# I skyrius. TIKIMYBĖS SĄVOKA

## 1. ATSITIKTINIAI ĮVYKIAI

Mus supančiame pasaulyje kiekvienas reiškinys yra susijęs su daugybe kitų reiškinių. Ryšiai tarp vienų reiškinių yra stipresni, tarp kitų – silpnesni. Kiekviena mokslo šaka paprastai nagrinėja tik nedidelį tų ryšių skaičių, nustato nagrinėjamų reiškinių pagrindinius dėsningumus, kurie atspindi jų esminius ryšius. Daugelis ryšių lieka neištirti. Stebimi reiškiniai dažnai priklauso nuo tiek daug ryšių, kad praktiškai neįmanoma (o kartais ir nėra prasmės) jų visų išanalizuoti, norint nusakyti, kaip vyks tiriamasis reiškinys. Tenka tirti idealizuotus reiškinius, atsisakant daugelio (tam tikra prasme) antraeilių priežasčių. Todėl nustatytieji dėsniai veikia ne absoliučiai tiksliai, reiškiniai šiek tiek nuo jų nukrypsta. Nukrypimai, atsiradę todėl, kad neatsižvelgiama į daugelį ryšių, yra atsitiktiniai reiškiniai.

Neapibrėžtumo principas fizikoje teigia, kad kai kuriuos fizinius dydžius sieja toks ryšys, jog, pasiekus didesnį vieno dydžio matavimo tikslumą, kito dydžio matavimo tikslumas sumažėja. Galima kiek norint tobulinti tų dydžių tyrimo metodiką, bet jei pasiseks tiksliau išmatuoti vieną iš jų, tai kito dydžio matavimo tikslumas būtinai sumažės. Čia atsitiktinumas – ne žinių stokos išdava, o principinis dalykas, atspindįs reiškinio esmę.

Tikimybių teorija tiria matematikos metodais atsitiktinius reiškinius. Viena iš pagrindinių tos teorijos sąvokų yra atsitiktinio įvykio sąvoka. Įvykiu vadinsime kiekvieną faktą, kuris gali įvykti arba neįvykti, atlikus eksperimentą. Eksperimentu (bandymu, potyriu) suprasime kokių nors sąlygų realizavimą.

Įvykius skirstysime į būtinus, negalimus ir atsitiktinius. Panagrinėsime šias sąvokas.

Imkime loginę schemą: *realizavus sąlygų kompleksą $K$, įvyksta įvykis $A$.* Pailiustruosime tą schemą pavyzdžiais.

1 p a v y z d y s. Įmetame natrio gabalėlį į indą su vandeniu (sąlygų komplekso $K$ realizavimas). Įvyksta cheminė reakcija $2\mathrm{Na} + 2\mathrm{H_2O} = 2\mathrm{NaOH} + \mathrm{H_2}\uparrow$, gauname natrio šarmą ir vandenilį (įvykis $A$).

2 p a v y z d y s. Sujungiame pakrauto akumuliatoriaus gnybtus laidininku (sąlygų komplekso $K$ realizavimas). Laidininku teka elektros srovė (įvykis $A$).

Tokie įvykiai vadinami *būtinais* (sąlygų komplekso $K$ atžvilgiu). Kalbant apie kokio nors įvykio būtinumą, visada reikia turėti galvoje tų sąlygų kompleksą, kurio atžvilgiu įvykis nagrinėjamas. Pakeitus sąlygų kompleksą, įvykis gali tą savybę prarasti.

Galima ir šitokia schema: *realizavus sąlygų kompleksą $K$, įvykis $A$ neįvyksta.* Tada įvykis $A$ vadinamas *negalimu* (sąlygų komplekso $K$ atžvilgiu). Teiginys, kad koks nors įvykis yra negalimas duoto sąlygų komplekso atžvilgiu, logiškai yra tolygus teiginiui, kad jam priešingas įvykis yra būtinas to komplekso atžvilgiu.

Tačiau ne visi įvykiai yra būtini arba negalimi. Yra ir kitokių įvykių, kurių loginė schema šitokia: *realizavus sąlygų kompleksą $K$, įvykis $A$ gali įvykti, gali ir neįvykti.*

3 p a v y z d y s. Išmetus monetą (sąlygų komplekso $K$ realizavimas), herbas gali atsiversti (įvykis $A$), gali ir neatsiversti.

