konvergavimą.



28 pav.

Integralą J galime apskaičiuoti įvairiais būdais. Remsimės kompleksinio kintamojo funkcijų integralais. Imkime integralą

$$\int_L \frac{e^{iz}}{z} dz,$$

paimtą kontūru L (žr. 28 pav.), sudarytu iš realiosios ašies atkarpos nuo $z = r$ iki $z = R$ (čia $0 < r < R$), pusapskritimio L_1 su spinduliu R ir centru taške 0, vėl realiosios ašies atkarpos nuo $z = -R$ iki $z = -r$ ir pagaliau pusapskritimio L_2 su spinduliu r ir centru taške 0. Pointegralinė funkcija yra analizinė tuo kontūru apribotoje srityje ir ant kontūro. Todėl

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \tag{5}$$

Pirmasis ir trečiasis integralai kartu yra lygūs

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

Parodysime, kad antrasis integralas konverguoja į nulį, kai $R \to \infty$. Paėmę mažą teigiamą skaičių δ, turime

$$\Big| \int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \Big| = \Big| i \int_0^\pi e^{iRe^{i\varphi}} d\varphi \Big| \le \int_0^\pi e^{-R\sin\varphi} d\varphi \le$$
$$\le \int_0^\delta d\varphi + \int_\delta^{\pi-\delta} e^{-R\sin\varphi} d\varphi + \int_{\pi-\delta}^\pi d\varphi < 2\delta + \pi e^{-R\sin\delta}.$$

Lieka ištirti ketvirtąjį integralą. Jį užrašysime pavidalu

$$\int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{L_2} \frac{e^{iz}-1}{z} dz + \int_{L_2} \frac{dz}{z}.$$

Pagal 2 lemą

$$\Big| \int_{L_2} \frac{e^{iz}-1}{z} dz \Big| \le \pi r e^r.$$

Kitas integralas

$$\int_{L_2} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{0} i d\varphi = \pi i.$$

Iš (5), kai $R \to \infty$, išplaukia, kad $J = 1$. □

1 teorema. *Jei F yra pasiskirstymo funkcija, f – jos charakteristinė funkcija, a ir b – bet kurie realieji skaičiai, tai*

$$\frac{F(b+0)+F(b)}{2} - \frac{F(a+0)+F(a)}{2} = \\ = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} f(t)dt.$$

P a s t a b a. Pointegralinė funkcija φ taške $t = 0$ nėra apibrėžta, ją galima apibrėžti bet kaip, pavyzdžiui, imti $\varphi(0) = \lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = b - a$. Tada φ bus apibrėžta ir tolydi visoje realiųjų skaičių tiesėje. Kiekvienam baigtiniam T integralas yra paprastas Rymano[1] integralas. Jei netiesioginis Rymano integralas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = \lim_{\substack{T_1\to-\infty \\ T_2\to\infty}} \int_{T_1}^{T_2} \varphi(t)dt$$

egzistuoja ir yra baigtinis, tai

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt.$$

Tačiau riba kairėje lygybės pusėje gali egzistuoti ir būti baigtinė net tada, kai dešinės pusės netiesioginis integralas neegzistuoja. Tada kalbame apie integralą Koši prasme. Taip yra ir su integralu apvertimo formulėje, apie kurią kalbama teoremos formuluotėje. Tačiau ją galima užrašyti ir su netiesioginiu integralu:

$$\frac{F(b+0)+F(b)}{2} - \frac{F(a+0)+F(a)}{2} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \mathrm{Re}\, \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it} f(t)dt.$$

[1] Bernhard Riemann (1826–1866) – vokiečių matematikas.

Šią formulę gauname šitokiu būdu. Prisiminę, kad $f(-t) = \bar{f}(t)$, turime

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} f(t)dt = \int_{-T}^{0} + \int_{0}^{T} =$$
$$= \int_{0}^{T} \Big(\frac{e^{iat} - e^{ibt}}{-it} f(-t) + \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} f(t) \Big) dt =$$
$$= 2\int_{0}^{T} \mathrm{Re}\, \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} f(t)dt.$$

Į r o d y m a s. Pakanka tirti tik atvejį, kai $a < b$. Teigiamiems T pažymėkime

$$J(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} f(t)dt.$$

Išreiškę charakteristinę funkciją pasiskirstymo funkcija F, gauname

$$J(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dF(x) \Big) dt.$$

Sukeisime integravimo tvarką:

$$J(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt \Big) dF(x).$$

Kadangi pagal 8 skyrelio lemą

$$\Big| \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} \Big| = \Big| \frac{e^{it(b-a)} - 1}{it} \Big| \le b - a$$

ir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-T}^{T} (b-a)dt \Big) dF(x) = 2T(b-a),$$

tai integravimo ribų sukeitimas yra galimas pagal Fubinio teoremą. Pasinaudoję Oilerio[1] formule, gauname

$$\frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} =$$
$$= \frac{\cos t(x-a) - \cos t(x-b)}{it} + \frac{\sin t(x-a) - \sin t(x-b)}{t}.$$

Pirmasis dešinės pusės narys yra nelyginė t funkcija, antrasis – lyginė. Todėl

[1] Leonhard Euler (1707–1783) – šveicarų kilmės matematikas.

$$J(T) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_0^T \frac{\sin t(x-a) - \sin t(x-b)}{t}dt\Big)dF(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\big(I(T, x-a) - I(T, x-b)\big)dF(x);$$

čia vartojame 3 lemos žymėjimą. Pereisime prie ribos, kai $T \to \infty$. Pagal 3 lemą

$$|I(T, x-a) - I(T, x-b)| \le 4.$$

Todėl pagal V.9.16 teoremą galime pereiti prie ribos po integralo ženklu. Gauname

$$\lim_{T\to\infty} J(T) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\big(I(T, x-a) - I(T, x-b)\big)dF(x).$$

Iš 3 lemos išplaukia, kad $\lim\limits_{T\to\infty}\big(I(T, x-a) - I(T, x-b)\big)$ yra

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} - \Big(-\frac{1}{2}\Big) &= 0, \text{ kai } x < a,\\
0 - \Big(-\frac{1}{2}\Big) &= \frac{1}{2}, \text{ kai } x = a,\\
\frac{1}{2} - \Big(-\frac{1}{2}\Big) &= 1, \text{ kai } a < x < b,\\
\frac{1}{2} - 0 &= \frac{1}{2}, \text{ kai } x = b,\\
\frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= 0, \text{ kai } x > b.
\end{aligned}$$

Todėl

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} J(T) &= \int_{(-\infty,a)} 0 + \int_{\{a\}} \frac{1}{2} +\\
&+ \int_{(a,b)} 1 + \int_{\{b\}} \frac{1}{2} + \int_{(b,\infty)} 0\ dF(x) =\\
&= \frac{1}{2}\big(F(a+0) - F(a)\big) + F(b) -\\
&- F(a+0) + \frac{1}{2}\big(F(b+0) - F(b)\big). \ \square
\end{aligned}$$

Jei a ir b yra funkcijos F tolydumo taškai, tai apvertimo formulė virsta šitokia:

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it}f(t)dt.$$

2 (vienaties) teorema. *Jei dvi pasiskirstymo funkcijos turi tą pačią charakteristinę funkciją, tai jos sutampa.*

Į r o d y m a s. Iš 1 teoremos išplaukia, kad charakteristinė funkcija vienareikšmiškai nusako pasiskirstymo funkcijos F pokytį tarp dviejų jos tolydumo taškų: $F(b) - F(a)$. Kaip žinome, pasiskirstymo funkcijos trūkio taškų aibė yra baigtinė arba skaiti. Tarkime, kad a tolsta į $-\infty$, prabėgdamas tik F tolydumo taškus. Gauname, kad funkcijos F reikšmė yra vienareikšmiškai nusakyta kiekviename jos tolydumo taške b. Tačiau F yra tolydi iš kairės. Todėl vienareikšmiškai gauname jos reikšmes ir trūkio taškuose. Reikia tik, kad b konverguotų į trūkio tašką iš kairės. □

Atkreipsime dėmesį, kad dviejų skirtingų pasiskirstymo funkcijų charakteristinės funkcijos gali sutapti baigtiniame intervale (žr., pvz., [30], p. 271).

3 teorema. *Jei charakteristinė funkcija f yra integruojama Lebego prasme visoje tiesėje R, tai ją atitinkanti pasiskirstymo funkcija F turi aprėžtą ir tolydžią išvestinę ir visiems $x \in R$*

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)dt.$$

Į r o d y m a s. Kadangi f yra integruojama funkcija, tai egzistuoja Lebego integralas

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt} - e^{-i(x+h)t}}{it} f(t)dt,$$

nes pointegralinės funkcijos modulis

$$\Big| \frac{1 - e^{-iht}}{it} f(t) \Big| \leq |f(t)| \, |h|.$$

Todėl pagal 1 teoremą

$$\begin{aligned} &\frac{F(x+h+0) + F(x+h)}{2} - \frac{F(x+0) - F(x)}{2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt} - e^{-i(x+h)t}}{it} f(t)dt, \end{aligned} \tag{6}$$

nes apvertimo formulės dešinės pusės integralą pagal V.9.16 teoremą galima užrašyti tuo pavidalu. Be to, pagal tą pačią teoremą galima pereiti prie ribos po integralo ženklu, kai $h \to 0$. Gauname, kad $F(x+0) - F(x) = 0$. Vadinasi, funkcija F yra tolydi kiekviename taške $x \in R$. Dabar (6) formulę užrašome pavidalu

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt} - e^{-i(x+h)t}}{ith} f(t)dt.$$

Tuo pačiu būdu įrodome, kad galime pereiti prie ribos po integralo ženklu, kai $h \to 0$. Gauname

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-iht}}{ith} dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt.$$

F' tolydumą įrodome vėl tuo pačiu būdu. Perėję prie ribos, kai $h \to 0$, po integralo ženklu lygybėje

$$F'(x+h) - F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}(e^{iht}-1) f(t) dt,$$

gauname, kad $F'(x+h) - F'(x) \to 0$, kai $h \to 0$. □

4 teorema. *Jei F yra pasiskirstymo funkcija, o f – ją atitinkanti charakteristinė funkcija, tai kiekvienam realiajam x*

$$F(x+0) - F(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-ixt} f(t) dt.$$

Į r o d y m a s analogiškas 1 teoremos įrodymui. Detalizuoti jį paliekame skaitytojui. □

Pateiksime keletą vienaties teoremos taikymų.

Dažnai tenka rasti dviejų nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos pasiskirstymo funkciją, kai žinomos dėmenų pasiskirstymo funkcijos. Tai galime gauti ir be charakteristinių funkcijų metodo. Tarkime, kad dydžiai X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcijomis F_X ir F_Y. Samprotaudami analogiškai, kaip ir II.7.1 teoremos įrodyme, gauname

$$F_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) dF_Y(y).$$

Lygybės

$$F_{X+Y}(z) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{\omega: X(\omega)+Y(\omega)<z\}}(\omega) P(d\omega) =$$
$$= \int\int_{R^2} \mathbf{1}_{\{(x,y): x+y<z\}}(x,y) P_{(X,Y)}(dx, dy)$$

paskutinis integralas pagal Fubinio teoremą lygus

$$
\begin{aligned}
&\int_R \Big(\int_R \mathbf{1}_{\{(x,y):x+y<z\}}(x,y) P_X(dx) \Big) P_Y(dy) = \\
(7) \qquad &= \int_R \Big(\int_{(-\infty, z-y)} P_X(dx) \Big) P_Y(dy) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) P_Y(dy).
\end{aligned}
$$

Integralą

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-y)dF(y),$$

jei jis egzistuoja, vadiname funkcijų F ir G *sąsūka* ir žymime $F*G = F*G(x)$. Tas integralas egzistuoja, kai F ir G yra pasiskirstymo funkcijos.

Jei X yra absoliučiai tolydus ir p_X yra jo tankio funkcija, tai, remiantis Fubinio teorema,

$$
\begin{aligned}
F_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y)dF_Y(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{z-y} p_X(x)dx \Big) dF_Y(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{z} p_X(x-y)dx \Big) dF_Y(y) = \\
&= \int_{-\infty}^{z} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x-y)dF_Y(y) \Big) dx;
\end{aligned}
$$

vadinasi, suma $X+Y$ yra absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis ir jo tankio funkciją galime laikyti lygia

$$p_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x-y)dF_Y(y).$$

Jei ir Y yra absoliučiai tolydus su tankio funkcija p_Y, tai sumos tankio funkcija galime laikyti

$$p_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x-y)p_Y(y)dy.$$

1 p a v y z d y s. Tarkime, kad nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 yra atitinkamai pasiskirstę pagal normaliuosius dėsnius $N(a_1, \sigma_1^2)$ ir $N(a_2, \sigma_2^2)$. Tų dydžių charakteristinės funkcijos pagal 8.4 pavyzdį yra

$$f_{X_1}(t) = e^{ia_1 t - \sigma_1^2 t^2/2}, \; f_{X_2}(t) = e^{ia_2 t - \sigma_2^2 t^2/2},$$

o jų sumos charakteristinė funkcija pagal 8.5 teoremą yra

$$f_{X_1+X_2}(t) = e^{i(a_1+a_2)t-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}.$$

Iš vienaties teoremos išplaukia, kad suma $X_1 + X_2$ yra taip pat pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį, būtent, $N\big(a_1 + a_2, (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}\big)$.

Šį teiginį galėjome ir kitaip įrodyti. Reikėjo suskaičiuoti integralą

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{(x-y-a_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}\Big\}dy.$$

Carakteristinių funkcijų metodas yra paprastesnis.

H. Krameras[1] (žr. [21]) įrodė atvirkštinę teoremą: jei dviejų nepriklausomų neišsigimusių atsitiktinių dydžių X_1, X_2 suma $X_1 + X_2$ yra pasiskirsčiusi pagal normalųjį dėsnį, tai ir dėmenys X_1, X_2 yra pasiskirstę pagal normaliuosius dėsnius.

Sakome, kad atsitiktinis dydis yra išsigimęs, jei jis su tikimybe 1 lygus konstantai. Žinoma, išsigimusį pasiskirstymą galima būtų laikyti normaliojo pasiskirstymo atskiru atveju, bet tai ne visada patogu.

2 p a v y z d y s. Jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 yra pasiskirstę atitinkamai pagal Puasono dėsnius su parametrais λ_1 ir λ_2, tai pagal 8.3 pavyzdį ir 8.5 teoremą

$$f_{X_1+X_2}(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}.$$

Iš vienaties teoremos išplaukia, kad suma $X_1 + X_2$ taip pat pasiskirsčiusi pagal Puasono dėsnį, kurio parametras yra $\lambda_1 + \lambda_2$.

Čia galėjome taikyti (7) formulę. Vargo būtų buvę daugiau.

D. Raikovas[2] (žr. [21]) įrodė atvirkštinę teoremą: jei dviejų nepriklausomų neišsigimusių atsitiktinių dydžių X_1, X_2 suma $X_1 + X_2$ yra pasiskirsčiusi pagal Puasono dėsnį, tai dydžiai X_1, X_2 yra taip pat pasiskirstę pagal Puasono dėsnius.

3 p a v y z d y s. Imkime nepriklausomus atsitiktinius dydžius $X_1, ..., X_n$, pasiskirsčiusius pagal normalųjį dėsnį $N(0, 1)$. Rasime atsitiktinio dydžio

$$\chi_n^2 = X_1^2 + ... + X_n^2$$

pasiskirstymą. Jis vadinamas χ^2 su n laisvės laipsnių pasiskirstymu ir vaidina svarbų vaidmenį matematinėje statistikoje.

8.5 pavyzdyje radome dydžio X_k^2 charakteristinę funkciją. Ji yra lygi $(1 - -2it)^{-1/2}$. Todėl χ_n^2 charakteristinė funkcija yra $(1 - 2it)^{-n/2}$.

Imkime pasiskirstymo funkciją

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0, \\ 2^{-n/2}\Gamma^{-1}\Big(\dfrac{n}{2}\Big)\displaystyle\int_0^x u^{n/2-1}e^{-u/2}du, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$$

Apskaičiuosime jos charakteristinę funkciją

---

[1] Harold Cramér (1893–1985) – švedų matematikas.

[2] Dmitrijus Raikovas (g. 1905 m.) – rusų matematikas.

$$f(t) = 2^{-n/2}\Gamma^{-1}\Big(\frac{n}{2}\Big)\int_0^{\infty} x^{n/2-1}e^{-(1-2it)x/2}dx.$$

Po pakeitimo $z = (1-2it)x/2$ turime

$$f(t) = \Gamma^{-1}\Big(\frac{n}{2}\Big)(1-2it)^{-n/2}\int z^{n/2-1}e^{-z}dz; \tag{8}$$

čia integruojama kompleksinėje plokštumoje spinduliu $z = (1-2it)x/2$. Apskaičiuosime integralą tuo pačiu būdu, kaip ir 8.5 pavyzdyje. Pažymėkime L_1 spindulio $z = (1-2it)x/2$ dalį, kai $0 \le x \le r$, o L_2 – lanką $z = r\exp(i\varphi)$ tarp realiosios ašies ir L_1. Funkcija $\exp(z)$ yra sveikoji. Todėl pagal Koši teoremą

$$\int_{L_1} + \int_{L_2} z^{n/2-1}e^{-z}dz = \int_0^r z^{n/2-1}e^{-z}dz. \tag{9}$$

Dešinės pusės integralas yra imamas realiosios ašies atkarpa nuo 0 iki r. Įvertinsime kairės pusės antrąjį integralą:

$$\Big|\int_{L_2} z^{n/2-1}e^{-z}dz\Big| \le \frac{1}{2}\pi r \sup_{z\in L_2}|z^{n/2-1}e^{-z}| =$$
$$= \frac{1}{2}\pi r^{n/2}\sup|e^{-re^{i\varphi}}| = \frac{1}{2}\pi r^{n/2}\sup e^{-r\cos\varphi} \le \frac{1}{2}\pi r^{n/2}e^{-r\cos\varphi_0}.$$

Pastarasis reiškinys konverguoja į nulį, kai $r\to\infty$, nes

$$\varphi_0 = \arg(1-2it),\ |\varphi_0| < \frac{\pi}{2}.$$

Todėl, perėję prie ribos (9) lygybėje, kai $r\to\infty$, iš (8) gauname

$$f(t) = (1-2it)^{-n/2}.$$

Iš 2 teoremos išplaukia išvada, kad F yra χ_n^2 pasiskirstymo funkcija.

4 pavyzdys. Pasinaudoję 3 pavyzdžiu, rasime labai svarbų matematinėje statistikoje Stjudento pasiskirstymą. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X, X_1, ..., X_n$ yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal $N(0,1)$. Tada atsitiktinio dydžio

$$t = \frac{X}{Y} = \frac{X}{\sqrt{(X_1^2 + ... + X_n^2)/n}}$$

pasiskirstymas yra vadinamas *Stjudento*[1] *pasiskirstymu su n laisvės laipsnių*. Pirmiausia apskaičiuosime atsitiktinio dydžio Y pasiskirstymą. Turime

$$P(Y < x) = P(\chi_n^2 < nx^2).$$

Iš 3 pavyzdžio išplaukia, kad ši pasiskirstymo funkcija lygi 0, kai $x \le 0$, ir lygi

[1] Student – anglų statistiko William Sealy Gosset (1876–1937) slapyvardis.

$$2^{-n/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^{nx^2} v^{n/2-1}e^{-v/2}dv,$$

kai $x > 0$. Po kintamojo pakeitimo $u = (v/n)^{1/2}$ antruoju atveju gauname

$$P(Y < x) = A_n \int_0^x u^{n-1}e^{-nu^2/2}du;$$

čia

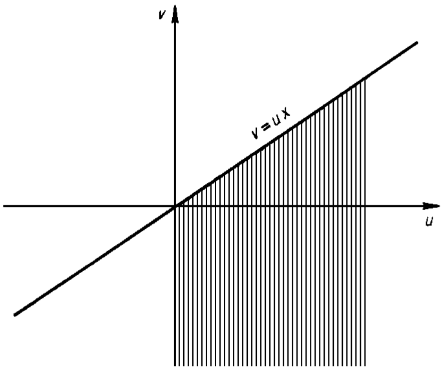
$$A_n = 2^{-n/2+1}n^{n/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right).$$

Atsitiktinio dydžio t pasiskirstymo funkcija

$$S_n(x) = P(t < x) = P\left(\frac{X}{Y} < x\right) = \int\int_{\substack{u>0\\ v/u<x}} P_{(X,Y)}(du, dv)$$

(integravimo sritį žr. 29 pav.). Kadangi atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai

$$S_n(x) = \int\int_{\substack{u>0\\ v/u<x}} u^{n-1}e^{-(v^2+nu^2)/2}dudv.$$



29 pav.

Pakeitę kintamąjį $v = uw$, gauname

$$S_n(x) = (2\pi)^{-1/2}A_n\int\int_{\substack{u>0\\ w<x}} u^n e^{-(n+w^2)u^2/2}dudw.$$

Vėl keičiame kintamąjį: $(n + w^2)u^2/2 = y$. Galutinai gauname

$$S_n(x) = (2\pi)^{-1/2} A_n 2^{(n-1)/2} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{x} (n+w^2)^{-(n+1)/2} dw \int_0^{\infty} y^{(n-1)/2} e^{-y} dy =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^{x} (1+w^2/n)^{-(n+1)/2} dw.$$

5 p a v y z d y s. Matematinėje statistikoje svarbų vaidmenį vaidina ir dviejų nepriklausomų χ^2 santykio pasiskirstymas. Tarkime, kad $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal $N(0,1)$. Rasime atsitiktinio dydžio

$$Z = \frac{X_1^2 + ... + X_n^2}{Y_1^2 + ... + Y_m^2}$$

pasiskirstymą. Jis vadinamas Fišerio[1] *pasiskirstymu su* n *ir* m *laisvės laipsnių*. Kai $x \le 0$, tai $F_Z(x) = 0$. Imkime $x < 0$. Kaip ir 4 pavyzdyje,

$$F_Z(x) = \iint\limits_{\substack{u>0,v>0\\ v/u<x}} p_{\chi_m^2}(u) p_{\chi_n^2}(v) du dv =$$
$$= B_{m,n} \iint\limits_{\substack{u>0,v>0\\ v/u<x}} u^{m/2-1} v^{n/2-1} e^{-(u+v)/2} du dv;$$

čia

$$B_{m,n} = 2^{-(n+m)/2} \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{m}{2}\right).$$

Po pakeitimo $v = uw$ turime

$$F_Z(x) = B_{m,n} \int_0^x w^{n/2-1} dw \int_0^{\infty} u^{(n+m)/2-1} e^{-(1+w)u} du =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)} \int_0^x w^{n/2-1} (1+w)^{-(n+m)/2} dw.$$

10. TOLYDUMO TEOREMA

Ankstesniame skyrelyje įrodėme, kad tarp pasiskirstymo funkcijų ir charakteristinių funkcijų yra abipus vienareikšmė atitiktis. Dabar mūsų tikslas – parodyti, kad ta atitiktis tam tikra prasme tolydi, t. y. iš pasiskirstymo funkcijų

[1] Ronald Alymer Fisher (1890–1962) – anglų statistikas.

silpno konvergavimo į pasiskirstymo funkciją išplaukia tas pasiskirstymo funkcijas atitinkančių charakteristinių funkcijų konvergavimas į ribinės funkcijos charakteristinę funkciją, ir atvirkščiai. Tiksliau tas teiginys yra nusakytas 1 ir 2 teoremose.

1 teorema. *Jei pasiskirstymo funkcijų seka* F_n $(n = 1, 2, ...)$ *konverguoja į pasiskirstymo funkciją* F *jos tolydumo taškuose, tai atitinkamų charakteristinių funkcijų seka* f_n $(n = 1, 2, ...)$ *konverguoja į funkcijos* F *charakteristinę funkciją. Tas konvergavimas yra tolygus kiekviename baigtiniame intervale.*

Į r o d y m a s. Teiginys apie charakteristinių funkcijų f_n konvergavimą išplaukia iš 7.5 Helio–Brėjaus teoremos (ją taikome atskirai realiosioms ir menamosioms integralų dalims). Truputį pakeitę 7.5 teoremos įrodymą, galime parodyti, kad konvergavimas yra tolygus (tai paliekame skaitytojui). □

Atkreipsime dėmesį, kad teoremos teiginys gali būti neteisingas, kai ribinė funkcija F yra bet kuri nemažėjanti, tačiau ne pasiskirstymo funkcija. Imkime seką pasiskirstymo funkcijų

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le n, \\ 1, & \text{kai } x > n. \end{cases}$$

Kiekvienam baigtiniam x seka $F_n(x)$ konverguoja į $F(x) \equiv 0$, bet atitinkamų charakteristinių funkcijų seka $f_n(t) = \exp(int)$ nekonverguoja į jokią ribą, išskyrus taškus $t = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$.

Išvada. *Jei charakteristinių funkcijų seka* f_n $(n = 1, 2, ...)$ *konverguoja į charakteristinę funkciją* f *ir realiųjų skaičių seka* u_n $(n = 1, 2, ...)$ *konverguoja į baigtinį skaičių* u*, tai* $f_n(u_n)$ *konverguoja į* $f(u)$.

Į r o d y m a s. Teiginys išplaukia iš nelygybės

$$|f_n(u_n) - f(u)| \le |f_n(u_n) - f(u_n)| + |f(u_n) - f(u)|,$$

1 teoremos ir charakteristinės funkcijos $f(t)$ tolydumo. □

2 teorema. *Jei charakteristinių funkcijų seka* f_n $(n = 1, 2, ...)$ *visoms argumento reikšmėms konverguoja į kokią nors funkciją* f*, tolydžią nuliniame taške, tai atitinkamų pasiskirstymo funkcijų seka* F_n $(n = 1, 2, ...)$ *konverguoja į pasiskirstymo funkciją* F *jos tolydumo taškuose. Tada funkcija* f *yra* F *charakteristinė funkcija.*

Į r o d y m a s. Remdamiesi 7.4 Helio kompaktiškumo teorema, išskirsime iš sekos $\{F_n\}$ posekį $\{F_{n_k}\}$, konverguojantį į kokią nors nemažėjančią funkciją F jos tolydumo taškuose. Aišku, $0 \le F(-\infty) \le F(\infty) \le 1$. Tarkime, kad

$$\delta = F(\infty) - F(-\infty) < 1.$$

Imkime kokį nors skaičių ε su sąlyga $0 < \varepsilon < 1 - \delta$. Kadangi $f_{n_k} \to f$, tai $f(0) = 1$. Iš f tolydumo taške $t = 0$ išplaukia, kad galima parinkti pakankamai mažą $\tau > 0$, tenkinantį sąlygą

$$\frac{1}{2\tau}\Big|\int_{-\tau}^{\tau} f(t)dt\Big| > 1-\varepsilon/2. \tag{1}$$

Įvertinsime tą reiškinį kitaip. Pakeitę integravimo tvarką, turime

$$\int_{-\tau}^{\tau} f_{n_k}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}dt\Big)dF_{n_k}(x).$$

Iš čia bet kuriam $a > 4(\tau\varepsilon)^{-1}$

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f_{n_k}(t)dt\Big| &\le \frac{1}{2\tau}\int_{-a\le x<a}\Big|\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}dt\Big|dF_{n_k}(x)+\\ &+\frac{1}{2\tau}\int_{|x|\ge a}\Big|\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}dt\Big|dF_{n_k}(x) \le\\ &\le F_{n_k}(a)-F_{n_k}(-a)+\frac{1}{2\tau}\int_{|x|\ge a}\Big|\frac{2\sin\tau x}{x}\Big|dF_{n_k}(x) \le\\ &\le F_{n_k}(a)-F_{n_k}(-a)+\frac{1}{\tau a} < F_{n_k}(a)-F_{n_k}(-a)+\frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Kadangi

$$F_{n_k}(a)-F_{n_k}(-a)\to F(a)-F(-a),$$

kai a ir $-a$ yra $F(x)$ tolydumo taškai, tai pakankamai dideliems a ir k

$$F_{n_k}(a)-F_{n_k}(-a) < \delta+\frac{\varepsilon}{4}.$$

Vadinasi,

$$\Big|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f_{n_k}(t)dt\Big| < \delta+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Perėję prie ribos, kai $k\to\infty$, gauname

$$\Big|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)dt\Big| \le \delta+\frac{\varepsilon}{2} < 1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2} = 1-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ši nelygybė prieštarauja (1).

Taigi funkcija F, į kurią konverguoja seka F_{n_k}, yra pasiskirstymo funkcija. Pagal 1 teoremą jos charakteristinė funkcija yra f.

Lieka įrodyti, kad duotoji seka F_n konverguoja į F. Tarkime, kad taip nėra. Tada galima rasti posekį F_{m_k}, konverguojantį į kokią nors kitą funkciją F^*, nelygią F bent viename jos tolydumo taške. Pagal jau įrodytą teoremos dalį funkcijos F^* charakteristinė funkcija būtų f. Tačiau pagal 9.2 vienaties teoremą funkcijos F ir F^* turėtų sutapti. Gautas prieštaravimas rodo, kad prielaida buvo neteisinga. □

Teoremos teiginys gali būti neteisingas, jei ribinė funkcija f nėra tolydi taške $t = 0$. Imkime pasiskirstymo funkcijas

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le -n, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2n}, & \text{kai } -n < x < n, \\ 1, & \text{kai } x \ge n; \end{cases}$$

jų charakteristinės funkcijos yra

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kai } t = 0, \\ \dfrac{\sin nt}{nt}, & \text{kai } t \ne 0. \end{cases}$$

Tada

$$f_n(t) \to f(t) = \begin{cases} 1, & \text{kai } t = 0, \\ 0, & \text{kai } t \ne 0. \end{cases}$$

Ribinė funkcija f nėra tolydi nuliniame taške. Antra vertus, F_n konverguoja į funkciją $F \equiv 1/2$, kuri nėra pasiskirstymo funkcija.

Charakteristinių funkcijų aparatas yra labai naudingas, įrodinėjant įvairias teoremas apie atsitiktinių dydžių pasiskirstymą. Tuo jau galėjome įsitikinti iš ankstesnių skyrelių pavyzdžių. Jis ypač praverčia, tiriant nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų pasiskirstymus. Sakykime, turime nepriklausomų atsitiktinių dydžių seką $X_1, X_2, ...$ ir dvi realiųjų skaičių sekas $A_1, A_2, ...$; $B_1, B_2, ...$, be to, skaičiai $B_n > 0$. Pažymėkime $S_n = X_1 + ... + X_n$. Reikia ištirti normuotų sumų

$$Z_n = B_n^{-1}(S_n - A_n)$$

ribinį pasiskirstymą. Tų sumų pasiskirstymo funkcija yra

$$P(Z_n < x) = F_{X_1} * ... * F_{X_n}(A_n + B_n x).$$

Sąsūkio operacija yra gana sudėtinga, todėl tirti tos lygybės dešiniosios pusės ribinį kitimo pobūdį nėra lengva. Paprasčiau yra apskaičiuoti sumos Z_n charakteristinę funkciją

$$f_{Z_n}(t) = e^{-itA_n/B_n} f_{X_1}\Big(\frac{t}{B_n}\Big) ... f_{X_n}\Big(\frac{t}{B_n}\Big)$$

ir nagrinėti jos kitimą, kai $n \to \infty$. Jei f_{Z_n} konverguoja į kokią nors funkciją f, tolydžią nuliniame taške, tai $P(Z_n < x)$ silpnai konverguoja į atitinkamą pasiskirstymo funkciją.

Paaiškinsime šią idėją paprastu kasdieniniu pavyzdžiu. Jei, sakysime, mums reikia išspręsti uždavinį, kurio sąlygos suformuluotos svetima kalba, ir tą kalbą blogai mokame, tai pirmiausia išsiverčiame sąlygą į gimtąją kalbą, išsprendžiame uždavinį ta kalba, po to atsakymą išverčiame į svetimą kalbą.

Taip elgiamės ir tikimybių teorijoje. Tarp pasiskirstymo funkcijų "kalbos" ir charakteristinių funkcijų "kalbos" yra abipus vienareikšmė atitiktis (to dažnai nėra tarp įprastinių kalbų): vienos kalbos "žodžius" abipus vienareikšmiškai atitinka kitos kalbos "žodžiai" (kiekvieną pasiskirstymo funkciją atitinka viena charakteristinė funkcija, ir atvirkščiai), vienos kalbos "gramatikos" taisykles atitinka kitos kalbos "gramatikos" taisyklės (pasiskirstymo funkcijų sąsūką atitinka charakteristinių funkcijų daugyba; pasiskirstymo funkcijų silpną konvergavimą atitinka charakteristinių funkcijų tam tikras konvergavimas ir t. t.).

Pailiustruosime šį metodą keletu paprastų, bet gana efektyvių pavyzdžių. Mums reikės paprastos lemos.

Lema. *Jei z – kompleksinis skaičius, $|z| \le 1/2$, tai*

$$|\ln(1+z) - z| \le |z|^2.$$

Į r o d y m a s. Iš lygybės

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$$

išplaukia

$$|\ln(1+z) - z| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} \le \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} |z|^k = \frac{|z|^2}{2(1-|z|)} \le |z|^2. \ \square$$

1 p a v y z d y s. Pirmajame skyriuje įrodėme Muavro-Laplaso integralinę teoremą (I.15.2 teorema). Dabar pateiksime gana trumpą ir paprastą tos teoremos įrodymą, pagrįstą charakteristinėmis funkcijomis.

Tirsime Bernulio eksperimentus. Tarkime, kad, atliekant kiekvieną eksperimentą, įvyksta įvykis A su tikimybe p, $0 < p < 1$. Pažymėkime κ_n įvykių A skaičių, atlikus n eksperimentų. 8.2 pavyzdyje buvo parodyta, kad

$$f_{\kappa_n}(t) = (pe^{it} + q)^n;$$

čia $q = 1 - p$. Todėl dydžio

$$Z_n = \frac{\kappa_n - np}{\sqrt{npq}}$$

charakteristinė funkcija

$$\begin{aligned} f_{Z_n}(t) &= f_{\kappa_n}\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right) \exp\left(-\frac{inpt}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \left\{p\ \exp\left(\frac{it}{\sqrt{npq}}\right) + q\right\}^n \exp\left(-\frac{inpt}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \left\{p\ \exp\left(it\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + q\ \exp\left(-it\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right\}^n. \end{aligned}$$

Pažymėję Θ kompleksinį skaičių (ne visada tą patį), kurio modulis ne didesnis kaip 1, pagal 8 skyrelio lemą gauname

$$\begin{aligned}
&p\ \exp\left(it\sqrt{\frac{q}{np}}\right)+q\ \exp\left(-it\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)=\\
&=p\left(1+it\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{qt^2}{2np}+\Theta\frac{|t|^3q^{3/2}}{p^{3/2}n^{3/2}}\right)+\\
&+q\left(1-it\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{pt^2}{2nq}+\Theta\frac{|t|^3p^{3/2}}{q^{3/2}n^{3/2}}\right)=\\
&=1-\frac{t^2}{2n}+\Theta\frac{|t|^3}{n^{3/2}}\left(\frac{q^{3/2}}{p^{1/2}}+\frac{p^{3/2}}{q^{1/2}}\right)=\\
&=1-\frac{t^2}{2n}+R_n.
\end{aligned}$$

Tarkime, kad T – bet koks teigiamas skaičius. Kai n yra pakankamai didelis, $n \geq \geq n_0(T)$, visiems t su sąlyga $|t| \leq T$ teisinga lygybė

$$f_{Z_n}(t)=\exp\left\{n\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}+R_n\right)\right\}.$$

Pagal lemą

$$\begin{aligned}
&\left|n\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}+R_n\right)+\frac{t^2}{2}\right|\leq\\
&\leq\left|n\left\{\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}+R_n\right)+\frac{t^2}{2n}-R_n\right\}\right|+\\
&+n|R_n|\leq n\left|-\frac{t^2}{2n}+R_n\right|^2+n|R_n|\leq\frac{C}{n^{1/2}};
\end{aligned}$$

čia C – teigiamas skaičius, nepriklausantis nuo n. Taigi

$$f_{Z_n}(t)\to e^{-t^2/2},$$

kai $|t| \leq T$. Iš 2 teoremos išplaukia, kad

$$P(Z_n<x)\to\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

2 p a v y z d y s. Nauju metodu įrodysime Puasono teoremą (I.15.4 teorema), šiek tiek ją apibendrindami. Tarkime, kad turime atsitiktinių dydžių serijų seką

$$X_{n_1},\dots,X_{nk_n}\ \ (n=1,2,\dots),$$

kiekvienos serijos dydžiai yra nepriklausomi, be to, kiekvienas iš jų įgyja tik po dvi reikšmes: 0 ir 1 su tikimybėmis

$$P(X_{nk}=1)=p_{nk},\ P(X_{nk}=0)=1-p_{nk}\ (k=1,...,k_n).$$

Padarykime prielaidas, kad

$$\max_{1\le k\le k_n} p_{nk}\to 0,\ \sum_{k=1}^{k_n} p_{nk}\to\lambda,$$

kai $n\to\infty$. Pažymėkime

$$S_n=\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}.$$

Įrodysime, kad

$$P(S_n=k)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ (k=0,1,...).$$

Atsitiktinio dydžio X_{nk} charakteristinė funkcija lygi

$$1+p_{nk}(e^{it}-1),$$

o sumos S_n charakteristinė funkcija

$$f_{S_n}(t)=\prod_{k=1}^{k_n}\{1+p_{nk}(e^{it}-1)\}.$$

Kai n dideli, pagal lemą

$$|\ln\{1+p_{nk}(e^{it}-1)\}-p_{nk}(e^{it}-1)|\le 4p_{nk}^2.$$

Todėl

$$\Big|\ln f_{S_n}(t)-(e^{it}-1)\sum_{k=1}^{k_n}p_{nk}\Big|\le 4\sum_{k=1}^{k_n}p_{nk}^2\le 4\sum_{k=1}^{k_n}p_{nk}\max_{1\le k\le k_n}p_{nk}.$$

Vadinasi,

$$f_{S_n}(t)\to e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

tolygiai visiems t.

Sumos S_n charakteristinę funkciją galime užrašyti šitaip:

$$f_{S_n}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}P(S_n=k)e^{itk}.$$

Iš čia

$$P(S_n=k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_{S_n}(t)e^{-itk}dt=\frac{e^{-\lambda}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\lambda e^{it}-itk}dt+o(1)$$

tolygiai k atžvilgiu. Apskaičiuosime integralą. Išskleidę $\exp(\lambda e^{it})$ laipsnine eilute ir sukeitę integravimą su sumavimu vietomis, gauname

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda e^{it}-itk}dt = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it(l-k)}dt = \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Vadinasi, tolygiai k atžvilgiu

$$P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + o(1).$$

3 p a v y z d y s. Remdamiesi charakteristinėmis funkcijomis, įrodysime 3.3 Chinčino teoremą. Imkime seką nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, \ldots$, turinčių vidurkį a.

Jei f yra kiekvieno iš tų dydžių charakteristinė funkcija, tai normuotos jų sumos

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a$$

charakteristinė funkcija

$$f_{Z_n}(t) = e^{-iat}f^n\Big(\frac{t}{n}\Big).$$

Kadangi atsitiktinis dydis turi vidurkį, tai pagal 8.6 teoremą nulinio taško aplinkoje

$$f(t) = 1 + iat + tr(t);$$

čia $r(t)$ yra funkcija, konverguojanti į nulį, kai $t \to 0$. Kai $|t| \le T$ ir n yra pakankamai didelis, pagal šio skyrelio lemą

$$f_{Z_n}(t) = \exp\left\{ -iat + n\ln\left(1 + \frac{t}{n}\left(ia + r\Big(\frac{t}{n}\Big)\right)\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{ -tr\Big(\frac{t}{n}\Big) + \Theta n\left|\frac{t}{n}\left(ia + r\Big(\frac{t}{n}\Big)\right)\right|^2\right\}.$$

Iš čia

$$f_{Z_n}(t) \to 1,$$

kai $n \to \infty$. Tačiau išsigimusio pasiskirstymo $\varepsilon(x)$ charakteristinė funkcija yra tapati 1. Vadinasi, visur, išskyrus $x = 0$, $P(Z_n < x) \to \varepsilon(x)$, t. y. kiekvienam $\delta > 0$

$$P(|Z_n| \ge \delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

11. CENTRINĖ RIBINĖ TEOREMA

Muavro–Laplaso integralinė teorema yra tik labai specialus bendresnio tikimybių teorijos dėsnio atvejis. Mat, atitinkamai normuotų nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų pasiskirstymo funkcijos konverguoja į normaliąją pasiskirstymo funkciją, kai tie dydžiai tenkina gana bendras sąlygas. Pateiksime klasikinį tokio dėsnio pavyzdį.

1 (Lindebergo[1]) teorema. *Jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X_1, $X_2, \ldots$ turi dispersijas, bent vienas iš jų yra neišsigimęs,*

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} DX_k,\ Z_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - MX_k),$$

$F_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ yra tų dydžių pasiskirstymo funkcijos ir kiekvienam fiksuotam $\tau > 0$

$$B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-MX_k|>\tau B_n} (x - MX_k)^2 dF_k(x) \to 0, \tag{1}$$

kai $n \to \infty$, tai tolygiai x atžvilgiu

$$P(Z_n < x) \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

kai $n \to \infty$.

(1) sąlyga yra vadinama *Lindebergo sąlyga.*

Pažymėję

$$X_{nk} = B_n^{-1}(X_k - MX_k),\ F_{nk}(x) = P(X_{nk} < x)\ (k = 1, \ldots, n),$$

turime

$$MX_{nk} = 0,\ DX_{nk} = B_n^{-2} DX_k,\ \sum_{k=1}^{n} DX_{nk} = 1,$$

$$F_k(x) = P(B_n X_{nk} + MX_{nk} < x) =$$
$$= P\Big(X_{nk} < \frac{x - MX_k}{B_n}\Big) = F_{nk}\Big(\frac{x - MX_k}{B_n}\Big).$$

Tada Lindebergo sąlygą galime užrašyti pavidalu

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\tau} x^2 dF_{nk}(x) \to 0,$$

[1] Jarl Waldemar Lindeberg (1876–1932) – švedų kilmės suomių matematikas.

o teoremos teiginį –

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n} X_{nk} < x\Big) \to \Phi(x).$$

Įrodysime kiek bendresnę teoremą, kurios specialus atvejis bus 1 teorema.

2 teorema. *Sakykime, turime atsitiktinių dydžių serijų seką* $X_{n1}, ..., X_{nk_n}$ $(n = 1, 2, ...)$, *kiekvienos serijos dydžiai yra nepriklausomi ir turi dispersijas, be to,*

$$MX_{nk} = 0 \ (k = 1, ..., k_n), \ \sum_{k=1}^{k_n} DX_{nk} = 1. \tag{2}$$

Pažymėkime dydžio X_{nk} *pasiskirstymo funkciją* $F_{nk}(x)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}.$$

Jei kiekvienam fiksuotam teigiamam τ

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\tau} x^2 dF_{nk}(x) \to 0, \tag{3}$$

kai $n \to \infty$, *tai tolygiai* x *atžvilgiu*

$$P(S_n < x) \to \Phi(x),$$

kai $n \to \infty$.

(3) sąlygą taip pat vadinsime *Lindebergo sąlyga.*

Į r o d y m a s. Pažymėkime f_{nk} dydžio X_{nk} charakteristinę funkciją. Reikės įrodyti, kad visiems realiesiems t

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Imkime bet kokį fiksuotą skaičių $T > 2$. Toliau laikysime $|t| \le T$. Bet kuriam ε, $0 < \varepsilon < 1$, ir $\tau = \varepsilon T^{-3}$ pagal (3) sąlygą egzistuoja toks pakankamai didelis $n_0 = n_0(\varepsilon, T)$, kad

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\tau} x^2 dF_{nk}(x) < \frac{\varepsilon}{2T^4}, \tag{4}$$

kai $n \ge n_0$.

Tirsime charakteristines funkcijas f_{nk}. Kadangi $MX_{nk} = 0$, tai

$$f_{nk}(t) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-itx} - 1 - itx) dF_{nk}(x).$$

Pagal 8 skyrelio lemą

$$|e^{itx} - 1 - itx| \leq \frac{1}{2} t^2 x^2.$$

Todėl

$$|f_{nk}(t) - 1| \leq \frac{1}{2} t^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nk}(x) = \frac{1}{2} t^2 DX_{nk}. \tag{5}$$

Mums pravers ir kitoks to paties reiškinio įvertinimas, kurio ieškodami remsimės (4) įvertinimu. Turime

$$\begin{aligned} &|f_{nk}(t) - 1| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\, t^2 \Big(\int_{|x| \leq \tau} x^2 dF_{nk}(x) + \int_{|x| > \tau} x^2 dF_{nk}(x) \Big) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\, t^2 \Big(\tau^2 \int_{-\infty}^{\infty} dF_{nk}(x) + \frac{\varepsilon}{2T^4} \Big) < \frac{1}{2}\, T^2 \Big(\tau^2 + \frac{\varepsilon}{2T^4} \Big) = \\ &= \frac{T^2}{2} \Big(\frac{\varepsilon^2}{T^6} + \frac{\varepsilon}{2T^4} \Big) < \frac{\varepsilon}{2T^2} < \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Iš (6) išplaukia, kad $f_{nk}(t) \neq 0$, kai $|t| \leq T$. Todėl galime kalbėti apie $f_{nk}(t)$ ir $\varphi_n(t)$ logaritmus. Imame jų pagrindines reikšmes. Iš (2) gauname

$$\begin{aligned} &\Big| \ln \varphi_n(t) + \frac{t^2}{2} \Big| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_n} \Big| \ln \Big[1 + \big(f_{nk}(t) - 1 \big) \Big] - \big(f_{nk}(t) - 1 \big) \Big| + \\ &+ \sum_{k=1}^{k_n} \Big| f_{nk}(t) - 1 + \frac{t^2}{2} DX_{nk} \Big| = R_{n1} + R_{n2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Dydį R_{n1} įvertinsime, remdamiesi 10 skyrelio lema ir (6), (5) bei (2) sąryšiais. Gausime

$$\begin{aligned} R_{n1} &\leq \sum_{k=1}^{k_n} |f_{nk}(t) - 1|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2T^2} \sum_{k=1}^{k} |f_{nk}(t) - 1| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2T^2} \cdot \frac{1}{2}\, T^2 \sum_{k=1}^{k_n} DX_{nk} = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dabar įvertinsime dydį R_{n2}

$$R_{n2}=\sum_{k=1}^{k_n}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{itx}-1-itx+\frac{1}{2}t^2x^2\Big)dF_{nk}(x)\Big|.$$

Iš 8 skyrelio lemos išplaukia nelygybės

$$\Big|e^{itx}-1-itx+\frac{1}{2}t^2x^2\Big|\le|e^{itx}-1-itx|+\frac{1}{2}t^2x^2\le t^2x^2,$$
$$\Big|e^{itx}-1-itx+\frac{1}{2}t^2x^2\Big|\le\frac{1}{6}|tx|^3.$$

Pirmąją nelygybę taikome integravimo sričiai $|x|>\tau$, antrąją – likusiai integravimo sričiai $|x|\le\tau$. Iš (2) ir (4) gauname

$$\begin{aligned}R_{n2}&\le\sum_{k=1}^{k_n}\Big(\frac{|t|^3}{6}\int_{|x|\le\tau}|x|^3dF_{nk}(x)+\\&+t^2\int_{|x|>\tau}x^2dF_{nk}(x)\Big)\le\\&\le\frac{T^3\tau}{6}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\le\tau}x^2dF_{nk}(x)+T^2\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau}x^2dF_{nk}(x)<\\&<\frac{T^3\tau}{6}\sum_{k=1}^{k_n}DX_{nk}+T^2\cdot\frac{\varepsilon}{2T^4}=\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{2T^2}<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}\tag{9}$$

Įrašę (8) ir (9) į (7), gauname

$$\Big|\ln\varphi_n(t)+\frac{t^2}{2}\Big|<\varepsilon,$$

kai $n\ge n_0$, $|t|\le T$. Remdamiesi 10.2 teorema, gausime įrodomąjį teiginį, jei pastebėsime, kad konvergavimo tolydumas išplaukia iš normaliojo pasiskirstymo tolydumo ir 7.7 teoremos. □

Lindebergo sąlyga nėra būtina, kad teoremoje nusakytų atsitiktinių dydžių sumos turėtų ribinį normalųjį pasiskirstymą. Imkime atsitiktinius dydžius $X_{n1}=Y$, $X_{n2}=...=X_{nk_n}=0$. Tarkime, kad Y yra pasiskirstęs pagal $N(0,1)$. Aišku, 2 teoremos visos sąlygos bus patenkintos, išskyrus Lindebergo sąlygą, nors

$$P(S_n<x)=\Phi(y).$$

Antra vertus, kiekvienam $\tau>0$ iš nelygybių

$$\max_{1\le k\le k_n} P(|X_{nk}|\ge\tau)\le\sum_{k=1}^{k_n}P(|X_{nk}|\ge\tau)=$$
$$=\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\ge\tau}dF_{nk}(x)\le\frac{1}{\tau^2}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\ge\tau}x^2dF_{nk}(x)$$

ir iš Lindebergo sąlygos išplaukia

(10) $$\max_{1\le k\le k_n} P(|X_{nk}|\ge\tau)\to 0.$$

Atsitiktiniai dydžiai, tenkinantys (10) sąlygą, vadinami *nykstamais*. Taigi, jei dydžiai X_{nk} $(k=1,...,k_n)$ tenkina Lindebergo sąlygą, tai jie yra nykstami.