4 p a v y z d y s. Pirkome loterijos bilietą. Tiraže jis gali laimėti, bet (dažniausiai) gali ir nieko nelaimėti.

5 p a v y z d y s. Stebime radžio gabalėlį, sakykime, vieną sekundę. Per tą laiko tarpą bent vienas radžio atomų gali suskilti, gali ir nė vienas atomas nesuskilti.

6 p a v y z d y s. Automatinės staklės gamina detalę sudėtingiems mechanizmams. Tarkime, kad ji bus tinkama, jei jos ilgis bus tam tikrose leistinose ribose. Tačiau stakles veikia daugybė faktorių: virpesiai, kuriuos sukelia kitos staklės, esančios gamykloje, temperatūros svyravimai, oro srovės ir t. t. Todėl pagamintų detalių ilgis nebus vienodas – šiek tiek svyruos. Pirmosios paimtos detalės ilgis gali būti leistinose ribose (jei staklės gerai sureguliuotos ir laikomasi technologinio režimo, taip dažniausiai ir bus), gali ir nebūti.

Tokius įvykius, kurie, realizavus duotą sąlygų kompleksą, gali įvykti, bet gali ir neįvykti, vadiname *atsitiktiniais* (to sąlygų komplekso atžvilgiu). Mūsų pavyzdžiuose herbo atsivertimas, loterijos bilieto išlošimas, radžio atomų skilimas, detalės ilgio nukrypimas už leistinų ribų yra atsitiktiniai įvykiai. Ir čia, kalbant apie įvykio atsitiktinumą, visada reikia turėti galvoje eksperimento sąlygas $K$. Papildžius jų kompleksą naujomis sąlygomis, atsitiktiniai įvykiai gali virsti būtinais arba negalimais.

Sakykime, metėme monetą ir atvirto herbas. Tai atsitiko dėl daugelio konkrečių priežasčių: monetos pradinės padėties, pradinio greičio ir pagreičio, oro trinties, klampumo, monetos formos, oro mikrosrovių, grindų paviršiaus, virpesių ir t. t. Jei žinotume visas tas priežastis ir jas turėtume galvoje, tai (bent iš principo) galėtume tiksliai pasakyti, ar herbas atvirs, ar neatvirs. Tai būtų gana sudėtingas uždavinys. Antra vertus, praktiškai neįmanoma absoliučiai tiksliai fiksuoti visų sąlygų, nuo kurių priklauso herbo atsivertimas. O dėl nedidelio sąlygų pasikeitimo gali pasikeisti rezultatas.

Nagrinėsime tik tokius įvykius, kuriems tinka "negalimo trečiojo" dėsnis (tertium non datur), t. y. kurie arba įvyksta, arba neįvyksta. Negali būti atvejo, kai apie įvykį vienu metu būtų galima teigti, kad jis ir įvyko, ir neįvyko.

## 2. TIKIMYBĖ

Jau sakėme, kad tikimybių teorija tiria matematiniais metodais atsitiktinius reiškinius. Kiekvienas mokslas, taigi ir šis ieško ir nustato tiriamų reiškinių dėsningumus. Tiksliau tikimybių teoriją galėtume nusakyti kaip matematikos šaką, nagrinėjančią masinių atsitiktinių reiškinių dėsnius.

Iš karto atrodytų keista kalbėti apie atsitiktinių reiškinių dėsningumus. Ką galima pasakyti apie įvykius, kurie tai įvyksta, tai neįvyksta? Iš tikrųjų, kai susiduriame su *atskirais* atsitiktiniais įvykiais, apie kokius nors dėsningumus kalbėti sunku. Bet visiškai kitaip yra tada, kai reiškinys kartojasi daug kartų.

Tačiau leiskime kalbėti pavyzdžiams.

Jauna šeima laukia pirmojo kūdikio. Nerimauja. Spėlioja. Žinoma, vyras nori sūnaus, žmona – dukters. Ir ką dabar žmogus gali žinoti, kas gims: duktė ar sūnus? Grynas atsitiktinumas.

Bet imkime visas šeimas, kurios tą patį mėnesį susilaukė naujagimio, ir pamatysime, kad gimė maždaug pusė berniukų ir pusė mergaičių. Vadinasi, kas buvo vienoje šeimoje tik atsitiktinis reiškinys, dideliam šeimų skaičiui yra dėsningumas. Ir įdomumo dėlei galėtume pasakyti, kad šeimos galva – vyras – turėjo daugiau galimybių sulaukti sūnaus, negu žmona – dukters. Mat, kaip rodo pasaulinė statistika, bendrame naujagimių skaičiuje berniukų būna truputį daugiau kaip 51 nuošimtis.