Lindebergo sąlyga yra būtina, kad nykstamų atsitiktinių dydžių, tenkinančių (2) sąlygą, sumos turėtų ribinį normalųjį pasiskirstymą.

3 (Felerio[1]) teorema. *Sakykime, turime atsitiktinių dydžių serijų seką* $X_{n1},...,X_{nk_n}(n=1,2,...)$, *kiekvienos serijos dydžiai yra nepriklausomi, turi dispersijas ir tenkina 2 teoremos* (2) *sąlygą. Pažymėkime* $S_n=X_{n1}+...+$ $+X_{nk_n}$. *Jei atsitiktiniai dydžiai* X_{nk} *yra nykstami ir*

$$P(S_n<x)\to\Phi(x),$$

tai teisinga (3) *Lindebergo sąlyga.*

Į r o d y m a s. Vartosime 2 teoremos žymėjimus. Kiekvienam $\tau>0$

$$|f_{nk}(1)-1|\le\int_{|x|\le\tau}|e^{ix}-1|dF_{nk}(x)+\int_{|x|>\tau}|e^{ix}-1|dF_{nk}(x).$$

Pirmajame integrale pointegralinę funkciją įvertinsime pagal 8 skyrelio lemą dydžiu $|x|$, o antrajame – trivialiai skaičiumi 2. Gausime

$$|f_{nk}(1)-1|\le\int_{|x|\le\tau}|x|dF_{nk}(x)+2\int_{|x|>\tau}dF_{nk}(x)\le$$
$$\le\tau+2P(|X_{nk}|>\tau).$$

Kadangi dydžiai X_{nk} yra nykstami, o τ gali būti parinktas kiek norima mažas, tai

(11) $$\max_{1\le k\le k_n}|f_{nk}(1)-1|\to 0.$$

Iš sąlygos $MX_{nk}=0$ pagal 8 skyrelio lemą išplaukia

[1] William Feller (1906–1970) – amerikiečių matematikas.

(12)
$$\begin{aligned}|f_{nk}(1)-1| &= \Big|\int_{-\infty}^{\infty}(e^{ix}-1-ix)dF_{nk}(x)\Big| \le \\ &\le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 dF_{nk}(x) = \frac{1}{2}DX_{nk}.\end{aligned}$$

Kai n pakankamai dideli, remiantis 10 skyrelio lema ir (11) sąryšiu,

$$\big|\ln f_{nk}(1) - \big(f_{nk}(1)-1\big)\big| \le |f_{nk}(1)-1|^2.$$

Iš (11), (12) ir (2) išplaukia

$$\begin{aligned}&\Big|\ln\varphi_n(1) - \sum_{k=1}^{k_n}\big(f_{nk}(1)-1\big)\Big| \le \sum_{k=1}^{k_n}|f_{nk}(1)-1|^2 \le \\ &\le \max_{1\le k\le k_n}|f_{nk}(1)-1|\sum_{k=1}^{k_n}|f_{nk}(1)-1| \le \\ &\le \frac{1}{2}\max_{1\le k\le k_n}|f_{nk}(1)-1| \to 0.\end{aligned}$$

Kadangi $\ln\varphi_n(1)\to -1/2$, tai

$$\sum_{k=1}^{k_n}\big(f_{nk}(1)-1\big) + \frac{1}{2} \to 0,$$

kitaip tariant,

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\big(e^{ix}-1-ix+\frac{1}{2}x^2\big)dF_{nk}(x) \to 0.$$

Tačiau tada ir realioji dalis

(13)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big(\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2\big)dF_{nk}(x) \to 0.$$

Panagrinėsime pointegralinę funkciją. Kai $|x|\ge 3$,

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 \ge \big(-2+\frac{1}{4}x^2\big) + \frac{1}{4}x^2 > \frac{1}{4}x^2.$$

Kai $|x|<3$, eilutė

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

yra alternuojanti. Todėl, kai $\tau < |x| < 3$,

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = \frac{x^4}{4!}\Big(1 - \frac{9}{5 \cdot 6}\Big) > \frac{7\tau^2}{240}x^2.$$

Iš (13) ir įrodytų nelygybių išplaukia Lindebergo sąlyga. □

Paminėsime porą specialių Lindebergo teoremos atvejų.

1 išvada (Liapunovo teorema). *Tarkime, kad $X_1, X_2, \dots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kurių bent vienas yra neišsigimęs ir visi turi $2+\delta$, $\delta > 0$, eilės absoliučiuosius momentus. Pažymėkime*

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n DX_k, \; Z_n = B_n^{-1}\sum_{k=1}^n (X_k - MX_k).$$

Jei

$$B_n^{-2-\delta}\sum_{k=1}^n M|X_k - MX_k|^{2+\delta} \to 0, \tag{14}$$

kai $n \to \infty$, tai tolygiai x atžvilgiu

$$P(Z_n < x) \to \Phi(x),$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s. Patikrinsime, ar teisinga Lindebergo sąlyga. Pažymėję $MX_k = a_k$, turime

$$B_n^{-2}\sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k|>\tau B_n} (x-a_k)^2 dF_{X_k}(x) \leq$$
$$\leq B_n^{-2-\delta}\tau^{-\delta}\sum_{k=1}^n \int_R |x-a_k|^{2+\delta} dF_{X_k}(x).$$

Iš (14) Liapunovo sąlygos išplaukia, kad teisinga ir Lindebergo sąlyga. □

2 išvada. *Jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots$ yra vienodai pasiskirstę, turi vidurkius a ir teigiamas dispersijas σ^2,*

$$Z_n = (\sigma\sqrt{n})^{-1}\Big(\sum_{k=1}^n X_k - na\Big),$$

tai tolygiai x atžvilgiu

$$P(Z_n < x) \to \Phi(x),$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s. Ir šiuo atveju pakaks patikrinti, ar teisinga Lindebergo sąlyga. Pažymėję dydžių X_k pasiskirstymo funkciją F ir pastebėję, kad $B_n = \sigma n^{1/2}$, turime

$$B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a|>\tau B_n} (x-a)^2 dF(x) = \sigma^{-2} \int_{|x-a|>\tau\sigma n^{1/2}} (x-a)^2 dF(x).$$

Iš dispersijos egzistavimo išplaukia, kad dešinės pusės integralas konverguoja į nulį.

Šią teoremą nesunku įrodyti ir nesiremiant Lindebergo teorema. Pakanka dydžių X_k charakteristinę funkciją užrašyti pavidalu

$$f(t) = 1 + iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + t^2 r(t)$$

(čia $r(t) \to 0$, kai $t \to 0$) ir pastebėti, kad normuotos sumos charakteristinė funkcija yra

$$a^{-ian^{1/2}\sigma^{-1}t} f^n\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) = e^{-ian^{1/2}\sigma^{-1}t}\Bigg(1 + \frac{iat}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{2n} r\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\Bigg)^n.$$

Jau ne kartą taikytais metodais galima įrodyti, kad ta charakteristinė funkcija konverguoja į $\exp(-t^2/2)$. □

2 ir 3 teoremose darėme prielaidą, kad egzistuoja atsitiktinių dydžių antrieji momentai. Tačiau yra ir bendresnių teoremų, kuriose apsieinama be tokio tipo sąlygų.

4 teorema. *Sakykime, $X_{n1}, ..., X_{nk_n}$ $(n = 1, 2, ...)$ yra atsitiktinių dydžių serijų seka ir kiekvienos serijos dydžiai yra nepriklausomi. Pažymėkime $S_n = X_{n1} + ... + X_{nk_n}$. Konstantų seka $\{a_n\}$ su sąlygomis, kad*

$$P(S_n - a_n < x) \to \Phi(x)$$

ir dydžiai X_{nk} būtų nykstami, egzistuoja tada ir tik tada, kai kiekvienam $\tau > 0$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\tau} dF_{nk}(x) \to 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \Big\{ \int_{|x|\le\tau} x^2 dF_{nk}(x) - \Big(\int_{|x|\le\tau} x dF_{nk}(x)\Big)^2 \Big\} \to 1;$$

čia F_{nk} yra dydžio X_{nk} pasiskirstymo funkcija.

Šios teoremos įrodymą galima rasti, pvz., [28].

Bendro pobūdžio teoremos apie atsitiktinių dydžių sumų asimptotinį normalųjį pasiskirstymą paprastai vadinamos centrinėmis ribinėmis teoremomis. Šis istorinis pavadinimas atsirado todėl, kad normalusis dėsnis yra labai svarbus tikimybių teorijoje bei jos taikymuose. Praktikoje pasitaikančių atsitiktinių dydžių pasiskirstymai labai dažnai būna normalieji arba mažai nuo jų skiriasi. Šiuo dėsniu grindžiama matavimo paklaidų teorija. Kiekvienas matavimas yra susijęs su dviejų rūšių paklaidomis: sisteminėmis ir atsitiktinėmis. Atsitiktinės paklaidos priklauso nuo daugelio priežasčių. Sakykime, sveriame kūną tiksliomis svarstyklėmis. Bendra paklaida susidaro iš elementariųjų paklaidų, kurios priklauso nuo atmosferos sąlygų (oro drėgmės, temperatūros bei tankio svyravimų, įvairių oro srovių ir t. t.), ant svarstyklių patenkančių dulkelių, nuo svarstyklių pagrindo vibracijų (jas sukelia vėl gausybė įvairių priežasčių). Taigi priežasčių, sukeliančių nedideles paklaidas, yra labai daug, ir bendra paklaida yra suma daugelio atsitiktinių dydžių – arba nepriklausomų, arba labai mažai priklausomų. Nors paprastai ir nežinome atskirų dėmenų pasiskirstymo, bet suminės paklaidos pasiskirstymas yra labai artimas normaliajam, nes dėmenys paprastai tenkina Lindebergo sąlygą, be to, juos galima laikyti nykstamais.

Praktikoje svarbu žinoti, kokiu greičiu atsitiktinių dydžių sumos pasiskirstymo funkcija konverguoja į ribinę normaliąją pasiskirstymo funkciją. Yra daug šio uždavinio sprendimų. Suformuluosime vieną iš jų.

5 teorema. *Jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X_n $(n = 1, 2, ...)$ turi trečiuosius momentus,*

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} DX_k,$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} M|X - MX_k|^3,$$

$$Z_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - MX_k),$$

tai

(15) $$\sup_x |P(Z_n < x) - \Phi(x)| \le cB_N^{-3} C_n;$$

čia c – absoliuti konstanta.

Tiksli mažiausios galimos konstantos c reikšmė nėra žinoma, bet yra įrodyta, kad ji tenkina nelygybes $0,40973... = (3 + \sqrt{10})/(6\sqrt{2\pi}) \le c <$ $< 0,7975$.

Jei atsitiktiniai dydžiai yra vienodai pasiskirstę ir jų dispersijos yra σ^2, o tretieji centriniai absoliutieji momentai μ_3, tai (15) nelygybės dešinė pusė lygi $c\mu_3\sigma^{-3}n^{-1/2}$.

Yra išvystyta ir nykstamų dydžių sumų pasiskirstymų konvergavimo į kitus pasiskirstymus teorija. Ne kiekviena pasiskirstymo funkcija gali būti ribinė – tik vadinamosios neaprėžtai dalios funkcijos gali būti ribinės.

Atsitiktinis dydis X vadinamas *neaprėžtai daliu*, jei kiekvienam natūraliajam n jo pasiskirstymo funkcija yra n nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumos $X_{n1} + ... + X_{nn}$ pasiskirstymo funkcija. Atitinkamai charakteristinė funkcija f yra vadinama *neaprėžtai dalia*, jei kiekvienam natūraliajam n egzistuoja tokia charakteristinė funkcija f_n, kad $f(t) = f_n^n(t)$, kitaip tariant, kiekvienam natūraliajam n pagrindinė šaknies reikšmė $f^{1/n}$ yra charakteristinė funkcija. Atitinkamą pasiskirstymo funkciją taip pat vadiname *neaprėžtai dalia.*

Tiesiog iš apibrėžimo išplaukia, kad išsigimusios, normaliosios ir Puasono pasiskirstymo funkcijų charakteristinės funkcijos

$$e^{iat},\ e^{iat-\sigma^2t^2/2},\ e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

yra neaprėžtai dalios.

Patikrinti, ar charakteristinė funkcija yra neaprėžtai dali, padeda šitokia teorema.

6 (Levi[1]–Chinčino) teorema. *Funkcija f, apibrėžta realiųjų skaičių tiesėje, yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija tada ir tik tada, kai egzistuoja realusis skaičius α ir tokia aprėžta nemažėjanti funkcija Ψ, apibrėžta realiųjų skaičių tiesėje, kad*

$$(16)\qquad f(t) = \exp\Big\{i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\Big)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi(x)\Big\};$$

pointegralinė funkcija taške $x = 0$ laikoma lygia

$$\lim_{x\to 0}\Big(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\Big)\frac{1+x^2}{x^2} = -t^2/2.$$

Jei susitarsime laikyti $\Psi(-\infty) = 0$, o funkciją Ψ – tolydžia iš kairės (šie susitarimai nekeičia (15) integralo), tai (16) formulė aprašys abipus vienareikšmę atitiktį tarp neaprėžtai dalių charakteristinių funkcijų ir dydžių (α, Ψ).

Atkreipsime dėmesį, kad normaliajam dėsniui $N(a, \sigma^2)$

$$\alpha = a,\ \Psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0,\\ \sigma^2, & \text{kai } x > 0.\end{cases}$$

[1] Paul Lévy (1886–1971) – prancūzų matematikas.

Įrodoma, kad nykstamų nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų galimų ribinių pasiskirstymo funkcijų klasė sutampa su neaprėžtai dalių pasiskirstymo funkcijų klase. Yra žinomos būtinos ir pakankamos konvergavimo į duotąją funkciją sąlygos. Ši teorija sukurta daugelio matematikų pastangomis. Tarp jų ypač minėtini A. Chinčinas, B. Gnedenka[1], A. Kolmogorovas, P. Levi. Ta teorija išdėstyta [11, 13, 28].

Pastaruoju metu vystoma nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų ribinių teoremų teorija, kai nereikalaujama, kad dydžiai būtų nykstami (žr. [11]).

12. LOKALIOJI RIBINĖ TEOREMA

11 skyrelyje apibendrinome integralinę Muavro–Laplaso teoremą. Dabar mūsų tikslas – apibendrinti to paties pavadinimo lokaliąją teoremą. Ji įrodinėjama vadinamiesiems gardeliškiems atsitiktiniams dydžiams.

Sakysime, kad atsitiktinis dydis X yra *gardeliškas*, jei jis yra diskretusis ir jo reikšmės, įgyjamos su teigiamomis tikimybėmis, priklauso kuriai nors aritmetinei progresijai $a+dk$; čia a yra koks nors realusis skaičius, d – teigiamas skaičius, o $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Tos progresijos skirtumas d paprastai yra vadinamas *pasiskirstymo žingsniu.*

Gardeliški yra atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal binominį, Puasono dėsnius. Jų žingsnis lygus 1.

Skaičius a ir pasiskirstymo žingsnis d nėra vienareikšmiškai nusakyti. Kai atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį, žingsnis d gali būti lygus ne tik 1, bet ir bet kuriam iš skaičių $1/2, 1/3, 1/4$ ir t. t. Didžiausias tarp visų žingsnių yra lygus 1.

Ir bendruoju atveju, jei X reikšmės, įgyjamos su teigiamomis tikimybėmis, priklauso progresijai $a + dk$, tai jos priklauso ir progresijai $a' + d'k$, kai d/d' yra sveikasis skaičius, $a' = a + ld'$, l – sveikasis skaičius. Tačiau, jei X nėra išsigimęs, tai tarp pasiskirstymo žingsnių yra didžiausias.

Jei gardeliško atsitiktinio dydžio reikšmės, įgyjamos su teigiamomis tikimybėmis, yra pavidalo $a + kd$, kur k įgyja kurias nors sveikąsias reikšmes ir visų tų k bendras didžiausias daliklis yra D, tai tos reikšmės taip pat priklauso progresijai $a + Ddm$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; didžiausias pasiskirstymo žingsnis yra Dd.

1 lema. *Atsitiktinis dydis su carakteristine funkcija $f(t)$ yra gardeliškas tada ir tik tada, kai egzistuoja $t_0 \neq 0$ su sąlyga $|f(t_0)| = 1$. Jei gardeliškas atsitiktinis dydis nėra išsigimęs, tai toks mažiausias teigiamas t_0 egzistuoja; tada didžiausias pasiskirstymo žingsnis yra $2\pi/t_0$.*

Į r o d y m a s. 1. Jei atsitiktinis dydis įgyja reikšmes $a+dk$ su tikimybėmis p_k, tai jo charakteristinė funkcija yra

[1] Boris Gnedenko (g. 1912m.) – ukrainiečių kilmės matematikas.

$$f(t)=e^{iat}\sum_k p_k e^{idkt}.$$

Iš čia

$$f\Big(\frac{2\pi}{d}\Big)=e^{2\pi ia/d}\sum_k p_k=e^{2\pi ia/d},$$

vadinasi, $|f(2\pi/d)|=1$.

2. Tarkime, kad kuriam nors $t_0\neq 0$ turime $|f(t_0)|=1$. Tada $f(t)=$ $=\exp(i\Theta)$ su realiuoju skaičiumi Θ. Jei F yra tiriamojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija, tai

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_0x}dF(x)=e^{i\Theta},$$

arba

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\cos(t_0x-\Theta)-1\}dF(x)=0.$$

Kadangi pointegralinė funkcija yra neteigiama, tai F gali didėti tik taškuose

$$\frac{\Theta}{t_0}+\frac{2\pi}{t_0}k\ (k=0,\pm1,...).\ \Box$$

1 (Gnedenkos) teorema. *Jei vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai $X_1,X_2,...$ yra gardeliški, įgyja reikšmes su teigiamomis tikimybėmis iš progresijos $a+dk$, be to, turi vidurkius A ir dispersijas $\sigma^2>0$, tai*

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{d}P\Big(\sum_{\nu=1}^{n}X_\nu=na+dm\Big)-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{\big((a-A)n+dm\big)^2}{2\sigma^2n}\Big\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

tolygiai m atžvilgiu tada ir tik tada, kai d yra didžiausias pasiskirstymo žingsnis.

Į r o d y m a s. 1. P a k a n k a m u m a s. Tarkime, kad d yra didžiausias pasiskirstymo žingsnis. Pažymėkime f dydžių X_n charakteristinę funkciją. Suma $S_n=X_1+...+X_n$ priklausys progresijai $na+dk$. Pažymėję

$$P_n(k)=P(S_n=an+dk),$$

sumos S_n charakteristinę funkciją galime užrašyti pavidalu

$$f^n(t)=e^{iant}\sum_n P_n(k)e^{idkt}.$$

Furjė[1] koeficientas

$$P_n(m) = \frac{d}{2\pi}\int_{-\pi/d}^{\pi/d} f^n(t)e^{-i(an+dm)t}dt =$$
$$= \frac{d}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{-\pi\sigma\sqrt{n}/d}^{\pi\sigma\sqrt{n}/d} f^n\Big(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\exp\Big\{-\frac{i(an+dm)u}{\sigma\sqrt{n}}\Big\}du.$$

Jei

$$\varphi(t) = f\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\exp\Big(-\frac{iAt}{\sigma\sqrt{n}}\Big),$$

tai normuotos sumos

$$\frac{S_n - nA}{\sigma\sqrt{n}} \tag{1}$$

charakteristinė funkcija lygi $\varphi^n(t)$. Todėl

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{d}P_n(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi\sigma\sqrt{n}/d}^{\pi\sigma\sqrt{n}/d}\varphi^n(t)e^{-itw}dt; \tag{2}$$

čia, kad būtų trumpiau, pažymėta

$$w = \frac{(a-A)n + dm}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Kadangi (1) yra asimptotiškai pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį $N(0,1)$, tai

$$\varphi^n(t) \to e^{-t^2/2} \tag{3}$$

tolygiai, kai $|t| \le T,\ T$ – bet koks fiksuotas skaičius.

$f(t)\exp(-iAt)$ yra atsitiktinio dydžio $X_\nu - A$ charakteristinė funkcija. Šio dydžio vidurkis yra 0, o dispersija σ^2. Todėl pagal 8.6 teoremą

$$f(t)e^{-iAt} = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2t^2 + o(t^2).$$

Pagal 1.2 lemą

$$|f(t)e^{-iAt}| \le 1 - \frac{1}{4}\sigma^2t^2 \le e^{-\sigma^2t^2/4},$$

kai $|t| \le \delta,\ \delta > 0$ – pakankamai mažas skaičius. Iš čia

$$|\varphi^n(t)| \le e^{-t^2/4}, \tag{4}$$

[1] Joseph Fourier (1768–1830) – prancūzų matematikas.

kai $|t| \leq \delta\sigma\sqrt{n}$.

Kadangi d yra didžiausias pasiskirstymo žingsnis, tai pagal 1 lemą galima rasti tokį $c > 0$, kad būtų

$$|f(t)| < e^{-c},$$

kai $\delta \leq |t| \leq \pi/d$. Vadinasi,

$$|\varphi^n(t)| < e^{-cn}, \tag{5}$$

kai $\delta\sigma\sqrt{n} \leq |t| \leq \pi\sigma\sqrt{n}/d$.

Atsižvelgę į (3), (4) ir (5) įverčius, (2) integralą suskaidysime į kelis integralus

$$\begin{aligned}\frac{\sigma\sqrt{n}}{d}P_n(m) = \frac{1}{2\pi}\Bigg(&\int_{|t|\leq T}\Big(\varphi^n(t) - e^{-t^2/2}\Big)e^{-itw}dt+\\ &+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2-itw}dt - \int_{|t|>T} e^{-t^2/2-itw}dt+\\ &+\int_{T<|t|\leq\delta\sigma\sqrt{n}} \varphi^n(t)e^{-itw}dt+\\ &+\int_{\delta\sigma\sqrt{n}<|t|\leq\pi\sigma\sqrt{n}/d} \varphi^n(t)e^{-itw}dt\Bigg) =\\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.\end{aligned}$$

Pirmasis integralas pagal (3) konverguoja į nulį, kai $n \to \infty$. 8.4 pavyzdyje parodėme, kad

$$I_2 = \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Įvertinsime trečiąjį integralą

$$|I_3| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>T} e^{-t^2/2}dt \leq \frac{1}{\pi T}\int_T^{\infty} te^{-t^2/2}dt = \frac{e^{-T^2/2}}{\pi T}.$$

Pagal (4)

$$|I_4| \leq \frac{1}{\pi}\int_T^{\infty} e^{-t^2/4}dt \leq \frac{1}{\pi T}\int_T^{\infty} te^{-t^2/4}dt = \frac{2e^{-T^2/4}}{\pi T}.$$

Pagaliau pagal (5)

$$|I_5| < \frac{e^{-cn}}{\pi}\Big(\frac{\pi}{d} - \delta\Big)\sigma\sqrt{n}.$$

Todėl $\sigma\sqrt{n}d^{-1}P_n(m)$ nuo $(2\pi)^{-1/2}\exp(-w^2/2)$ skiriasi kiek norima mažu dydžiu, jei tik T ir n yra pakankamai dideli.

2. B ū t i n u m a s. Tarkime, kad galimų S_n reikšmių, įgyjamų su teigiamomis tikimybėmis, skirtumų, padalytų iš d, bendras didžiausias daliklis yra h. Skirtumas tarp artimiausių galimų sumos reikšmių negali būti mažesnis už dh. Jei d nėra didžiausias, tai $h > 1$ visiems n. Tada bus tokių sveikųjų m, kad visiems n tikimybės $P_n(m) = 0$. □

Tarkime, kad normuotos atsitiktinių dydžių sumos turi ribinį normalųjį pasiskirstymą. Kyla klausimas, ar tų sumų tikimybiniai tankiai, jei jie egzistuoja, konverguoja į normaliojo pasiskirstymo tankį. Čia, matyt, reikia papildomų sąlygų. Juk iš F_n konvergavimo į Φ be papildomų sąlygų dar neišplaukia, kad išvestinės F_n', jei jos egzistuoja, konverguoja į Φ'. Įrodysime vieną iš paprastesnių tokio tipo teoremų. Mums reikės dviejų pagalbinių teiginių.

2 lema. *Visiems realiesiems t*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos tx}{x^2}\,dx = \pi|t|.$$

Į r o d y m a s. Pakanka įrodyti tą lygybę, kai $t = 1$. Lygybės

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\Big(\int_0^x \sin u\,du\Big)dx$$

dešinėje pusėje keičiame integravimo tvarką

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \Big(\int_u^{\infty} \frac{dx}{x^2}\Big) \sin u\,du = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$$

pagal 9.3 lemą. □

3 lema. *Jei g yra aprėžta ir integruojama Lebego prasme funkcija visoje realiųjų skaičių tiesėje,*

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x)\,dx \tag{6}$$

yra visiems t neneigiama, tai ir ψ yra integruojama Lebego prasme realiųjų skaičių tiesėje.

Į r o d y m a s. Nesunku įrodyti, kad ψ yra tolydi (plg. 8.3 teoremos įrodymą). Paėmę bet kurį teigiamą y, iš (6), sukeitę integravimo tvarką, gauname

$$\int_{-y}^{y} \psi(t)\,dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{\sin xy}{y}\,dx.$$

Paėmę teigiamą T, dar kartą integruojame ką tik gautą lygybę

$$\int_0^{2T}\Big(\int_{-y}^{y}\psi(t)dt\Big)dy = 2\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{1-\cos 2Tx}{x^2}dx. \tag{7}$$

Kairėje pusėje keičiame integravimo tvarką ir remiamės sąlyga, kad ψ yra neneigiama funkcija. Gauname

$$\int_0^{2T}\Big(\int_{-y}^{y}\psi(t)dt\Big)dy = \int_{-2T}^{2T}\psi(t)(2T-|t|)dt \ge T\int_{-T}^{T}\psi(t)dt.$$

Jei K yra konstanta, aprėžianti funkciją g, tai pagal 2 lemą

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{1-\cos 2Tx}{x^2}dx \le K\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos 2Tx}{x^2}dx = 2\pi TK.$$

Iš (7) išplaukia

$$\int_{-T}^{T}\psi(t)dt \le 2\pi K.$$

Lieka remtis integralo savybėmis, pvz., V.9.14 teorema. □

2 (Gnedenkos) teorema. *Jei nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, ...$ turi vidurkius a, dispersijas $\sigma^2 > 0$ ir, pradedant kuriuo nors n_0, normuotos sumos*

$$Z_n = \frac{X_1 + ... + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

turi tankį $p_n(x)$, tai

$$p_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},$$

kai $n\to\infty$, tolygiai x atžvilgiu tada ir tik tada, kai egzistuoja natūralusis n_1, kuriam $p_{n_1}(x)$ yra aprėžtas.

P a s t a b a. Iš 9 skyrelio išplaukia: jei egzistuoja tankis p_{n_0}, tai egzistuoja ir p_n, kai $n > n_0$.

Į r o d y m a s. Sąlygos būtinumas yra akivaizdus. Įrodinėsime jos pakankamumą. Pirmiausia įrodysime, kad atsitiktinio dydžio Z_n charakteristinė funkcija yra integruojama visoje tiesėje R, kai $n \ge 2n_1$.

Pažymėkime f dydžių X_k charakteristines funkcijas,

$$\varphi(t) = f\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\exp\Big(-\frac{iat}{\sigma\sqrt{n}}\Big).$$

Tada sumos Z_n charakteristinė funkcija yra $\varphi^n(t)$. Imkime kitą atsitiktinį dydį Z_n', nepriklausomą nuo Z_n, bet taip pat pasiskirsčiusį. Atsitiktinio dydžio $Z_n - Z_n'$ charakteristinė funkcija yra $|\varphi^n(t)|^2$. Iš 9 skyrelio išplaukia, kad atsitiktinio dydžio $Z_{n_1} - Z_{n_1}'$ tankis q_{n_1} yra aprėžtas. Kadangi

$$|\varphi^{2n_1}(t)| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} q_{n_1}(x)dx,$$

tai pagal 3 lemą $|\varphi^{2n_1}|$, taigi ir $|f|^{2n_1}$, yra integruojamos tiesėje R. Iš nelygybės $|f(t)| \le 1$ išplaukia, kad $|f|^n$, vadinasi, ir φ^n, yra integruojamos, kai $n \ge 2n_1$.

Remiantis 9.3 teorema, kai $n \ge 2n_1$,

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi^n(t)dt.$$

Kaip ir 1 teoremos įrodyme, suskaidysime šį integralą į kelis:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{|t|\le T}\Big(\varphi^n(t) - e^{-t^2/2}\Big)e^{-itx}dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2-itx}dt - \int_{|t|>T} e^{-t^2/2-itx}dt + \\ &+ \int_{T<|t|\le\delta\sigma\sqrt{n}} \varphi^n(t)e^{-itx}dt + \int_{\delta\sigma\sqrt{n}<|t|} \varphi^n(t)e^{-itx}dt\Big) = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5; \end{aligned} \tag{8}$$

čia T yra teigiamas fiksuotas skaičius, δ – pakankamai mažas teigiamas skaičius, kurį parinksime vėliau.

Samprotaudami visai taip pat, kaip ir 1 teoremos įrodyme, gauname, kad $I_1 \to 0$, kai $n \to \infty$, tolygiai x atžvilgiu,

$$I_2 = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}},\ |I_3| \le \frac{e^{-T^2/2}}{\pi T},\ |I_4| \le \frac{2e^{-T^2/4}}{\pi T}.$$

Lieka įvertinti I_5.

Iš funkcijos $|f|^{2n_1}$ integruojamumo išplaukia, kad egzistuoja $\delta > 0$ su sąlyga $|f(t)| \le \eta < 1$, kai $|t| \ge \delta$. Todėl

$$\begin{aligned} |I_5| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\delta\sigma\sqrt{n}} \Big|f\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\Big|^n dt \le \\ &\le \eta^{n-2n_1}\sigma\sqrt{n}/(2\pi)\int_{|t|>\delta} |f(t)|^{2n_1}dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Iš (8) išplaukia, kad $p_n(x)$ ir $(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$ kiek norima mažai skiriasi, kai T ir n pakankamai dideli. □

13. ATSITIKTINIŲ VEKTORIŲ CHARAKTERISTINĖS FUNKCIJOS

Ir daugiamačių atsitiktinių dydžių teorijoje jų charakteristinės funkcijos vaidina svarbų vaidmenį.

Atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, ..., X_s)$, apibrėžto tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, *charakteristine funkcija* vadinsime funkciją, apibrėžtą visiems $t = (t_1, ..., t_s) \in R^s$,

$$\begin{aligned} f_X(t) &= f_{(X_1,...,X_s)}(t_1, ..., t_s) = Me^{i(t_1X_1+...+t_sX_s)} = \\ &= \int_\Omega e^{i\left(t_1X_1(\omega)+...+t_sX_s(\omega)\right)} P(d\omega) = \\ &= \int_{R^s} e^{i(t_1x_1+...+t_sx_s)} P_{X_1,...,X_s}(dx_1, ..., dx_s) = \\ &= \int_{R^s} e^{i(t_1x_1+...+t_sx_s)} dF(x_1, ..., x_s). \end{aligned}$$

Tokia funkcija kiekvienam atsitiktiniam vektoriui X yra vienareikšmiškai nusakyta.

Daugiamačių atsitiktinių dydžių charakteristinių funkcijų teorija yra analogiška vienamačių atsitiktinių dydžių atitinkamų funkcijų teorijai. Išvardysime jų savybes, palikdami įrodymus skaitytojui. Visur f reiškia charakteristinę funkciją.

1. $f(0) = 1$.
2. $|f| \le 1$.
3. $f(-t) = \overline{f(t)}$; čia brūkšnys reiškia kompleksinį jungtinį dydį.
4. f yra tolygiai tolydi visoje erdvėje R^s.
5. Atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, ..., X_s)$ komponento X_k charakteristinė funkcija

$$f_{X_k}(t_k) = f_{(X_1,...,X_s)}(\underbrace{0, ..., 0}_{k-1}, t_k, 0, ..., 0).$$

6. Jei $a_1, ..., a_s, b_1, ..., b_s$ yra konstantos, tai

$$\begin{aligned} &f_{(a_1X_1+b_1,...,a_sX_s+b_s)}(t_1, ..., t_s) = \\ &= e^{i(b_1t_1+...+b_st_s)} f_{(X_1,...,X_s)}(a_1t_1, ..., a_st_s). \end{aligned}$$

7. Jei A yra $s \times s$ realiųjų skaičių matrica, tai atsitiktinio vektoriaus XA charakteristinė funkcija

$$f_{XA}(t) = f_X(tA').$$

8. Atsitiktinių dydžių sumos $X_1 + ... + X_s$ charakteristinė funkcija

$$f_{(X_1+...+X_s)}(t_1) = f_{(X_1,...,X_s)}(t_1, ..., t_1).$$

9. Jei atsitiktiniai dydžiai $X_1, ..., X_s$ yra nepriklausomi, tai

$$f_{(X_1,...,X_s)}(t_1, ..., t_s) = f_{X_1}(t_1)...f_{X_s}(t_s).$$

10. Jei egzistuoja momentas $MX_1^{k_1}...X_s^{k_s}$, tai charakteristinė funkcija turi išvestinę

$$\frac{\partial^{k_1+...+k_s} f(t_1, ..., t_s)}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_s^{k_s}},$$

be to,

$$MX_1^{k_1}...X_s^{k_s} = i^{-k_1-...-k_s} \left(\frac{\partial^{k_1+...+k_s} f(t_1, ..., t_s)}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_s^{k_s}} \right)_{t_1=...=t_s=0}.$$

11. Teisinga a p v e r t i m o   t e o r e m a: jei I yra intervalas $a_1 \le x_1 < b_1, ..., a_s \le x_s < b_s$ ir tikimybė, kad atsitiktinis vektorius X priklausys to intervalo briaunoms, yra lygi nuliui, tai

$$\begin{aligned} &\triangle_I F = P(X \in I) = \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} ... \int_{-T}^{T} f(t_1, ..., t_s) \prod_{k=1}^{s} \frac{e^{ia_k t} - e^{ib_k t}}{it_k} dt_1...dt_s. \end{aligned}$$

12. Charakteristinė funkcija vienareikšmiškai nusako pasiskirstymo funkciją.

13. Jei daugiamačių pasiskirstymo funkcijų seka F_n $(n = 1, 2, ...)$ konverguoja į pasiskirstymo funkciją F visuose taškuose $x = (x_1, ..., x_s)$ su sąlyga, kad kiekvienam k $(1 \le k \le s)$ taškas x_k yra vienamatės marginaliosios pasiskirstymo funkcijos $F(\infty, ..., \infty, y_k, \infty, ..., \infty)$ tolydumo taškas, tai atitinkamos charakteristinės funkcijos f_n $(n = 1, 2, ...)$ konverguoja visiems $t \in R^s$ į funkcijos F charakteristinę funkciją.

Jei charakteristinės funkcijos f_n $(n = 1, 2, ...)$ visiems $t \in R^s$ konverguoja į kokią nors funkciją f, tolydžią nuliniame taške, tai atitinkamos pasiskirstymo funkcijos F_n $(n = 1, 2, ...)$ konverguoja anksčiau nurodyta prasme į pasiskirstymo funkciją F, ir f yra F charakteristinė funkcija.

Atitiktis tarp charakteristinių ir pasiskirstymo funkcijų bus formuluojama papraščiau, jei pasiskirstymo funkcijas pakeisime tikimybiniais matais. Kaip žinome, tarp pasiskirstymo funkcijų ir tikimybinių matų yra abipus vienareikšmė atitiktis. Todėl abipus vienareikšmė atitiktis yra ir tarp charakteristinių funkcijų ir tikimybinių matų.

Tarkime, s-matėje erdvėje turime tikimybinių matų seką P_n $(n = 1, 2, ...)$. Sakysime, kad ji silpnai konverguoja į tikimybinį matą P, jei kiekvienai tolydžiai aprėžtai funkcijai $\varphi(x)$ turime

$$\int_{R^s} \varphi(x) P_n(dx) \to \int_{R^s} \varphi(x) P(dx).$$

Galima būtų įrodyti, kad tikimybiniai matai P_n silpnai konverguoja į tikimybinį matą P tada ir tik tada, kai kiekvienam $t \in R^s$ charakteristinės funkcijos

$$f_n(t) = \int_{R^s} e^{itx'} P_n(dx)$$

konverguoja į charakteristinę funkciją

$$f(t) = \int_{R^s} e^{itx'} P(dx).$$

Baigdami šį skyrelį, apskaičiuosime daugiamačio atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, charakteristinę funkciją. Imkime normalųjį pasiskirstymą su tankio funkcija

$$p(x_1, ..., x_s) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} e^{-1/2Q(x_1-a_1,...,x_s-a_s)}$$

(žr. II.5 skyrelį); čia $Q(x) = xAx'$ yra teigiamai apibrėžta kvadratinė forma su matrica A; $a = (a_1, ..., a_s)$. Šią tankio funkciją atitinkanti charakteristinė funkcija yra

$$f(t) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} e^{iat'} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx'-1/2xAx'} dx.$$

Integralą apskaičiuosime visai taip pat, kaip ir II.5 skyrelyje. Paėmę tokią ortogonalią matricą C, kad $CAC' = D$ būtų diagonalioji matrica su diagonaliaisiais elementais $\sigma_1^2, ..., \sigma_s^2$, keičiame $x = yC$ ir $t = vC$. Tada

$$itx' - 1/2xAx' = ivy' - 1/2yDy' = i\sum_{k=1}^{s}(v_k y_k - \sigma_k^2 y_k^2/2)$$

ir, remiantis 8.4 pavyzdžiu,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{s/2}} e^{iat'} \prod_{k=1}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iv_k y_k - \sigma_k^2 y_k^2/2} dy_k = \\ &= e^{iat'} \sqrt{|A|} \prod_{k=1}^{s} |\sigma_k|^{-1} e^{-v_k^2/(2\sigma_k^2)} = e^{iat'-1/2vD^{-1}v'} = \\ &= e^{iat'-1/2tC^{-1}D^{-1}(C^{-1})'t'} = e^{iat'-1/2tA^{-1}t'}. \end{aligned}$$

Išskleidę charakteristinę funkciją nulinio taško aplinkoje pagal Teiloro formulę, turime

$$f(t) = 1 + iat' - \frac{1}{2}(at')^2 - \frac{1}{2}tA^{-1}t' + o(t_1^2 + ... + t_s^2).$$

Antra vertus, atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, ..., X_s)$, turinčio antruosius momentus, charakteristinė funkcija nulinio taško aplinkoje lygi

$$1 + i(MX_1, ..., MX_s)t' - \frac{1}{2}tSt' + o(t_1^2 + ... + t_s^2);$$

čia

$$S = \begin{Vmatrix} MX_1^2 & MX_1X_2 & ... & MX_1X_s \\ MX_2X_1 & MX_2^2 & ... & MX_2X_s \\ ... & ... & ... & ... \\ MX_sX_1 & MX_sX_2 & ... & MX_s^2 \end{Vmatrix}.$$

Todėl

$$a = (MX_1, ..., MX_s)$$

ir matricos $A^{-1} = (a_{jk})$ elementas

$$a_{jk} = MX_jX_k - MX_jMX_k$$

yra dydžių X_j, X_k kovariacija. Vadinasi, A^{-1} yra atsitiktinio vektoriaus X kovariacijų matrica. Taigi s-mačio atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, charakteristinė funkcija yra

$$f(t) = e^{iat' - 1/2tHt'};$$

čia H yra simetrinė teigiamai apibrėžta matrica. Jei H yra diagonalioji matrica, tai charakteristinė funkcija yra pavidalo

$$e^{iat' - (t_1^2\sigma_1^2 + ... + t_s^2\sigma_s^2)}$$

su teigiamais $\sigma_1^2, ..., \sigma_s^2$. Tarkime, kad kuris nors iš tų skaičių, sakysime, σ_s^2 konverguoja į nulį. Pagal 13 savybę riba taip pat yra charakteristinė funkcija su atitinkama pasiskirstymo funkcija. Tačiau visa tikimybė bus sukoncentruota hiperplokštumoje $x_s = 0$. Tai bus $(s-1)$-matis normalusis pasiskirstymas, neturintis tankio s-matėje erdvėje.

Dėl patogumo dėsnius su charakteristinėmis funkcijomis

$$e^{iat' - 1/2tHt'},$$

kai H yra simetriška neneigiamai apibrėžta matrica, taip pat laikysime *normaliaisiais*; kai H nėra teigiamai apibrėžta, turėsime *išsigimusius* s-mačius normaliuosius dėsnius.

IV skyriuje mums pravers šitoks teiginys.

Teorema. *Normaliojo atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1, ..., X_s)$ komponentai $X_1, ..., X_s$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai jie kas du nekoreliuoti.*

Į r o d y m a s. Jei atsitiktiniai dydžiai X_j ir X_k yra nepriklausomi, tai jie yra ir nekoreliuoti. Todėl reikia įrodyti tik atvirkštinį teiginį. Tarkime, kad vektoriaus X komponentai yra kas du nekoreliuoti. Tada jo kovariacijų matricos $A^{-1} = (a_{jk})$ elementai $a_{jk} = 0$, kai $j \neq k$. Vektoriaus X charakteristinė funkcija yra

$$f_X(t) = \prod_{k=1}^{s} e^{ia_k t_k - a_{kk} t_k^2/2},$$

o jo komponento X_k charakteristinė funkcija

$$f_{X_k}(t_k) = f_X(0, ..., 0, t_k, 0, ..., 0) = e^{ia_k t_k - a_{kk} t_k^2/2}.$$

Vadinasi,

$$f_X(t) = f_{X_1}(t_1)...f_{X_s}(t_s),$$

arba pagal Fubinio teoremą

$$f_X(t) = \prod_{k=1}^{s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_k x_k} dF_{X_k}(x_k) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + ... + t_s x_s)} dF_{X_1}(x_1)...dF_{X_s}(x_s).$$

Kadangi charakteristinė funkcija vienareikšmiškai nusako pasiskirstymo funkciją, tai visiems $x_1, ..., x_s$

$$F_X(x_1, ..., x_s) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_s}(x_s).$$

Tai ir reiškia, kad komponentai $X_1, ..., X_s$ yra nepriklausomi. □

14. ATSITIKTINIO PROCESO SĄVOKA

Jau II.3 skyrelyje užsiminėme, kad dažnai atsitiktiniams reiškiniams aprašyti ir analizuoti nepakanka atskirų atsitiktinių dydžių, bet reikia ištisų jų sistemų. Tam reikalui įvedėme atsitiktinio vektoriaus, t. y. baigtinės atsitiktinių dydžių sistemos, sąvoką. Tačiau dažnai ir to maža. Reikia ir begalinių sistemų. Antai, skrendančio lėktuvo atstumas nuo žemės paviršiaus kiekvienu apibrėžto laiko momentu yra atsitiktinis dydis. Tą atstumą kuriuo nors skridimo laikotarpiu aprašys begalinė atsitiktnių dydžių sistema. Kitas pavyzdys: maitinimo terpėje auginamos bakterijos. Jų skaičiaus kitimą kuriuo nors laiko tarpu taip pat galėsime nusakyti begaline atsitiktinių dydžių sistema. Panašiai yra su radioaktyviosios medžiagos atomų, suskylančių per kurį nors laikotarpį, skaičiumi, pokalbių telefonu per kurį nors laiko tarpą skaičiumi, elektros energijos kiekiu, sunaudotu per kurį nors laikotarpį Vilniuje, ir t. t.

Visais minėtais atvejais turime kokią nors kintančią sistemą, kurią veikia atsitiktiniai faktoriai. Kiekvienu laiko momentu t ją galima nusakyti atsitiktiniu dydžiu $X(t)$. Kai t kinta, gauname atsitiktinių dydžių sistemą $\{X(t)\}$, priklausančią nuo parametro t. Sakome, jog turime atsitiktinį procesą. Matematiniu požiūriu visiškai nesvarbu, kad t yra laikas. Gali būti uždavinių, kurių matematinis modelis yra atsitiktinių dydžių sistema, priklausanti nuo parametrų, įgyjančių reikšmes iš bet kokios prigimties aibės.

Dabar apibrėšime atsitiktinį procesą griežtai.

Sakykime, duota tikimybinė erdvė $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}\}$ ir dar kokia nors netuščia aibė T. *Atsitiktiniu* (tikimybiniu, stochastiniu) *procesu* vadiname atsitiktinių dydžių sistemą $\{X(t),\ t \in T\}$, nusakytą toje tikimybinėje erdvėje. Jei norime nurodyti ir tikimybinę erdvę, galime rašyti pilniau $\{\Omega, \mathcal{A}, P, X(t), t \in T\}$. Taigi atsitiktinis procesas yra dviejų argumentų funkcija $X(t, \omega)$, apibrėžta aibėje $T \times \Omega$ ir kiekvienam $t \in T$ išmatuojama σ algebros $\mathcal{A}$ atžvilgiu. Parametras t iš tradicijos paprastai vadinamas *laiku*, nors jis gali būti bet kokios prigimties. Tas pavadinimas atsirado istoriškai, nes pradžioje tikimybių teorijai teko nagrinėti tik tokius atsitiktinius procesus, kuriuose parametras t iš tikrųjų buvo laikas.

Nepriklausomų atsitiktinių dydžių sekos, kurias nagrinėjome ankstesniuose skyreliuose,$\{X_1, X_2, ...\}$ yra atsitiktiniai procesai, kuriems $T = \{1, 2, ...\}$. Procesas yra ir atsitiktinių dydžių dalinių sumų $S_n = X_1 + ... + X_n$ $(n = = 1, 2, ...)$ seka. Procesus, kuriems T yra visų sveikųjų skaičių seka ar jos dalis arba bet kokia baigtinė arba skaiti (sutvarkyta) aibė, vadinsime *diskrečiojo laiko procesais*, arba *atsitiktinėmis sekomis*.

Jei T yra baigtinis arba begalinis realiųjų skaičių intervalas, tai $\{X(t),\ t \in \in T\}$ vadinamas *tolydžiojo laiko procesu*. Pavyzdys gali būti vadinamasis vėduoklinis procesas. Jis nusakomas šitaip. Imkime kokį nors atsitiktinį dydį $Y(\omega)$ ir du fiksuotus skaičius a, b. Tada procesas

$$X(t, \omega) = Y(\omega)(t - a) + b,$$

kai $t \in R$, yra vadinamas *vėduokliniu*.

Atsitiktinio proceso sąvoką galima apibendrinti. Tarkime, kad, be tikimybinės erdvės $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}\}$ ir aibės T, turime mačią erdvę $\{\Gamma, \mathcal{E}\}$. *Atsitiktine funkcija*, arba *atsitiktiniu procesu*, vadiname sistemą funkcijų $\{X(t, \omega),\ t \in \in T\}$, apibrėžtų aibėje $T \times \Omega$, įgyjančių reikšmes iš aibės Γ ir kiekvienam $t \in T$ bei $E \in \mathcal{E}$ tenkinančių sąlygą $\{\omega : X(t, \omega) \in E) \in \mathcal{A}$. Erdvė $\{\Gamma, \mathcal{E}\}$ paprastai vadinama proceso *būsenų*, arba *fazine, erdve*.

Jei T yra erdvės R^s aibė, tai, užuot kalbėję apie atsitiktinį procesą, kalbame apie *atsitiktinį lauką*.

Atsitiktinis procesas, kaip matėme, yra dviejų argumentų funkcija. Jei fiksuosime $\omega \in \Omega$, tai gausime vieno argumento funkciją $X(t),\ t \in T$, kuri paprastai vadinama proceso *trajektorija*, arba *realizacija*. Realiai stebėdami atsitiktinį procesą, faktiškai stebime vieną iš jo realizacijų.

Su atsitiktiniu procesu galime susieti jo trajektorijų tikimybinę erdvę. Imkime kurią nors funkcijų $x(t),\ t \in T$, erdvę Ξ, kuriai priklauso trajektorijos $X(t)$. Pažymėkime $\mathcal{F}$ tos erdvės poaibių σ algebrą, generuotą aibių pavidalo $C = \{x \in \Xi : x(t_1) \in E_1, ..., x(t_n) \in E_n\}$ su bet kuriuo n, bet kuriais $t_1, ..., t_n \in T$ ir bet kuriomis aibėmis $E_1, ..., E_n \in \mathcal{E}$.

Tokios aibės vadinamos cilindrinėmis (žr. V.10 skyrelį). Cilindrinių aibių baigtinės sąjungos sudaro algebrą, generuojančią $\mathcal{F}$. Procesas $X(t, \omega)$ nusako matų erdvės $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ atvaizdį erdvėje $\{\Xi, \mathcal{F}\}$, nes kiekvienai cilindrinei aibei C turime $\{\omega : X(\cdot, \omega) \in C\} \in \mathcal{A}$, vadinasi, ir kiekvienai $D \in \mathcal{F}$ teisingas sąryšis $\{\omega : X(\cdot, \omega) \in D\} \in \mathcal{A}$. Tas atvaizdis erdvėje $\{\Xi, \mathcal{F}\}$ indukuoja tikimybinį matą P_X, aprašomą lygybe $P_X(D) = P(\omega : X(\cdot, \omega) \in D)$. Trejetas $\{\Xi, \mathcal{F}, P_X\}$ ir vadinamas *trajektorijų tikimybine erdve.*

Jei $X(t)$ yra koks nors procesas, o $t_1, ..., t_n \in T$ – fiksuotos parametro t reikšmės, tai $X(t_1), ..., X(t_n)$ yra daugiamatis atsitiktinis dydis. Tokių dydžių pasiskirstymai vadinami atsitiktinio proceso *baigtiniamačiais pasiskirstymais.* Jei turime atsitiktinį procesą, tai visi jo baigtiniamačiai pasiskirstymai yra vienareikšmiškai nusakyti. Kyla klausimas, ar visi baigtiniamačiai pasiskirstymai taip pat nusako atsitiktinio proceso pasiskirstymą. Į tai atsako Kolmogorovo teorema (žr. V.10 skyrelį): jei fazinė erdvė yra $(R, \mathcal{B})$ ir visi baigtiniamačiai pasiskirstymai suderinti, tai jie vienareikšmiškai nusako proceso pasiskirstymą. Šis teiginys teisingas ir tada, kai Γ yra separabilioji metrinė erdvė, o $\mathcal{E}$ – jos Borelio aibių σ algebra.

Praktiniams taikymams labai svarbios įvairios specialios atsitiktinių procesų klasės: procesai su nepriklausomais pokyčiais, Markovo procesai ir t. t. Juos apibūdinant, vienaip ar kitaip nusakomas priklausomumas tarp atsitiktinių dydžių $X(t),\ t \in T$. Su keliais paprasčiausiais procesais susipažinsime kituose skyreliuose.

15. MARKOVO GRANDINĖS

Prie paprasčiausių procesų priskiriamos vadinamosios Markovo grandinės. Nagrinėsime atsitiktinį procesą $\{\Omega, \mathcal{A}, P, X(t), t \in T\}$, įgyjantį reikšmes iš mačios erdvės $\{\Gamma, \mathcal{E}\}$. Laikysime $T = \{0, 1, ...\}$, o būsenų erdvę Γ – baigtine arba skaičia. Būsenas žymėsime tiesiog natūraliaisiais skaičiais. Sakysime, kad procesas yra *Markovo grandinė* (tiksliau: *diskrečiojo laiko Markovo grandinė*), jei bet kuriam natūraliajam skaičiui n ir bet kuriems $k, j_0, j_1, ..., j_{n-2}, j \in \Gamma$ teisingos lygybės

$$(1)\qquad \begin{aligned} &P\big(X(n) = k | X(0) = j_0, X(1) = j_1, ...\\ &..., X(n-2) = j_{n-2}, X(n-1) = j\big) = P\big(X(n) = k | X(n-1) = j\big). \end{aligned}$$

Remdamiesi II.10 skyrelio sąlyginės tikimybės sąvoka, šias lygybes galime užrašyti šitaip:

$$P\big(X(n)=k|X(0),...,X(n-1)\big)=P\big(X(n)=k|X(n-1)\big).$$

(1) tikimybę vadinsime *perėjimo iš j-osios būsenos į k-ąją būseną tikimybe* ir žymėsime $p_{jk}^{(n)}$. Matrica

$$\pi^{(n)}=\begin{Vmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \dots \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}$$

vadinama *perėjimo matrica*. Aišku,

$$\sum_k p_{jk}^{(n)}=1,$$

kai sumuojama pagal visas galimas būsenas. Apskritai, kiekviena kvadratinė matrica, sudaryta iš neneigiamų elementų, vadinama *stochastine*, jei kiekvienos jos eilutės elementų suma yra lygi 1.

Pažymėsime

$$P\big(X(0)=k\big)=p_k^0\ (k=1,2,...).$$

Šios tikimybės vadinamos *pradinėmis tikimybėmis*. Ir čia

(2)
$$\sum_k p_k^0=1.$$

Nagrinėjant Markovo grandines, dažnai vartojama šitokia terminologija. Kalbama apie fizinę sistemą, kuri gali būti vienoje iš būsenų, sunumeruotų skaičiais 1, 2, ... Pradiniu laiko momentu 0 ji su tikimybe p_k^0 gali būti k-ojoje būsenoje. Laiko momentais 1, 2, ... ji gali su tam tikromis tikimybėmis pereiti iš vienų būsenų į kitas. Tikimybė laiko momentu n patekti į k-ąją būseną, kai žinoma visa ankstesnė sistemos evoliucija, priklauso tik nuo to, kokioje būsenoje ji buvo $n-1$ laiko momentu. Papildoma informacija apie ankstesnę sistemos evoliuciją nekeičia tos tikimybės. Vaizdžiai, bet ne visai tiksliai kalbant, šią savybę galima nusakyti šitaip: kai sistemos dabartis fiksuota, jos ateitis nepriklauso nuo praeities.

Markovo grandinė vadinama *homogenine*, jei tikimybės $p_{jk}^{(n)}=p_{jk}$ nepriklauso nuo n. Jei būsenų skaičius yra baigtinis, tai grandinė vadinama *baigtine*; jei būsenų aibė skaiti, tai ir grandinė vadinama *skaičia*.

1 p a v y z d y s. Tarkime, kad turime seką dėžių, kuriose yra po 1 baltą ir 1 juodą rutulį. Sunumeruokime dėžes skaičiais 0, 1, 2, ... Atsitiktinai imkime rutulį iš nulinės dėžės ir permeskime į pirmąją. Iš pirmosios dėžės vėl atsitiktinai imkime rutulį ir įmeskime į antrąją. Taip darykime ir toliau. Tikimybė ištraukti apibrėžtos spalvos rutulį iš n-osios dėžės ($n\geq 1$) priklauso tik nuo to, kokios spalvos rutulys buvo ištrauktas iš $(n-1)$-osios dėžės, ir nesikeičia nuo papildomos informacijos, kas įvyko anksčiau. Apibrėžkime atsitiktinius dydžius $X(n)$ $(n=0,1,2,...)$, laikydami

$X(n) = 1$, jei iš n-osios dėžės buvo ištrauktas baltas rutulys, ir $X(n) = 2$, jei iš tos dėžės buvo ištrauktas juodas rutulys. Tada

$$P\big(X(0) = 1\big) = \frac{1}{2},\ P\big(X(0) = 2\big) = \frac{1}{2},$$
$$P\big(X(n) = 1|X(n-1) = 1\big) = \frac{2}{3},\ P\big(X(n) = 1|X(n-1) = 2\big) = \frac{1}{3},$$
$$P\big(X(n) = 2|X(n-1) = 1\big) = \frac{1}{3},\ P\big(X(n) = 2|X(n-1) = 2\big) = \frac{2}{3}$$
$$(n = 1, 2, ...).$$

Turime baigtinę homogeninę Markovo grandinę su dviem būsenomis, su pradinėmis tikimybėmis $(1/2, 1/2)$ ir perėjimo matrica

$$\begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

2 p a v y z d y s. Dalelė juda tiese, laiko momentais 1, 2, 3, ... veikiama atsitiktinių postūmių. Pradžioje dalelė gali būti su atitinkamomis tikimybėmis tik taškuose su sveikosiomis koordinatėmis $a+1, a+2, ..., b-1$. Kiekvienas postūmis paslenka dalelę su tikimybe p į dešinėje pusėje esntį gretimą tašką su sveikąja koordinate arba su tikimybe $q = 1 - p$ į kairėje pusėje esantį gretimą tašką su sveikąja koordinate. Jei dalelė atsiduria taške a arba taške b, tai ji iškart pastumiama į intervalo viduje esantį gretimą tašką su sveikąja koordinate.

Pažymėkime $X(n) = l - a + 1$ $(l = a, a+1, ..., b)$, jei n-uoju laiko momentu dalelė atsiduria taške su koordinate l. Vėl turėsime baigtinę homogeninę Markovo grandinę su perėjimo matrica

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

kurioje yra $b - a + 1$ eilučių.

Grįžkime prie teorijos. Nagrinėsime homogeninę grandinę su perėjimo matrica $\pi = \| p_{jk} \|$. Ši matrica nusako sistemos būsenos pasikeitimą vienu žingsniu, tiksliau kalbant, nusako tikimybes sistemai patekti į kurią nors k-ąją būseną m-uoju laiko momentu, jei $(m-1)$-uoju laiko momentu ji buvo kurioje nors j-ojoje būsenoje. Apskaičiuosime tikimybę pereiti iš j-osios būsenos į k-ąją būseną per n laiko tarpų – n žingsnių. Pažymėkime tą tikimybę

$$p_{jk}(n) = P\big(X(n) = k|X(0) = j\big),$$

o jų matricą

$$\pi(n) = \| p_{jk}(n) \| .$$

Visus perėjimus iš j-osios būsenos į k-ąją būseną per $n_1 + n_2$ laiko tarpų suskaidysime į klases: 1) sistema iš j-osios būsenos per pirmuosius n_1 laiko tarpų pereina į pirmąją būseną, o per n_2 laiko tarpų iš pirmosios būsenos pereina į k-ąją būseną; 2) per n_1 laiko tarpų sistema iš j-osios būsenos pereina į antrąją būseną, o per n_2 laiko tarpų iš antrosios būsenos pereina į k-ąją būseną ir t. t. Iš pilnosios tikimybės formulės ir grandinės homogeniškumo išplaukia

$$p_{jk}(n_1 + n_2) = \sum_m p_{jm}(n_1)p_{mk}(n_2); \tag{3}$$

čia sumuojama pagal visas būsenas. Iš šių lygybių, prisiminę matricų daugybos apibrėžimą, gausime

$$\pi(n_1 + n_2) = \pi(n_1)\pi(n_2).$$

Taigi

$$\pi(2) = \pi^2(1) = \pi^2,\ \pi(3) = \pi(2)\pi = \pi^3, ...$$

Vadinasi,

$$\pi(n) = \pi^n\ (n = 1, 2, ...).$$

(3) formulė teisinga ir tada, kai $n_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0$, jei laikome

$$p_{jk}(0) = \begin{cases} 1, & \text{kai } j = k, \\ 0, & \text{kai } j \neq k. \end{cases}$$

Žinodami perėjimo ir pradines tikimybes, nesunkiai galime rasti tikimybę $p_k(n) = P(X(n) = k)$, kad sistema laiko momentu n bus k-ojoje būsenoje. Samprotaudami taip pat, kaip ir (3) formulės įrodyme, gauname

$$p_k(n_1 + n_2) = \sum_j p_j(n_1)p_{jk}(n_2).$$

Atskiru atveju

$$p_k(n) = \sum_j p_j^0 p_{jk}(n).$$

Šios formulės teisingos, kai $n_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0,\ n \geq 0$.

Žinodami pradines ir perėjimo tikimybes, galime rasti ir Markovo grandinės baigtiniamačius pasiskirstymus. Pasirinkime laiko momentus $0 \leq n_1 < < ... < n_m$ ir būsenas $k_1, ..., k_m$. Apskaičiuokime tikimybę $P\{X(n_1) = = k_1, ..., X(n_m) = k_m\}$. Iš grandinės apibrėžimo išplaukia

$$P\{X(n_1) = k_1, ..., X(n_m) = k_m | X(n_1) = k_1, ..., X(n_{m-1}) = k_{m-1}\} =$$
$$= p_{k_{m-1}k_m}(n_m - n_{m-1}).$$

Iš čia

$$P\{X(n_1)=k_1,...,X(n_m)=k_m\}=P\{X(n_1)=k_1,...,X(n_{m-1})= \\ =k_{m-1}\}p_{k_{m-1}k_m}(n_m-n_{m-1}).$$

Analogiškai

$$P\{X(n_1)=k_1,...,X(n_{m-1})=k_{m-1}\}= \\ P\{X(n_1)=k_1,...,X(n_{m-2})=k_{m-2}\}p_{k_{m-2}k_{m-1}}(n_{m-1}-n_{m-2}).$$

Samprotaudami taip pat ir toliau, gausime

$$\begin{aligned} &P\{X(n_1)=k_1,X(n_2)=k_2,...,X(n_m)=k_m\}= \\ &=p_{k_1}(n_1)p_{k_1k_2}(n_2-n_1)...p_{k_{m-1}k_m}(n_m-n_{m-1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Markovo grandinių teorijoje svarbu atsakyti į šitokį klausimą. Sakykime, duoti neneigiami skaičiai p_k^0, tenkinantys (2) sąlygą, ir stochastinė matrica $\| \ p_{jk} \ \|$. Kyla klausimas, ar egzistuoja homogeninė Markovo grandinė, kurios pradinės tikimybės yra skaičiai p_k^0 ir perėjimo tikimybės – skaičiai p_{jk}. Į šį klausimą galima atsakyti teigiamai. Imkime baigtiniamačius pasiskirstymus, nusakytus (4) lygybėmis. Nesunku suvokti, kad jie tenkina (1) sąlygą ir yra suderinti (žr. V.10 skyrelį). Todėl iš Kolmogorovo teoremos išplaukia atitinkamos Markovo grandinės egzistavimas.

Analogiški rezultatai teisingi ir nehomogeninėms grandinėms.

16. MARKOVO GRANDINIŲ BŪSENŲ KLASIFIKACIJA

Nagrinėsime homogenines Markovo grandines. Šios rūšies procesų evoliucijai tirti praverčia grandinių būsenų klasifikacija, pagrįsta galimybe iš vienos būsenos patekti į kitą. Susipažinsime su Kolmogorovo pasiūlyta klasifikacija.

Sakoma, kad k-oji būsena yra *pasiekiama* iš j-osios būsenos, jei kuriam nors sveikajam teigiamam n tikimybė iš j-osios būsenos patekti į k-ąją per n laiko tarpų yra teigiama: $p_{jk}(n)>0$.

Jei k-oji būsena yra pasiekiama iš j-osios būsenos, o l-oji – iš k-osios, tai l-oji būsena taip pat pasiekiama iš j-osios. Tai lengva įrodyti. Pagal apibrėžimą egzistuoja tokie du natūralieji skaičiai n_1 ir n_2, kad $p_{jk}(n_1)>0,\ p_{kl}(n_2)>0$. Iš 15 skyrelio (3) formulės gauname

$$p_{jl}(n_1+n_2)=\sum_m p_{jm}(n_1)p_{ml}(n_2)\geq p_{jk}(n_1)p_{kl}(n_2)>0.$$

j-oji būsena vadinama *neesmine*, jei galima rasti būseną, kuri būtų pasiekiama iš j-osios būsenos, tačiau j-oji būsena būtų iš jos nepasiekiama, kitaip tariant, jei egzistuoja tokie k ir n, kad $p_{jk}(n)>0$, bet $p_{kj}(m)=0$ visiems

m. Visos būsenos, kurios nėra neesminės, vadinamos *esminėmis*. Esminę būseną galima apibrėžti ir šitaip: j-oji būsena yra esminė, jei ji pasiekiama iš kiekvienos būsenos, kuri yra pasiekiama iš j-osios.

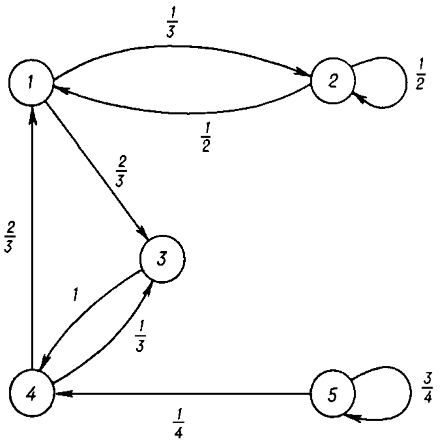
Dvi esminės būsenos vadinamos *susisiekiančiomis*, jei kiekviena iš jų yra pasiekiama iš kitos.

Atkreipsime dėmesį: jei j-oji ir k-oji, taip pat k-oji ir l-oji būsenos yra susisiekiančios, tai j-oji ir l-oji būsenos yra susisiekiančios.

1 p a v y z d y s. Imkime homogeninę grandinę su perėjimo matrica

$$\left\| \begin{matrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{matrix} \right\| .$$

30 paveiksle būsenos simboliškai pažymėtos skrituliukais su numeriais. Perėjimai iš būsenos į būseną (per vieną laiko tarpą) su teigiamomis tikimybėmis nurodyti rodyklėmis. Ties rodyklėmis nurodytos perėjimo tikimybės. Šioje grandinėje penktoji būsena yra neesminė, visos kitos – esminės; kiekvienos dvi iš jų (ir kiekviena pati su savimi) yra susisiekiančios.



30 pav.

Suklasifikuosime visas grandinės būsenas. Pirmiausia surinkime visas neesmines būsenas ir jų klasę pažymėkime K_0. Toliau klasifikuosime šitaip. Imkime kurią nors būseną ir surinkime visas su ja susisiekiančias būsenas.

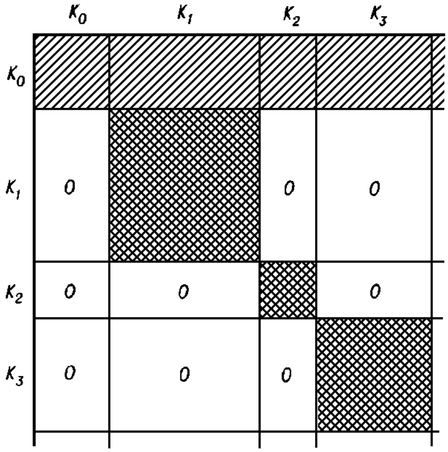
Aišku, kiekvienos dvi iš tų būsenų bus ir tarp savęs susisiekiančios. Taip visas esmines būsenas bus galima suskirstyti į klases, neturinčias bendrų elementų. Pažymėkime tas klases $K_1, K_2, \ldots$. Jei procesas pateko į kurią nors esminę būseną, tai jis su teigiama tikimybe pasiliks toje klasėje, kuriai priklauso minėtoji būsena.

j-oji būsena su sąlyga $p_{jj} = 1$ vadinama *absorbuojančiąja.* Ji viena sudaro klasę, kurią taip pat natūralu pavadinti *absorbuojančiąja.*

Grandinė, sudaryta iš vienos klasės esminių susisiekiančių būsenų, vadinama *nesuskaidoma.* Jei grandinė yra sudaryta iš daugiau kaip vienos klasės būsenų, tai ji vadinama *suskaidoma.*

2 pavyzdys. 1 pavyzdyje nagrinėtos grandinės būsenas galima suskirstyti į dvi klases: viena klasė yra sudaryta iš neesminės būsenos $\{5\}$, o kita klasė – iš visų esminių susisiekiančių būsenų $\{1, 2, 3, 4\}$. Grandinė yra suskaidoma.

Pravartu grandinės būsenas pernumeruoti taip, kad pradžioje eitų klasės K_0 būsenos, po to klasės K_1 būsenos ir t. t. Tada perėjimo matrica bus 31 paveiksle nurodyto pavidalo. Jame pomatriciai, užbrūkšniuoti dviejų krypčių linijomis, yra stochastiniai; kiekvieną iš jų atitinka nesuskaidoma Markovo grandinė. Pomatriciai, pažymėti 0, yra sudaryti vien tik iš nulių. Jei grandinė nėra baigtinė, tai kai kurios, o gal ir visos, klasės gali būti begalinės. Tada ir atitinkami pomatriciai bus begaliniai.



31 pav.

Tęsime toliau būsenų klasifikaciją, tačiau jau kitu aspektu. Tuo tikslu tikimybę, kad sistema, išėjusi iš k-osios būsenos, per n laiko tarpų pirmą kartą grįš atgal į tą būseną, žymėsime $v_k(n)$:

$$v_k(n) = P\bigl(X(n) = k,\ X(n-1) \neq k, \ldots, X(1) \neq k | X(0) = k\bigr).$$

Raide V_k žymėsime tikimybę, kad sistema, išėjusi iš k-osios būsenos, kada nors grįš į ją,

$$V_k = v_k(1) + v_k(2) + ...$$

Dabar klasifikuosime būsenas, atsižvelgdami į grįžtamumo savybes. k-ąją būseną vadinsime *rekurentine*, arba *grįžtamąja*, kai $V_k = 1$, ir *tranzientine*, arba *negrįžtamąja*, kai $V_k < 1$. Charakterizuosime būsenų grįžtamumą tikimybių $p_{kk}(n)$ terminais.

Lema. *Jei realiųjų skaičių eilutė*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

konverguoja ir jos suma lygi a, tai laipsninė eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \tag{2}$$

konverguoja, kai $|x| < 1$, *ir jos suma konverguoja į* a, *kai* $x \nearrow 1$. *Jei* $a_k \geq 0$ *ir* (2) *eilutės suma konverguoja į* $a < \infty$, *kai* $x \nearrow 1$, *tai ir* (1) *eilutė konverguoja į* a.

Ši lema yra atskiras Abelio lemos atvejis; jos įrodymą galima rasti matematinės analizės kursuose.

1 teorema. *k-oji būsena yra grįžtama tada ir tik tada, kai eilutė*

$$P_k = \sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}(n)$$

diverguoja. Jei k-oji būsena yra negrįžtama, tai

$$V_k = \frac{P_k}{1 + P_k}. \tag{3}$$

Į r o d y m a s. Nagrinėsime funkcijas

$$P_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}(n) x^n,$$

$$V_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_k(n) x^n.$$

Kai $|x| < 1$, abi eilutės konverguoja absoliučiai. Pagal pilnosios tikimybės formulę

$$p_{kk}(n) = v_k(1)p_{kk}(n-1) + v_k(2)p_{kk}(n-2) + ... +$$
$$+ v_k(n-1)p_{kk}(1) + v_k(n).$$

Padauginę abi lygybės puses iš x^n ir susumavę pagal n, gausime

$$P_k(x) = xv_k(1)\big(1 + P_k(x)\big) + x^2 v_k(2)\big(1 + P_k(x)\big) + ... =$$
$$= \big(1 + P_k(x)\big)V_k(x).$$

Iš čia

$$V_k(x) = \frac{P_k(x)}{1 + P_k(x)}, \ P_k(x) = \frac{V_k(x)}{1 - V_k(x)}. \tag{4}$$

Iš šių formulių išplaukia teoremos teiginys.

Jei eilutė P_k diverguoja, tai $P_k(x) \to \infty$, kai $x \nearrow 1$. Tada $V_k(x) \to 1$, kai $x \nearrow 1$. Iš Abelio lemos išplaukia, kad $V_k = 1$.

Jei $V_k = 1$, tai vėl pagal Abelio lemą $V_k(x) \to 1$, kai $x \nearrow 1$. Tada eilutė P diverguoja.

Jei eilutė P_k konverguoja, tai iš (4) gauname (3). □

Iš toliau įrodomos teoremos labiau paaiškės grįžtamų ir negrįžtamų būsenų sąvoka.

2 teorema. *Jei k-oji būsena yra grįžtamoji, tai sistema, kurios evoliuciją nusako Markovo grandinė, išėjusi iš k-osios būsenos, su tikimybe 1 grįš per be galo daug žingsnių be galo daug kartų į k-ąją būseną. Jei ta būsena yra negrįžtamoji, tai sistema su tikimybe 1 grįš per be galo daug žingsnių baigtinį skaičių kartų į tą būseną, kitaip tariant, po kurio nors baigtinio žingsnių skaičiaus ji niekada jau nebegrįš į k-ąją būseną.*

Į r o d y m a s. Pažymėkime ξ_m skaičių žingsnių iki m-ojo grįžimo į k-ąją būseną. Jei per be galo daug žingsnių gauname mažiau kaip m grįžimų, tai laikome $\xi_m = \infty$. Įvykis $\{\xi_m < \infty\}$ reiškia, kad sistema ne mažiau kaip m kartų grįžta į k-ąją būseną. Pažymėkime $V = V_k = P(\xi_1 < \infty)$.

Tarkime, kad įvyko įvykis $\{\xi_1 < \infty\}$. Vadinasi, sistema per kurį nors baigtinį žingsnių skaičių ξ_1 grįžo į pradinę k-ąją būseną. Po to jos tolesnė evoliucija vyksta pagal tuos pačius dėsnius, lyg ji prasidėtų vėl iš naujo. Taigi įvykio $\{\xi_2 < \infty\}$ tikimybė su sąlyga $\{\xi_1 < \infty\}$ bus taip pat lygi V:

$$P(\xi_2 < \infty | \xi_1 < \infty) = V.$$

Jei $\xi_1 = \infty$, tai ir $\xi_2 = \infty$. Todėl

$$P(\xi_2 < \infty) = P(\xi_2 < \infty | \xi_1 < \infty) \cdot P(\xi_1 < \infty) = V^2.$$

Visai taip pat bet kuriam $m = 3, 4, ...$

$$P(\xi_m < \infty | \xi_{m-1} < \infty) = V, \; P(\xi_m < \infty) = V^m.$$

Jei k-oji būsena yra negrįžtama, tai

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(\xi_m < \infty) = \sum_{m=1}^{\infty} V^m < \infty,$$

nes pagal negrįžtamos būsenos apibrėžimą $V < 1$. Iš Borelio-Kantelio lemos išplaukia, kad su tikimybe 1 gali įvykti tik baigtinis įvykių $\{\xi_m < \infty\}$ skaičius, kitaip tariant, su tikimybe 1 sistema tik baigtinį skaičių kartų grįš į k-ąją būseną.

Jei k-oji būsena yra grįžtama, tai $P(\xi_m < \infty) = 1$ kiekvienam m. Pažymėkime η skaičių grįžimų per be galo daug žingsnių. Įvykis $\{\eta \geq m\}$ yra tapatus įvykiui $\{\xi_m < \infty\}$ ir

$$\{\eta = \infty\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\xi_m < \infty\}.$$

Todėl

$$P(\eta = \infty) = \lim_{m \to \infty} P(\xi_m < \infty) = 1. \; \square$$

Jei k-oji būsena yra negrįžtama, tai iš 1 teoremos išplaukia, kad $p_{kk}(n) \to$ $\to 0$, kai $n \to \infty$. Būsenos, turinčios tokias savybes, yra vadinamos *nulinėmis*, o visos kitos būsenos – *nenulinėmis*. Iš teoremos išplaukia, kad negrįžtamos būsenos yra nulinės, bet ne kiekviena nulinė būsena yra negrįžtama, o nenulinės būsenos – grįžtamos (atvirkštinis teiginys ir čia ne visada teisingas).

3 p a v y z d y s. Nagrinėkime dalelės klaidžiojimą sveikaisiais tiesės taškais, nusakytą šitaip. Dalelė sveikaisiais laiko momentais arba su tikimybe 1/2 lieka savo vietoje, arba su ta pačia tikimybe pasislenka į dešinėje pusėje esantį gretimą tašką su sveikąja koordinate. Čia $v_k(1) = 1/2$ ir $v_k(n) = 0$, kai $n > 1$. Todėl $V_k = 1/2 < 1$. Vadinasi, visos būsenos yra negrįžtamos. Jos yra taip pat ir nulinės.

Tarkime, kad $p_{kk}(n) > 0$ ir $p_{kk}(m) > 0$. Iš 15 skyrelio (3) formulės gauname, kad tada ir $p_{kk}(n + m) > 0$. Todėl iš grandinės homogeniškumo išplaukia, kad visi n, kuriems $p_{kk}(n) > 0$, turi būti pavidalo $n = ds$ ($s =$ $= 1, 2, ...$). Tarp skaičių n su sąlyga $p_{kk}(n) > 0$ (jei tokie n egzistuoja) daliklių d yra didžiausias d_k. Jis vadinamas būsenos *periodu*. Jei periodas $d_k > 1$, tai k-oji būsena vadinama *periodine*.

4 p a v y z d y s. 15.2 pavyzdyje, kai $0 < p < 1$, visos būsenos yra periodinės su periodu 2.

3 teorema. *Jei nesuskaidomoje Markovo grandinėje bent viena būsena yra grįžtama, tai ir visos – grįžtamos, jei bent viena – nulinė, tai ir visos – nulinės, jei bent viena – periodinė su periodu d, tai ir visos – periodinės su periodu d.*

Į r o d y m a s. Imkime bet kurias dvi esmines susisiekiančias būsenas, sakykime, j-ąją ir k-ąją. Iš susisiekiančių būsenų apibrėžimo išplaukia, jog egzistuoja tokie natūralieji skaičiai n_1 ir n_2, kad

$$\alpha = p_{jk}(n_1) > 0,\ \ \beta = p_{kj}(n_2) > 0.$$

Kiekvienam natūraliajam skaičiui n iš pilnosios tikimybės formulės gauname

$$\begin{aligned} p_{jj}(n_1+n_2+n) &= \sum_{l,m} p_{jl}(n_1)p_{lm}(n)p_{mj}(n_2) \geq \\ &\geq p_{jk}(n_1)p_{kk}(n)p_{kj}(n_2) = \alpha\beta p_{kk}(n). \end{aligned} \tag{5}$$

Visai taip pat įrodoma nelygybė

$$p_{kk}(n_1+n_2+n) \geq \alpha\beta p_{jj}(n).$$

Iš tų nelygybių išplaukia pirmieji du teoremos teiginiai: jei j-oji būsena yra nulinė, tai tokia yra ir k-oji; jei j-oji būsena yra grįžtamoji, tai tokia yra ir k-oji.

Tarkime, kad j-oji būsena yra periodinė su periodu d_j. Vadinasi, jei $p_{jj}(n) > 0$, tai $d_j|n$. Kadangi

$$p_{jj}(n_1+n_2) = \sum_l p_{ji}(n_1)p_{lj}(n_2) \geq p_{jk}(n_1)p_{kj}(n_2) = \alpha\beta > 0,$$

tai $d_j|(n_1+n_2)$. Parodysime, kad visi n su sąlyga $p_{kk}(n) > 0$ dalijasi iš d_j. Iš (5) turime, kad tokiems n teisinga nelygybė $p_{jj}(n_1+n_2+n) > 0$. Vadinasi, $d_j|(n_1+n_2+n)$. Todėl $d_j|n$. Vadinasi, k-oji būsena yra periodinė. Jos periodas yra $d_k \leq d_j$. Analogiškai įrodome, kad $d_j \leq d_k$. Taigi $d_k = d_j$. □

Jei nesuskaidomos grandinės visos būsenos yra periodinės su periodu $d >$ > 1, tai ir pati grandinė vadinama *periodine*. Panagrinėsime tokios grandinės struktūrą.

4 teorema. *Periodinės grandinės su periodu d būsenas galima suskaidyti į viena kitos nedengiančias klases $L_0, L_1, ..., L_{d-1}$, turinčias savybę: grandinė per vieną laiko tarpą su tikimybe* 1 *pereina iš klasės L_k į klasę L_{k+1} $(k =$ $= 0, 1, ..., d-1)$; čia simboliškai pažymėta $L_d = L_0$.*

Į r o d y m a s. Imkime kurią nors fiksuotą būseną, sakykime, pirmąją. j-ąją būseną priskirsime klasei L_k $(k = 0, 1, ..., d-1)$, jei egzistuoja sveikasis teigiamas skaičius m su sąlyga $p_{1j}(md+k) > 0$. Įrodysime, kad būsenos gali priklausyti tik skirtingoms klasėms. Pakanka įrodyti: jei j-oji būsena priklauso klasei L_k ir kuriam nors r teisinga nelygybė $p_{1j}(r) > 0$, tai $r \equiv$ $\equiv k \bmod d$. Pastebėsime, jog egzistuoja toks skaičius s, kad $p_{j1}(s) > 0$. Kadangi

$$p_{11}(md + k + s) = \sum_l p_{1l}(md + k)p_{l1}(s) \geq p_{1j}(md + k)p_{j1}(s),$$

tai pagal klasės L apibrėžimą $p_{11}(md + k + s) > 0$. Be to,

$$p_{11}(r + s) = \sum_l p_{1l}(r)p_{l1}(s) \geq p_{1j}(r)p_{j1}(s) > 0.$$

Vadinasi, $d|(md + k + s)$ ir $d|(r + s)$, taigi $k \equiv r \bmod d$.

Kadangi iš pirmosios būsenos galima patekti į bet kurią būseną su teigiama tikimybe, tai kiekviena būsena priklauso kuriai nors iš klasių $L_0, L_1, ..., L_{d-1}$.

Reikia dar įrodyti, kad per vieną laiko tarpą su tikimybe 1 grandinė iš klasės L_k pereina į klasę L_{k+1}. Parodysime, kad $p_{jl} = 0$, jei j-oji būsena priklauso L_k, o l-oji nepriklauso L_{k+1}. Tarkime, kad yra priešingai. Tada iš nelygybės $p_{1j}(md + k) > 0$ gautume

$$p_{1l}(md + k + 1) = \sum_r p_{1r}(md + k)p_{rl} \geq p_{1j}(md + k)p_{jl} > 0.$$

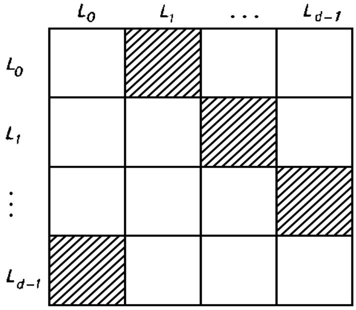
Išeitų, kad l-oji būsena priklauso L_{k+1}. Gautas prieštaravimas įrodo mūsų teiginį. Iš jo išplaukia: jei j-oji būsena priklauso L_k, tai

$$\sum p_{jl} = 1; \tag{6}$$

čia sumuojama pagal visas l-ąsias būsenas iš klasės L_{k+1}. □

Klasės L_k vadinamos *ciklinėmis*.

Periodinės grandinės matrica yra tokio pavidalo, kaip ir 32 paveiksle. Toje matricoje neužbrūkšniuoti pomatriciai yra sudaryti iš nulių, o užbrūkšniuoti pomatriciai – iš nenulinių elementų.



32 pav.

Periodinę grandinę su periodu d galima suskaidyti į d naujų grandinių. k-osios grandinės būsenos bus k-osios ciklinės klasės L_k būsenos. Perėjimo tikimybės bus $p_{jl}(d)$. Iš (6) išplaukia, kad perėjimo matrica bus stochastinė. Naujosios grandinės jau neturės poklasių.

17. MARKOVO GRANDINIŲ ERGODINĖS TEOREMOS

Imkime grandinę su perėjimo matrica

$$\pi = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

Šią grandinę nagrinėjome 15.1 pavyzdyje. Perėjimo per du laiko tarpus matrica bus

$$\pi^2 = \begin{Vmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{Vmatrix},$$

per tris laiko tarpus

$$\pi^3 = \begin{Vmatrix} \frac{14}{27} & \frac{13}{27} \\ \frac{13}{27} & \frac{14}{27} \end{Vmatrix}.$$

Matematinės indukcijos metodu galima įrodyti, kad

$$\pi^n = \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\cdot 3^n} & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\cdot 3^n} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\cdot 3^n} & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\cdot 3^n} \end{matrix} \right\|.$$

Matome, kad perėjimo tikimybės $p_{jk}(n) \to 1/2$, kai $n \to \infty$. Vadinasi, tikimybė sistemai patekti į k-ąją būseną praktiškai nepriklauso nuo to, kokioje būsenoje ji buvo tolimoje praeityje. Peršasi mintis, kad analogiškas teiginys gali būti teisingas ir kitokioms Markovo grandinėms. Tokiu atveju ribos

$$p_k^* = \lim_{n\to\infty} p_{jk}(n)$$

vadinamos *ribinėmis* tikimybėmis, o grandinės, turinčios tokią savybę, – *ergodinėmis*[1].

Imkime bet kurią homogeninę Markovo grandinę su perėjimo matrica $\| \ p_{jk} \ \|$ ir perėjimo per n laiko tarpų matrica $\| \ p_{jk}(n) \ \|$. Kiekvienam n apibrėšime *ergodiškumo koeficientą*

$$\rho(n) = 1 - \frac{1}{2}\sup_{j,k}\sum_l |p_{jl}(n) - p_{kl}(n)|.$$

Panagrinėsime jo savybes. Iš lygybių

$$\sum_l p_{jl}(n) = 1, \ \sum_l p_{kl}(n) = 1$$

visiems j ir k gauname

$$\sum_l \big(p_{jl}(n) - p_{kl}(n)\big) = 0,$$

arba

$$\sum_l{}^{+} \big(p_{jl}(n) - p_{kl}(n)\big) + \sum_l{}^{-} \big(p_{jl}(n) - p_{kl}(n)\big) = 0;$$

čia + prie sumavimo ženklo reiškia sumavimą pagal tuos l, kuriems tas skirtumas yra teigiamas, o – pagal tuos l, kuriems jis yra neigiamas. Todėl

$$\sum_l{}^{+} \big(p_{jl}(n) - p_{kl}(n)\big) = \frac{1}{2}\sum_l \big|p_{jl}(n) - p_{kl}(n)\big|$$

ir

(1) $$\rho(n) = 1 - \sup_{j,k}\sum_l{}^{+} \big(p_{jl}(n) - p_{kl}(n)\big).$$

[1] Iš graikų kalbos žodžių $\check{\varepsilon}\rho\gamma o\nu$ – *darbas*, $\grave{o}\delta\acute{o}\zeta$ – *kelias*.

Aišku, kad $0 \leq \rho(n) \leq 1$.

Ergodiškumo koeficientas gali būti ir lygus 0. Imkime grandinę su dviem būsenomis ir perėjimo per n laiko tarpų tikimybėmis, nusakytomis šitaip: $p_{11}(n) = 1,\ p_{12}(n) = 0,\ p_{21}(n) = 0,\ p_{22}(n) = 1$, kai n yra lyginis, bei $p_{11}(n) = 0,\ p_{12}(n) = 1,\ p_{21}(n) = 1,\ p_{22}(n) = 0$, kai n – nelyginis. Tada

$$|p_{11}(n) - p_{21}(n)| + |p_{12}(n) - p_{22}(n)| = 2$$

visiems n ir $\rho(n) = 0$.

1 teorema. *Jei kuriam nors n_0 ergodiškumo koeficientas $\rho(n_0) > 0$, tai egzistuoja ribos*

$$p_k^* = \lim_{n\to\infty} p_{jk}(n) \quad (j = 1, 2, ...; k = 1, 2, ...),$$

nepriklausančios nuo indekso j, be to,

$$\sup_j |p_{jk}(n) - p_k^*| \leq Ce^{-Dn};$$

čia

$$C = \frac{1}{1-\rho(n_0)},\ \ D = \frac{1}{n_0}\ln\frac{1}{1-\rho(n_0)}.$$

Į r o d y m a s. Pažymėkime

$$r_k(n) = \inf_j p_{jk}(n),\ \ R_k(n) = \sup_j p_{jk}(n).$$

Teisingos nelygybės

$$\begin{aligned} r_k(n+1) &= \inf_j p_{jk}(n+1) = \inf_j \sum_l p_{jl}p_{lk}(n) \geq \\ &\geq r_k(n)\inf_j\sum_l p_{jl} = r_k(n), \\ R_k(n+1) &= \sup_j p_{jk}(n+1) = \sup_j \sum_l p_{jl}p_{lk}(n) \leq \\ &\leq R_k(n)\sup_j\sum_l p_{jl} = R_k(n). \end{aligned}$$

Iš (1) lygybės gauname

$$\begin{aligned} R_k(n_0) - r_k(n_0) &= \sup_m p_{mk}(n_0) - \inf_s p_{sk}(n_0) = \\ &= \sup_{m,s}\big(p_{mk}(n_0) - p_{sk}(n_0)\big) \leq \\ &\leq \sup_{m,s}\sum_j{}^{+}\big(p_{mj}(n_0) - p_{sj}(n_0)\big) = 1 - \rho(n_0) \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned}
&R_k(n_0+n) - r_k(n_0+n) = \sup_{m,s}\bigl(p_{mk}(n_0+n) - p_{sk}(n_0+n)\bigr) = \\
&= \sup_{m,s}\sum_j \bigl(p_{mj}(n_0) - p_{sj}(n_0)\bigr)p_{jk}(n) \le \\
&\le \sup_{m,s}\Bigl\{R_k(n)\sum_j{}^{+}\bigl(p_{mj}(n_0) - p_{sj}(n_0)\bigr) + \\
&+ r_k(n)\sum_j{}^{-}\bigl(p_{mj}(n_0) - p_{sj}(n_0)\bigr)\Bigr\} = \\
&= \sup_{m,s}\bigl(R_k(n) - r_k(n)\bigr)\sum_j{}^{+}\bigl(p_{mj}(n_0) - p_{sj}(n_0)\bigr) = \\
&= \bigl(1-\rho(n_0)\bigr)\bigl(R_k(n) - r_k(n)\bigr).
\end{aligned}$$

Pakartotinai pritaikę tas formules, gauname

$$R_k(vn_0) - r_k(vn_0) \le \bigl(1-\rho(n_0)\bigr)^v \quad (v = 1, 2, ...). \tag{2}$$

Matėme, kad seka $r_k(n)$ $(n = 1, 2, ...)$ nemažėja, o seka $R_k(n)$ $(n = 1, 2, ...)$ nedidėja, be to, $r_k(n) \le R_k(n)$. Iš (2) ir teoremos sąlygų išplaukia, kad abi sekos turi ribas ir tos ribos sutampa

$$\lim_{n\to\infty} r_k(n) = \lim_{n\to\infty} R_k(n) = p_k^*.$$

Aišku,

$$|p_{jk}(n) - p_k^*| \le R_k(n) - r_k(n) \le \bigl(1-\rho(n_0)\bigr)^{n/n_0-1}. \ \square$$

Išvada. *Jei grandinė turi tik baigtinį būsenų skaičių ir išpildomos* 1 *teoremos sąlygos, tai ribinės tikimybės tenkina lygybes*

$$p_k^* = \sum p_j^* p_{jk}, \ \sum_k p_k^* = 1.$$

Į r o d y m a s. Pakanka lygybėse

$$p_{lk}(n+1) = \sum_j p_{lj}(n)p_{jk}, \ \sum_k p_{lk}(n) = 1$$

pereiti prie ribos, kai $n \to \infty$. $\square$

Išvada teisinga ir tada, kai būsenų skaičius yra skaitus, tik įrodymas daug sudėtingesnis.

2 teorema. *Jei išpildomos* 1 *teoremos sąlygos, tai egzistuoja ribos*

$$\lim_{n\to\infty} p_k(n) = p_k^* \ (k = 1, 2, ...),$$

be to,

$$|p_k(n) - p_k^*| \le Ce^{-Dn};$$

čia p_k^* *ir* C, D *turi tas pačias reikšmes.*

Į r o d y m a s. Iš 1 teoremos įrodyme gautų nelygybių išplaukia

$$|p_k(n) - p_k^*| = \left|\sum_j p_j^0 p_{jk}(n) - p_k^*\right| \le \sum_j p_j^0 |p_{jk}(n) - p_k^*| \le$$

$$\le \sum_j p_j^0 |R_k(n) - r_k(n)| = R_k(n) - r_k(n) \le Ce^{-Dn}. \ \square$$

Tikimybių pasiskirstymas $p_k^* (k = 1, 2, ...)$ su sąlyga

$$p_k^* = \sum_j p_j^* p_{jk}$$

yra vadinamas *stacionariuoju.* Jo prasmė šitokia. Jei kuriam nors n_0 turime $p_k(n_0) = p_k^*$ $(k = 1, 2, ...)$, tai tikimybės $p_k(n)$, kad laiko momentu n sistema pateks į k-ąją būseną, visiems $n \ge n_0$ yra tos pačios ir lygios $p_k(n) = p_k^*$. Tai išplaukia iš 15 skyrelio (3) formulės.

Iš (1) gauname

$$\sup_k \inf_j p_{jk}(n_0) = \rho(n_0).$$

Vadinasi, $\rho(n_0) > 0$, jei grandinė yra baigtinė ir visos perėjimo tikimybės $p_{jk}(n_0)$ yra teigiamos. Tuo atveju teisingos abi teoremos ir išvada.

Baigdami šį skyrelį, be įrodymo paminėsime dar keletą teiginių.

3 teorema. *Bet kuriems* j *ir* k *egzistuoja nepriklausančios nuo* j *teigiamos ribos*

$$p_k^* = \lim_{n\to\infty} p_{jk}(n) \ (j = 1, 2, ...; k = 1, 2, ...)$$

tada ir tik tada, kai grandinė yra nesuskaidoma bei neperiodinė ir egzistuoja būsena, grįžimo į kurią laikas turi (baigtinį) vidurkį. Skaičiai p_k^* *yra vieninteliai lygčių sistemos*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^* = 1,$$

$$p_k^* = \sum_{j=1}^{\infty} p_j^* p_{jk} \ (k = 1, 2, ...)$$

sprendiniai, jei nagrinėsime tik sekas, iš kurių sudarytos eilutės konverguoja absoliučiai.

Jei grandinė yra baigtinė, tai būtinos ir pakankamos sąlygos suprastėja: grandinė turi būti nesuskaidoma ir neperiodinė.

Jei grandinė yra periodinė su periodu d, tai bet kurioms j-ajai ir k-ajai būsenoms iš tos pačios klasės (žr. 16.4 teoremą) $p_{jk}(n) = 0$, kai $n \neq md$. Jei $n = md$, tai iš 3 ir 16.4 teoremų išplaukia, jog egzistuoja riba

$$\lim_{m\to\infty} p_{jk}(md) = p_k^* > 0,$$

nepriklausanti nuo j.

Tarkime, kad turime baigtinę grandinę. Kaip matėme 16 skyrelyje, jos būsenas galima suskirstyti į klases: neesminių būsenų klasę K_0 ir keletą esminių būsenų klasių $K_1, ..., K_r$. Suprantama, klasė K_0 gali būti tuščia, gali nebūti ir klasių $K_1, ..., K_r$. Panagrinėsime tikimybių $p_{jk}(n)$ asimptotiką ir tokioms grandinėms. Pakanka tirti tik atvejį, kai klasė K_0 yra netuščia, o esminių būsenų yra tik viena klasė K_1. Iš 2 teoremos išplaukia, kad $p_{jk}(n)$ turi teigiamas ribas, kai j-oji ir k-oji būsenos priklauso K_1. Galima būtų įrodyti, kad $p_{jk}(n)$ turi ribą, lygią 0, kai j-oji ir k-oji būsenos priklauso K_0, ir teigiamą ribą, kai j-oji būsena priklauso klasei K_0, o k-oji būsena priklauso klasei k_1. Ribos nepriklauso nuo j.

Šių rezultatų įrodymą galima rasti, pvz., [3] knygoje.

18. TOLYDAUS LAIKO MARKOVO GRANDINĖS. MARKOVO PROCESAI. MARTINGALAI

Kitą svarbią atsitiktinių procesų klasę sudaro tolydaus laiko Markovo grandinės. Jos skiriasi nuo 15 skyrelyje apibrėžtų procesų tik tuo, kad parametrų aibė T yra baigtinis arba begalinis realiųjų skaičių intervalas. Apibrėšime juos tiksliau. Turime atsitiktinį procesą $\{\Omega, \mathcal{A}, P, X(t), t \in T\}$, įgyjantį reikšmes iš mačios erdvės $\{\Gamma, \mathcal{E}\}$. Laikysime, kad T yra jau nusakyto pobūdžio, o būsenų erdvė Γ – baigtinė arba skaiti. Ir šiuo atveju būsenas žymėsime tiesiog natūraliaisiais skaičiais. Sakysime, kad procesas yra *tolydaus laiko Markovo grandinė*, jei bet kuriam natūraliajam skaičiui n, bet kuriems $t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < s < t$ iš T ir bet kuriems $k, j_0, j_1, ..., j_{n-1}, j$ teisingos lygybės

$$P\big(X(t) = k | X(t_0) = j_0, X(t_1) = j_1, ..., X(t_{n-1}) = j_{n-1}, X(s) = j\big) =$$
$$= P\big(X(t) = k | X(s) = j\big).$$

Ir čia galime kalbėti apie fizinę sistemą, kurios būsena laiko momentu t yra $X(t)$. Tada $P\big(X(t) = k | X(s) = j\big)$ yra tikimybė sistemai patekti į k-ąją būseną laiko momentu t, jei laiko momentu s ji buvo j-ojoje būsenoje. Jei ta tikimybė priklauso tik nuo $t - s$, tai grandinė vadinama *homogenine*. Tada galima kalbėti apie perėjimo tikimybę $p_{jk}(t)$ iš j-osios būsenos į k-ąją per laiko tarpą t. Toliau tik tokias grandines ir nagrinėsime. Laikysime $T = [0, \infty)$.

Pažymėsime $p_k^0 = p_k(0)$ tikimybę, kad sistema pradiniu momentu bus k-ojoje būsenoje, o $p_k(t)$ tikimybę, kad ji pateks į k-ąją būseną momentu t.

Kaip ir 15 skyrelyje, įrodomos formulės

$$\begin{aligned} p_{jk}(s+t) &= \sum_l p_{jl}(s) p_{lk}(t), \\ p_k(s+t) &= \sum_l p_l(s) p_{lk}(t), \\ p_k(t) &= \sum_l p_l^0 p_{lk}(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Jos teisingos, kai $s \geq 0,\ t \geq 0$, jei susitarsime laikyti

$$p_{jk}(0) = \begin{cases} 1, & \text{kai } j = k, \\ 0, & \text{kai } j \neq k. \end{cases}$$

Tolydaus laiko grandinių egzistavimo klausimai sprendžiami analogiškai atvejui, kai laikas diskretus.

Kai išpildomos gana bendros sąlygos, perėjimo tikimybės tenkina tam tikras diferencialines lygtis. Tarkime, kad grandinė turi tik baigtinį būsenų skaičių ir perėjimo tikimybės tenkina sąlygas

$$\begin{aligned} 1 - p_{kk}(\Delta t) &= \lambda_k \Delta t + o(\Delta t), \\ p_{jk}(\Delta t) &= \lambda_{jk} \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \tag{2}$$

Antroji sąlyga rodo, kad tikimybė pereiti iš j-osios būsenos į k-ąją, kai j ir k skirtingi, per nedidelį laiko tarpą Δt yra proporcinga to laikotarpio ilgiui aukštesnės eilės nykstamo dydžio tikslumu. Pirmoji sąlyga reiškia, kad tikimybė išeiti iš k-osios būsenos į kurią nors kitą būseną per mažą laiko tarpą Δt yra proporcinga to laikotarpio ilgiui aukštesnės eilės nykstamo dydžio tikslumu. λ_k galima vadinti išėjimo iš k-osios būsenos, o λ_{jk} – *perėjimo* iš j-osios būsenos į k-ąją *tankiais*, arba *intensyvumais*.

Iš (1) formulės

$$p_{jk}(t + \Delta t) = \sum_l p_{jl}(\Delta t) p_{lk}(t).$$

Pasinaudoję (2) sąlygomis, gauname

$$\begin{aligned} p_{jk}(t+\Delta t) = \big(1 - \lambda_j \Delta t + o(\Delta t)\big) p_{jk}(t) + \\ + \sum_{l \neq j} \big(\lambda_{jl} \Delta t + o(\Delta t)\big) p_{lk}(t). \end{aligned}$$

Iš čia

$$\frac{p_{jk}(t+\Delta t)-p_{jk}(t)}{\Delta t}=-\lambda_j p_{jk}(t)+\sum_{l\neq j}\big(\lambda_{jl}+o(1)\big)p_{lk}(t).$$

Kai $\Delta t\to 0$, dešinioji pusė turi ribą. Todėl ribą turi ir kairioji pusė. Gauname diferencialinę lygtį

$$p'_{jk}(t)=-p_{jk}(t)\lambda_j+\sum_{l\neq j}\lambda_{jl}p_{lk}(t).$$

Ji vadinama *tiesiogine Kolmogorovo–Felerio diferencialine lygtimi.*

Vėl pasinaudoję (1) lygybe, gauname

$$p_{jk}(t+\Delta t)=\sum_{l}p_{jl}(t)p_{lk}(\Delta t).$$

Iš šios lygybės ir (2) sąlygų analogiškai gauname lygtį

$$p'_{jk}(t)=-p_{jk}(t)\lambda_k+\sum_{l\neq k}p_{jl}(t)\lambda_{lk},$$

vadinamą *atvirkštine Kolmogorovo–Felerio diferencialine lygtimi.*

Jei tenkinamos papildomos sąlygos, abi tos lygtys teisingos ir tada, kai būsenų skaičius yra begalinis. Pavyzdžiui, tiesioginių lygčių įrodymas yra teisingas ir tada, kai būsenų yra be galo daug, jei (2) sąlygose liekamųjų narių įvertinimai $o(\Delta t)$ yra tolygūs k atžvilgiu ir fiksuotam k dydžiai λ_{jk} yra tolygiai aprėžti.

Galime gauti diferencialines lygtis ir tikimybėms $p_k(t)$:

$$p'_k(t)=\sum_{l}p_l(t)\lambda_{lk}\ \ (k=1,2,\ldots). \tag{3}$$

Ir tolydžiojo laiko grandinėms įvesime *ergodiškumo koeficiento* sąvoką. Jis apibrėžiamas analogiškai:

$$\rho(t)=1-\frac{1}{2}\sup_{j,k}\sum_{l}|p_{jl}(t)-p_{kl}(t)|.$$

Jei kuriam nors $t_0>0$ ergodiškumo koeficientas $\rho(t_0)>0$, tai, kaip ir 17 skyrelyje, galime įrodyti ergodiškumo teoremą: egzistuoja ribos $p^*_k(k=$ $=1,2,\ldots)$

$$\lim_{t\to\infty}p_{jk}(t)=p^*_k,$$

$$\lim_{t\to\infty}p_k(t)=p^*_k,$$

be to,

$$|p_{jk}(t) - p_k^*| \le Ce^{-Dt},$$
$$|p_k(t) - p_k^*| \le Ce^{-Dt};$$

čia

$$C = \frac{1}{1-\rho(t_0)}, \ D = \frac{1}{t_0} \ln \frac{1}{1-\rho(t_0)}.$$

Jei teisingos ką tik minėtos sąlygos ir būsenų skaičius yra baigtinis, tai ribinės tikimybės p_k^* visiems t tenkina lygybę

$$p_k^* = \sum_j p_j^* p_{jk}(t) \ (k = 1, 2, ...). \tag{4}$$

Vėl galime kalbėti apie stacionarųjį pasiskirstymą. Apskritai, kai laikas yra tolydus, tikimybių pasiskirstymą $p_k^* (k = 1, 2, ...)$, tenkinantį (4) sąlygą, vadinsime *stacionariuoju*.

Stacionariosioms tikimybėms $p_k^* = p_k(t)$ (3) diferencialinės lygtys virsta šitokiomis:

$$\sum_l p_l^* \lambda_{lk} = 0 \ (k = 1, 2, ...), \tag{5}$$

nes tada $p_k'(t) = 0$.

Markovo grandinės yra tik specialūs atvejai daug bendresnių Markovo procesų. Kalbant ne visai griežtai, tai yra procesai $X(t)$, kiekvienam t turintys savybę: jei žinoma atsitiktinio proceso reikšmė $X(t)$ laiko momentu t, tai proceso eiga po laiko momento t nepriklausys nuo jo eigos iki to momento. Kitaip tariant, tikimybė bet kurio įvykio, susijusio su būsima proceso eiga, kai jo dabartinė būklė tiksliai žinoma, nepasikeis, atsižvelgus į papildomą informaciją apie proceso praeitį. Vaizdžiai kalbant, procesas neturi "atminties".

Knygos apimtis neleidžia plačiau nagrinėti tų procesų. Todėl susipažinsime tik su kai kuriomis sąvokomis.

Pirmiausia apibrėšime Markovo procesą.

Imkime tikimybinę erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, aibę $T \subset R$ ir būsenų erdvę $\{\Gamma, \mathcal{E}\}$. Tarkime, kad duotas procesas $\{X(t), t \in T\}$, įgyjantis reikšmes iš Γ. Pažymėkime $\mathcal{A}_T$ mažiausią σ algebrą, kuriai priklauso visi įvykiai $\{X(s) \in E\}, \ E \in \in \mathcal{E}, \ s \in T$,

$$\mathcal{A}_T = \sigma\{X(s), \ s \in T\} = \sigma\Big\{\{X(s) \in E\}, \ s \in T, \ E \in \mathcal{E}\Big\}.$$

Analogiškai apibrėžiamos σ algebros

$$\mathcal{A}_{T\cap(-\infty,t]} = \sigma\{X(s), \ s \in T, \ s \le t\},$$
$$\mathcal{A}_{T\cap[t,\infty)} = \sigma\{X(s), \ s \in T, \ s \ge t\}$$

(reikia tik parametrų aibę T pakeisti kitomis). Atsitiktinis procesas $\{X(t),\ t \in \in T\}$ vadinamas Markovo procesu, jei bet kuriems $s, t \in T, s < t$, ir bet kurioms $A \in \mathcal{A}_{T \cap [t,\infty)}$ beveik visur tikimybinio mato P prasme

$$P(A|\mathcal{A}_{T \cap (-\infty,s]}) = P\big(A|X(s)\big).$$

Šį apibrėžimą galima pakeisti jam ekvivalenčiu. Procesas $X(t)$ yra Markovo procesas, jei bet kuriam natūraliajam n, bet kuriems $t_1, t_2, ..., t_n,\ t \in T$ su sąlyga $t_1 < t_2 < ... < t_n < t$ ir bet kuriai aibei $E \in \mathcal{E}$

$$P\big(X(t) \in E|X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)\big) = P\big(X(t) \in E|X(t_n)\big)$$

beveik visur mato P prasme.

Yra ir daugiau ekvivalenčių Markovo proceso apibrėžimų.

Kintamųjų $s, t \in T,\ x \in \Gamma,\ E \in \mathcal{E}$ funkcija $p(s, x, t, E)$ yra vadinama Markovo proceso *perėjimo funkcija*, jei ji tenkina sąlygas:

1) visiems $s, t \in T,\ x \in \Gamma$ funkcija $p(s, x, t, \cdot)$ yra tikimybinis matas σ algebroje $\mathcal{E}$;

2) visiems $s, t \in T,\ E \in \mathcal{E}$ funkcija $p(s, \cdot, t, E)$ yra $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ mati;

3) visiems $s \in T,\ x \in \Gamma,\ E \in \mathcal{E}$ funkcija $p(s, x, s, E)$ yra aibės E indikatorius

$$p(s, x, s, E) = \mathbf{1}_E(x);$$

4) visiems $s, t \in T,\ E \in \mathcal{E}$ beveik visur mato P atžvilgiu

$$p\big(s, X(s), t, E\big) = p\big(X(t) \in E|X(s)\big).$$

Vaizdžiai kalbant, $p(s, x, t, E)$ yra tikimybė, kad procesas laiko momentu t pateks į būsenų aibę E, jei laiko momentu $s \le t$ jis buvo būsenoje x. Todėl perėjimo funkcija vadinama ir *perėjimo tikimybe*.

Kiekvienas Markovo procesas su būsenų erdve $\{R^k, \mathcal{B}^k\}$ turi perėjimo funkciją. Ji egzistuoja ir tada, kai būsenų erdvė yra separabili pilna metrinė erdvė su atitinkama Borelio aibių σ algebra. Šiuo atveju perėjimo funkcija turi dar ir šitokią savybę:

5) visiems $s, t, u \in T,\ s \le u \le t,\ E \in \mathcal{E}$ beveik visur mato P_s atžvilgiu teisinga lygybė

$$p(s, x, t, E) = \int_{R^k} p(u, y, t, E) p(s, x, u, dy);$$

čia P_s yra lygybės $P_s(E) = P(X(s) \in E)$ nusakytas matas σ algebroje $\mathcal{E}$.

Ši savybė paprastai vadinama Čepmeno[1]–Kolmogorovo lygtimi.

[1] Douglas George Chapman (g. 1920 m.) – amerikiečių matematikas.

Tarkime, kad T yra viena iš aibių $R, [0,\infty), (0,\pm 1,\pm 2,...)$ arba $\{0,1, 2,...\}$. Markovo procesas $\{X(t),\ t\in T\}$ vadinamas *homogeniniu*, jei bet kuriems $s,t,u\in T,\ s\le t,\ x\in\Gamma,\ E\in\mathcal{E}$

$$p(s+u,x,t+u,E)=p(s,x,t,E).$$

Tada funkcijos $p(s,x,t,E)$ reikšmės priklauso tik nuo skirtumo $t-s, x$ ir E. Todėl galima žymėti $p(0,x,t,E)=p(t,x,E)$. Ši funkcija paprastai ir vadinama homogeninio Markovo proceso *perėjimo funkcija.*

Nesunku suvokti, kad Markovo grandinės yra specialūs Markovo procesų atvejai.

Paminėsime dar vieną pavyzdį.

Imkime seką nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $Y_1, Y_2, ...$, įgyjančių tik sveikąsias reikšmes. Pažymėkime $X(n)=Y_1+...+Y_n$, $X(0)=0$. Sumos $X(n)$ $(n=0,1,...)$ sudaro diskrečiojo laiko homogeninę Markovo grandinę. Jei atsisakytume reikalavimo, kad atsitiktiniai dydžiai Y_k įgyja tik sveikąsias reikšmes, jų sumos $X(n)(n=0,1,...)$ sudarytų bendresnį diskrečiojo laiko Markovo procesą. Dar bendresnį Markovo procesą gautume, atsisakę reikalavimo, kad dydžiai Y_k yra vienodai pasiskirstę.

Be Markovo procesų pastaruoju metu svarbų vaidmenį procesų teorijoje vaidina martingalai, įvesti 1929 m. Dubo[1].

Tarkime, kad $\{\Omega,\mathcal{A},P\}$ yra tikimybinė erdvė T – netuščia realiųjų skaičių aibė ir $\{\mathcal{A}_t, t\in T\}$ – σ algebrų sistema, tenkinanti sąlygas $\mathcal{A}_s\subset\mathcal{A}_t\subset\mathcal{A}$ visiems $s,t\in T,\ s\le t$. Realusis atsitiktinis procesas $\{X(t),\ t\in T\}$ yra vadinamas *martingalu* σ algebrų sistemos $\{\mathcal{A}_t\}$ atžvilgiu, jei

1) kiekvienam $t\in T$ atsitiktinis dydis $X(t)$ yra integruojamas ir $\mathcal{A}_t$ matus;

2) visiems $s,t\in T,\ s\le t$, beveik visur

$$X(s)=M\big(X(t)|\mathcal{A}_s\big).$$

Antrąją sąlygą galima užrašyti ir kitu ekvivalenčiu pavidalu: visiems $s,t\in$ $\in T,\ s\le t$, ir visoms aibėms $A\in\mathcal{A}_s$

$$\int_A X(s,\omega)P(d\omega)=\int_A X(t,\omega)P(d\omega).$$

Jei antrojoje sąlygoje lygybės ženklą pakeistume ženklu $\le$, gautume *submartingalą*, o jei pakeistume ženklu $\ge$, gautume *supermartingalą*.

Jei $\mathcal{A}_t=\sigma\{X(s),\ s\le t\}$ yra mažiausia σ algebra, kurios atžvilgiu visi $X(t),\ s,\ t\in T,\ s\le t$, yra matūs, tai martingalai tos σ algebrų sistemos atžvilgiu tiesiog vadinami martingalais. Galima būtų įrodyti, kad

---

[1] Joseph Leo Doob (g. 1910 m.) – amerikiečių matematikas.

kiekvienas martingalas σ algebrų sistemos $\{\mathcal{A}_t,\ t \in T\}$ atžvilgiu yra martingalas pastarąja prasme. Tas pats tinka ir submartingalams bei supermartingalams.

Paminėsime paprastą pavyzdį, kuriuo remiantis buvo įvesta martingalo sąvoka.

Tarkime, kad $\{Y_n\}$ yra seka nepriklausomų integruojamų atsitiktinių dydžių su sąlygomis $MY_n = 0$. Pažymėkime jų dalines sumas $X(n) = Y_1 + ... + Y_n$. Iš sąlyginių vidurkių savybių išplaukia, kad beveik visur

$$M\big(X(n+1)|Y_1,...,Y_n\big) = M\big(X(n) + Y_{n+1}|Y_1,...,Y_n\big) =$$
$$= X(n) + M(Y_{n+1}|Y_1,...,Y_n) = X_n + M(Y_{n+1}) = X(n).$$

Nesunku suvokti, kad sąlyginius vidurkius $Y_1,...,Y_n$ atžvilgiu galime pakeisti sąlyginiais vidurkiais $X(1),...,X(n)$ atžvilgiu.

Matome, kad seka $X(n)$ $(n = 1, 2, ...)$ yra martingalas.

19. BRAUNO IR PUASONO PROCESAI

Susipažinsime su dviem specialiais Markovo procesais: Brauno ir Puasono. Tai – palyginti gana paprasti procesai, bet labai plačiai taikomi praktikoje. Jie turėjo nemažai reikšmės bendrajai atsitiktinių procesų raidai. Tiems procesams apibrėžti įvesime keletą bendresnių sąvokų.

Atsitiktinis procesas $\{X(t),\ t \in T \subset R\}$, įgyjantis reikšmes iš R, yra vadinamas *procesu su nepriklausomais pokyčiais*, jei bet kuriems $t_k \in T$ $(k = 1,...,n)$, $t_1 < ... < t_n$, atsitiktiniai dydžiai

$$X(t_n) - X(t_{n-1}),\ X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), ..., X(t_2) - X(t_1)$$

yra nepriklausomi.

Procesas su nepriklausomais pokyčiais yra vadinamas *homogeniniu*, jei bet kuriems $t_1, t_2, t_1 + t, t_2 + t \in T$ atsitiktiniai dydžiai

$$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_2 + t) - X(t_1 + t)$$

yra vienodai pasiskirstę, kitaip tariant, jei atsitiktinio dydžio $X(t_2) - X(t_1)$ pasiskirstymas priklauso tik nuo intervalo $t_2 - t_1$ ilgio, bet ne nuo pačių t_1 ir t_2.

Procesas su nepriklausomais pokyčiais yra Markovo procesas. Jei kiekvienam $t \in T$ atsitiktinis dydis yra integruojamas, tai $\{X(t) - MX(t),\ t \in T\}$ yra martingalas. Galima įrodyti, kad toks procesas egzistuoja.

(Vienamačiu) *Brauno procesu* vadinamas homogeninis procesas su nepriklausomais pokyčiais $\{W(t),\ t \in [0, \infty)\}$, kuriam $P(W(0) = 0) = 1$ ir bet kuriems $s,\ t,\ 0 \le s < t$, pokytis $W(t) - W(s)$ yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį $N(0, t - s)$.

Šio proceso tyrimai turi ilgoką istoriją. 1827 m. R. Braunas[1], stebėdamas pro mikroskopą mažytes kietas daleles skystyje, pamatė, kad jos labai netaisyklingai juda. Panašiai juda mažytės dulkelės ore. To proceso mechanizmo išaiškinimas buvo vienas iš didžiausių statistinės mechanikos bei kinetinės teorijos laimėjimų. Paaiškėjo, kad netaisyklingą dalelių judėjimą sukelia aplinkos molekulių bombardavimas. Brauno judėjimo teorijos matematinius pagrindus 1923 m. padėjo N. Vyneris[2], todėl šis procesas dažnai vadinamas jo vardu. Vėliau tas procesas buvo plačiai pritaikytas įvairiose srityse: kvantų mechanikoje, statistikoje, radiotechnikoje ir t. t. Tik čia dažniausiai tenka kalbėti ne apie vienamatį, o trimatį procesą, kuris nuo apibrėžtojo skiriasi tik tuo, kad $W(t)$ įgyja reikšmes erdvėje R^3, o jo komponentai yra nepriklausomi vienamačiai Brauno procesai.

Brauno procesą $\{W(t),\ 0 \le t < \infty\}$ galima nusakyti ir kaip homogeninį Markovo procesą su perėjimo funkcija

$$p(t,x,E) = \int_E \varphi(t,x,y)dy,$$

kai $\varphi(t,x,y)$ yra parabolinės diferencialinės lygties

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{1}$$

fundamentalusis sprendinys. Jis lygus

$$\varphi(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{2t}\Big).$$

(1) lygtis yra specialus atvejis lygčių, kurias tenkina gana plačios Markovo procesų klasės perėjimo funkcijos.

Brauno procesas nėra toks paprastas, kaip gali atrodyti. Galima įrodyti, kad su tikimybe 1 Brauno proceso trajektorijos yra tolydžios, bet visuose taškuose nediferencijuojamos funkcijos.

Panagrinėsime kiek detaliau kitą – Puasono procesą. Taip vadinsime homogeninį tolydaus laiko procesą $\{X(t),\ t \in [0,\infty)\}$ su nepriklausomais pokyčiais, jei $X(t) - X(0)$ yra pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį su parametru λt. Čia λ yra teigiamas skaičius; jis vadinamas proceso *intensyvumu.* Dėl paprastumo laikysime $P(X(0)=0)=1$.

Tokio proceso egzistavimas išplaukia iš Kolmogorovo teoremos, nes pokyčio nepriklausomumas ir proceso homogeniškumas bei pokyčio pasiskirstymas pagal Puasono dėsnį indukuoja suderintus baigtiniamačius pasiskirstymus.

---

[1] Robert Brown (1773–1858) – anglų botanikas.

[2] Norbert Wiener (1894–1964) – amerikiečių matematikas.

Puasono procesas gerai atitinka daugelį realių procesų. Paminėsime keletą pavyzdžių. Skaičius radioaktyviosios medžiagos atomų, suskilusių per laikotarpį $(0,t]$, yra atsitiktinis procesas, kurio matematinis modelis gali būti Puasono procesas. Duota sudėtinga radiotechninė schema iš vienodų detalių. Skaičius detalių, kurios sugenda per laikotarpį $(0,t]$, taip pat dažnai aprašomas Puasono procesu. Taip pat galima aprašyti matematiškai telefono skambučių geležinkelio stoties informacinėje per ilgio t laikotarpį, sakysime, maždaug tuo pačiu darbo dienos metu (įvairiu paros metu, aišku, skambučių skaičius bus skirtingai pasiskirstęs – naktį jų bus mažiau).

Puasono procesą galime gauti pagal šitokią schemą.

Sakykime, tiriame atsitiktinį įvykį A – stebime jo įvykimus laiko intervale $(0,\infty)$. Pažymėkime $X(t)$ to įvykio įvykimų skaičių laikotarpiu $(0,t]$. Tai gali būti, pavyzdžiui, skaičius suskilusių radioaktyviosios medžiagos atomų, sugedusių radiotechninės schemos detalių, telefono skambučių ir pan. Vadinasi, $X(t)$ įgis tik sveikąsias neneigiamas reikšmes. Susitarsime laikyti $P(X(0)=0)=1$. Pareikalausime, kad būtų tenkinamos sąlygos.

1. Procesas turi būti su nepriklausomais pokyčiais, t. y. įvykio A įvykimų skaičiai per įvairius vienas kito nedengiančius laiko tarpus turi būti nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

2. Jis turi būti homogeninis, t. y. tikimybė, kad įvykis A įvyks kurį nors skaičių kartų, turi priklausyti tik nuo stebėjimo trukmės.

3. Kai $t \to 0$,

$$P\big(X(t)>1\big)=o(t);$$

tai reiškia, kad per trumpą laiko tarpą įvykis A praktiškai negali įvykti daugiau kaip vieną kartą.

Atkreipsime dėmesį, kad ši sąlyga Puasono proceso atveju išplaukia iš jo apibrėžimo. Turime

$$\begin{aligned} P\big(X(t)>1\big) &= e^{-\lambda t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} < \\ &< e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} = (\lambda t)^2/2 = o(t). \end{aligned}$$

4. Visiems $t>0$ turi būti teisinga nelygybė

$$0<P\big(X(t)>0\big)<1.$$

Tiesą pasakius, kaip vėliau matysime, užtenka reikalauti, kad

$$0<P\big(X(1)>0\big)<1.$$

Šia sąlyga atmetami atvejai, kai įvykis A su tikimybe 1 negali įvykti per jokį laikotarpį arba kai jis su tikimybe 1 per bet kurį laikotarpį įvyksta be galo daug kartų.

Įrodysime, kad visos tos sąlygos nusako Puasono procesą. Tuo tikslu reikės įrodyti, kad

$$p_k(t) = P\big(X(t) = k\big) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \ (k = 0, 1, ...);$$

čia λ yra kokia nors teigiama konstanta.

Iš užrašytųjų sąlygų išplaukia, kad

$$p_k(0) = \begin{cases} 1, & \text{kai } k = 0, \\ 0, & \text{kai } k \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Remdamiesi 4 sąlyga, pažymėkime

$$p_0(1) = 1 - P\big(X(1) > 0\big) = e^{-\lambda};$$

čia λ yra teigiama konstanta.

Įvykis A nė karto neįvyks laikotarpiu $(0, l/n]$, jei jis nė karto neįvyks laikotarpiais

$$\Big(0, \frac{1}{n}\Big], \ \Big(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\Big], ..., \Big(\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\Big].$$

Todėl iš 1 ir 2 sąlygų išplaukia

$$P\bigg(X\Big(\frac{l}{n}\Big) = 0\bigg) = P\bigg(\bigcap_{j=1}^{l} \Big\{X\Big(\frac{j}{n}\Big) - X\Big(\frac{j-1}{n}\Big) = 0\Big\}\bigg) =$$

$$= P^l\bigg(X\Big(\frac{1}{n}\Big) = 0\bigg).$$

Kai $l = n$,

$$P\big(X(1) = 0\big) = e^{-\lambda} = p_0^n\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Todėl

$$p_0\Big(\frac{1}{n}\Big) = e^{-\lambda/n}, \ p_0\Big(\frac{l}{n}\Big) = e^{-\lambda l/n}.$$

Vadinasi, bet kuriam neneigiamam racionaliajam skaičiui r

$$p_0(r) = e^{-\lambda r}.$$

Tarkime, kad t yra bet kuris realusis neneigiamas skaičius, nebūtinai racionalusis. Galėsime rasti du racionaliuosius skaičius r_1 ir r_2, tenkinančius nelygybes $0 \leq r_1 \leq t \leq r_2$. Kadangi $p_0(t)$ yra nedidėjanti funkcija, tai

$$p_0(r_1) \geq p_0(t) \geq p_0(r_2),$$

vadinasi,

$$e^{-\lambda r_1} \geq p_0(t) \geq e^{-\lambda r_2}.$$

Tačiau racionaliuosius skaičius r_1, r_2 galime parinkti kiek norima artimus skaičiui t. Todėl visiems neneigiamiems t

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{3}$$

Tirsime $p_k(t)$, kai $k \geq 1$. Įvykį, kai A laikotarpiu $(0, t + \Delta t]$ įvyksta k kartų, galima suskaidyti į $k + 1$ atvejų: laikotarpiu $(0, t]$ jis įvyksta k kartų, o laikotarpiu $(t, t+\Delta t]$ – nė karto; laikotarpiu $(0, t]$ tas įvykis įvyksta $k-1$ kartų, o laikotarpiu $(t, t + \Delta t]$ – vieną kartą; ...; laikotarpiu $(0, t]$ įvykis A neįvyksta nė karto, o laikotarpiu $(t, t + \Delta t]$ įvyksta k kartų. Iš tikimybės adityvumo ir proceso homogeniškumo bei pokyčių nepriklausomumo išplaukia

$$p_k(t + \Delta t) = \sum_{j=0}^{k} p_j(t) p_{k-j}(\Delta t).$$

Iš (3) sąlygos

$$p_j(\Delta t) = o(\Delta t),$$

kai $\Delta t \to 0$ ir $j > 1$. Todėl

$$p_k(t + \Delta t) = p_0(\Delta t) p_k(t) + p_1(\Delta t) p_{k-1}(t) + o(\Delta t).$$

Be to, iš lygybės

$$P\big(X(\Delta t) = 0\big) + P\big(X(\Delta t) = 1\big) + P\big(X(\Delta t) > 1\big) = 1,$$

3 sąlygos ir (3) gauname

$$p_1(\Delta t) = 1 - p_0(\Delta t) + o(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} + o(\Delta t).$$

Vadinasi,

$$p_k(t + \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} p_k(t) + (1 - e^{-\lambda \Delta t}) p_{k-1}(t) + o(\Delta t).$$

Iš čia gauname lygybę

$$\frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \frac{e^{-\lambda \Delta t} - 1}{\Delta t} \big(p_k(t) - p_{k-1}(t)\big) + o(1).$$

Toje lygybėje pereiname prie ribos, kai $\Delta t \to 0$. Kadangi dešiniosios pusės riba egzistuoja, tai turi egzistuoti ir kairiosios. Gauname sistemą diferencialinių lygčių

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \ (k = 1, 2, ...). \tag{4}$$

Pakeisime

$$p_k(t) = e^{-\lambda t} v_k(t).$$

(2) pradinės sąlygos virs šitokiomis:

$$v_k(0) = \begin{cases} 1. & \text{kai } k = 0, \\ 0, & \text{kai } k \geq 1. \end{cases}$$

(4) lygtys bus pavidalo

$$\frac{dv_k(t)}{dt} = \lambda v_{k-1}(t) \ (k = 1, 2, ...),$$

be to, pagal (3) bus $v_0(t) = 1$. Iš eilės spręsdami tas lygtis, gausime

$$v_1(t) = \lambda t, \ v_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!}, ..., \ v_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Vadinasi,

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \ (k = 1, 2, ...).$$

Nesunku suvokti, kad Puasono procesą galima traktuoti kaip tolygaus laiko homogeninį Markovo procesą $\{X(t), \ 0 \leq t < \infty\}$ su būsenų aibe $\{0, 1, ...\}$ ir perėjimo tikimybėmis

$$\begin{aligned} p_{jk}(t) &= P\big(X(t_0 + t) = k | X(t_0) = j\big) = \\ &= \frac{P\big(X(t_0) = j, X(t_0 + t) - X(t_0) = k - j\big)}{P\big(X(t_0) = j\big)} = \\ &= P\big(X(t_0 + t) - X(t_0) = k - j\big) = \frac{(\lambda t)^{k-j}}{(k - j)!} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

kai $k \geq j$, ir $p_{ij}(t) = 0$, kai $k < j$.

Paminėsime dar vieną Puasono proceso konstravimo būdą. Sakykime, duota seka nepriklausomų atsitiktinių dydžių $\xi_1, \xi_2, ...$, turinčių tą patį eksponentinį pasiskirstymą (žr. II.5.9 pvz.) su tankio funkcija

$$q(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$$

čia λ – teigiama konstanta. Konstruosime procesą $\{X(t),\ 0 \le t < \infty\}$. Imame $X(0) = 0$. Pažymėkime $X(t)$ skaičių taškų su koordinatėmis $\tau_1 = \xi_1, \tau_2 = \xi_1 + \xi_2, ..., \tau_k = \xi_1 + ... + \xi_k, ...$ intervale $(0, t]$. Parodysime, kad $\{X(t),\ 0 \le t < \infty\}$ yra Puasono procesas.

Apskaičiuosime tikimybę $p_k(t) = P(X(t) = k)$. Realiesiems u imkime integralą

$$\int_0^\infty e^{iux - \lambda x} dx = \frac{1}{\lambda - iu}. \tag{5}$$

Vadinasi, kiekvieno iš atsitiktinių dydžių ξ_k charakteristinė funkcija

$$f_{\xi_k}(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu},$$

o sumos τ_k charakteristinė funkcija

$$f_{\tau_k}(u) = f_{\xi_1}^k(u) = \frac{\lambda^k}{(\lambda - iu)^k}.$$

Diferencijuodami (5) lygybę $k-1$ kartų pagal parametrą λ, gauname

$$\int_0^\infty x^{k-1} e^{iux - \lambda x} dx = \frac{(k-1)!}{(\lambda - iu)^k}.$$

Todėl sumos τ_k tankio funkcija

$$q_{\tau_k}(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0, \\ \dfrac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$$

Intervale $(0, t]$ turime k nagrinėjamų taškų tada ir tik tada, kai $\tau_k \le t$ ir $\tau_{k+1} = \tau_k + \xi_{k+1} > t$. Todėl

$$p_k(t) = P(\tau_k \le t, \tau_k + \xi_{k+1} > t) = P(\tau_k \le t,\ \xi_{k+1} > t - \tau_k).$$

Tačiau dydžiai τ_k ir ξ_{k+1} yra nepriklausomi. Vadinasi,

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \int_0^t \int_{t-x}^\infty q_{\tau_k}(x) q(y) dx dy = \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^t x^{k-1} e^{-\lambda x} dx \int_{t-x}^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy = \\ &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t x^{k-1} dx = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Nesunku patikrinti, kad procesas $\{X(t),\ 0 \le t < \infty\}$ yra homogeninis ir turi nepriklausomus pokyčius. Vadinasi, jis yra Puasono procesas.

20. DAUGINIMOSI IR NYKIMO PROCESAS

Šiek tiek apibendrinsime praeitame skyrelyje aprašytąją schemą. Sakykime, turime automatinę telefono stotį, kurią jungia su abonentais daugybė linijų. Kartkartėmis abonentai naudojasi telefonu. Užimtų linijų skaičius nuolat keičiasi. Svarbu žinoti ne tik kiek abonentų naudojasi telefonu per kurį nors laiko tarpą, bet ir kiek linijų yra užimtos konkrečiu momentu. Panašiai yra ir kitose masinio aptarnavimo sistemose: geležinkelio, aviacijos, autobusų ir t. t. bilietų kasose, parduotuvėse ir pan. Čia kreipiasi vis nauji klientai, jie aptarnaujami, o laukiančių eilėse klientų skaičius nuolat kinta.

Panašūs klausimai iškyla ir biologijoje, nagrinėjant kurios nors populiacijos didumo kitimą: gimsta nauji individai, kiti miršta.

Tokiems procesams aprašyti dažnai tinka dauginimosi ir nykimo procesas, kurį dabar nagrinėsime. Kalbėsime apie signalus, kurie atsiranda arba išnyksta. Pažymėsime $X(t)$ signalų skaičių laiko momentu t. Tarsime, kad signalų skaičius nėra ribotas (idealizacija!). Vadinasi, kalbėsime apie atsitiktinį procesą $\{X(t), 0 \le t < \infty\}$, kurio būsenų aibė yra $\{0, 1, 2, ...\}$. Reikalausime, kad būtų tenkinamos šitokios sąlygos.

1. Procesas turi būti su nepriklausomais pokyčiais.

2. Jis turi būti homogeninis.

3. Jei momentu t yra k signalų, tai tikimybė naujam signalui atsirasti ir nė vienam neišnykti laikotarpiu $(t, t + \Delta t]$ yra

$$\lambda_k \Delta t + o(\Delta t),$$

kai $\Delta t \to 0$. Jei momentu t yra k signalų, tai tikimybė vienam iš jų išnykti ir neatsirasti nė vienam naujam signalui laikotarpiu $(t, t + \Delta t]$ yra

$$\mu_k \Delta t + o(\Delta t),$$

kai $\Delta t \to 0$. Čia λ_k ir μ_k yra neneigiami skaičiai. Tikimybė, kad laikotarpiu $(t, t + \Delta t]$ atsiras ne mažiau kaip k naujų signalų ir išnyks ne mažiau kaip l signalų, yra $o(\Delta t)$, kai $k + l \ge 2$ ir $\Delta t \to 0$.

Turime tolydaus laiko homogeninę Markovo grandinę su būsenų aibe $\{0, 1, ...\}$. Perėjimo tikimybės $p_{jk}(t)$ tenkina sąlygas (plg. 18 skyrelio (2) sąlygas)

$$\begin{aligned} p_{jk}(\Delta t) &= o(\Delta t), \text{kai } |j - k| \ge 2, \\ p_{k,k+1}(\Delta t) &= \lambda_k \Delta t + o(\Delta t), \text{kai } k = 0, 1, ..., \\ p_{k,k-1}(\Delta t) &= \mu_k \Delta t + o(\Delta t), \text{kai } k = 1, 2, ..., \\ p_{kk}(\Delta t) &= 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t + o(\Delta t), \text{kai } k = 0, 1, ...; \end{aligned}$$

čia visur $\Delta t \to 0$; $\mu_0 = 0$. Be to, reikalausime, kad būtų $p_{jk}(0) = 0$, kai $j \neq k$, ir $p_{kk}(0) = 1$. Gauname tiesioginių diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{aligned} &p'_{0k}(t) = -\lambda_0 p_{0k}(t) + \lambda_0 p_{1k}(t) \quad (k = 0, 1, ...),\\ &p'_{jk}(t) = \mu_k p_{j-1,k}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{jk}(t) + \lambda_k p_{j+1,k}(t)\\ &\qquad (j = 1, 2, ...; k = 0, 1, ...) \end{aligned}$$

ir atvirkštinių

$$\begin{aligned} &p'_{j0}(t) = -\lambda_0 p_{j0}(t) + \mu_1 p_{j1}(t) \quad (j = 0, 1, ...),\\ &p'_{jk}(t) = \lambda_{k-1} p_{j,k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_{jk}(t) + \mu_{k+1} p_{j,k+1}(t)\\ &\qquad (j = 0, 1, ...; k = 1, 2, ...). \end{aligned}$$

Pažymėję $p_k(t)$ tikimybę, kad laiko momentu t bus k signalų, turime diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{aligned} &p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t),\\ &p'_k(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t)\\ &\qquad (k = 1, 2, ...). \end{aligned}$$

Procesui apibrėžti dar reikia pradinių tikimybių $p_k(0)$.

Bendruoju atveju tas lygčių sistemas sunkoka išspręsti. Tačiau to ir nereikia, kai mums rūpi tikimybių $p_{jk}(t)$ ir $p_k(t)$ kitimo pobūdis dideliems t. Galima įrodyti, kad egzistuoja ribos

$$\lim_{t\to\infty} p_{jk}(t) = p_k^* \quad (j = 0, 1, ...; k = 0, 1, ...),$$

nepriklausančios nuo j ir tenkinančios lygtis

$$\begin{aligned} &-\lambda_0 p_0^* + \mu_1 p_1^* = 0,\\ &\lambda_{k-1} p_{k-1}^* - (\lambda_k + \mu_k) p_k^* + \mu_{k+1} p_{k+1}^* \quad (k = 1, 2, ...). \end{aligned}$$

Iš čia indukcijos metodu gauname

$$\mu_k p_k^* = \lambda_{k-1} p_{k-1}^* \quad (k = 1, 2, ...).$$

Jei $\mu_k > 0$ visiems $k = 1, 2, ...$, tai

$$p_k^* = p_0^* \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdots \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \quad (k = 1, 2, ...).$$

Seka $\{p_k^*\}$ nusako stacionarųjį pasiskirstymą, kai visų p_k^* suma lygi 1. Jei eilutė

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 ... \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 ... \mu_n}$$

konverguoja, tai

$$p_k^* = \frac{\dfrac{\lambda_0\lambda_1 ... \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2 ... \mu_k}}{1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 ... \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 ... \mu_n}} \qquad (k = 1, 2, ...).$$

Jei (1) eilutė diverguoja, tai būtinai $p_k^* = 0$. Tada ribinis stacionarusis pasiskirstymas neegzistuoja.

Panagrinėsime specialų dauginimosi ir nykimo procesą, kuris svarbus masinio aptarnavimo teorijoje. Sakykime, turime sistemą, kuri vienu metu gali aptarnauti m klientų. Tarkime, jog sistemoje iš viso yra m linijų ir klientą gali aptarnauti bet kuri laisva linija. Jei visos linijos užimtos, tai klientas lieka neaptarnautas ir jis iš aptarnavimo sistemos iškrenta (eilių nėra).

Mums rūpi užimtų linijų skaičius, kurį laiko momentu t žymėsime $X(t)$. Taigi būsenų aibė yra $\{0, 1, ..., m\}$. Laikysime, kad procesas tenkina dauginimosi ir nykimo proceso sąlygas su $\lambda_k = \lambda_0 > 0$ $(k = 1, 2, ..., m-1)$, $\lambda_k = 0$ $(n = m, m+1, ...)$, $\mu_k = k\mu$ $(k = 1, ..., m)$, $\mu > 0$, $\mu_k = 0$ $(k = m+1, ...)$. Šiuo atveju ribinis stacionarusis pasiskirstymas egzistuoja ir ribinės tikimybės yra

$$p_k^* = \frac{\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \qquad (k = 0, 1, ..., m).$$

Tos formulės vadinamos jų autoriaus – vieno iš masinio aptarnavimo teorijos pionierių – Erlango[1] vardu.

[1] Agner Krarup Erlang (1878–1929) – danų mokslininkas.