1 lentelėje pateikiami duomenys apie naujagimius Lietuvoje 1965–1974 metais. Nors gimimų skaičius kiekvienais metais vis kitoks, bet kasmet gimsta maždaug 51% berniukų. Tą patį matytume, nagrinėdami visus gimusius kituose kraštuose: berniukų dalis tarp visų naujagimių svyruoja nedidelėse ribose.

1 lentelė

| Metai | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 | 1969 | 1970 | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 | 1965–1974 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Berniukų skaičius iš 1000 naujagimių | 515 | 512 | 507 | 511 | 514 | 514 | 513 | 512 | 510 | 508 | 512 |

Panašiai yra ir su kitais atsitiktiniais įvykiais.

Ant mūsų delno guli moneta. Metame ją. Atvirto herbas. Atsitiktinumas, ar ne tiesa? Juk galėjo atvirsti ir skaičius, rodąs monetos vertę. Metame monetą dešimt kartų: penkis kartus atvirto herbas ir penkis – skaičius. O juk galėjo atvirsti, pavyzdžiui, du kartus herbas ir aštuonis kartus skaičius (atskirais atvejais taip ir būna). Aišku, iš tokio mažo bandymų skaičiaus dar negalima spręsti apie kokį nors dėsningumą ir tvirtinti, jog, metus monetą dešimt kartų, penkis kartus atvirs skaičius ir penkis kartus – herbas.

Tačiau bandykime toliau. Sakykim, metėme monetą tūkstantį kartų, antrą, trečią, ketvirtą, ... Pastebėsime, jog kiekvienos eksperimentų serijos rezultatai nedaug skirsis. Tiesa, bus nedidelių nukrypimų, bet, susumavę visų eksperimentų rezultatus, matysime, kad maždaug 50 nuošimčių visų metimų atvirto herbas, o penkiasdešimt – skaičius.

Tarkime, kad turime sąlygų kompleksą $K$, kurį galime realizuoti daug kartų. Kiekvieną kartą, jį realizavus, gali įvykti arba neįvykti atsitiktinis įvykis $A$. Pažymėkime $N_n(A)$ įvykių $A$ skaičių, atlikus $n$ eksperimentų. Santykis

$$\frac{N_n(A)}{n} = \nu_n(A)$$

yra vadinamas įvykio $A$ *statistiniu dažniu*.

Grįžkime prie monetos mėtymo.

Dar XVIII a. Biufonas[1] metė monetą 4040 kartų. Herbas atsivertė 2048 kartus. Jo gautas herbo atvirtimų statistinis dažnis

$$\frac{2048}{4040} = 0,5069... \approx 0,51.$$

Panašius eksperimentus su moneta atliko šio amžiaus pradžioje K. Pirsonas[2]. Metus monetą 12 000 kartų, herbas atvirto 6019 kartų. Statistinis dažnis lygus

$$\frac{6019}{12000} = 0,50158... \approx 0,50.$$

Vėliau jis metė monetą dar 12 000 kartų; iš visų 24 000 metimų herbas atvirto 12 012 kartų. Statistinis dažnis

$$\frac{12012}{24000} = 0,5005 \approx 0,50.$$

Matematikas Dž. Kerichas (J.E. Kerich [25]) Antrojo pasaulinio karo metu buvo internuotas. Turėdamas laiko, jis eksperimentavo, mėtydamas monetą. Per 10 serijų po 1000 metimų kiekviena herbas atvirto atitinkamai 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529 kartus. Statistiniai herbo atvirtimo dažniai buvo lygūs

$$\begin{array}{ccccc} 1/2+0,002 & 1/2+0,011 & 1/2-0,003 & 1/2+0,029 & 1/2+0,004 \\ 1/2-0,024 & 1/2+0,007 & 1/2+0,028 & 1/2+0,004 & 1/2+0,029 \end{array}$$

Pateikėme pavyzdžius, aprašytus literatūroje. Suprantama, turėdami pakankamai laiko ir kantrybės, galėtume ir patys atlikti tokių eksperimentų. Reikia manyti, kad gautume panašius rezultatus.

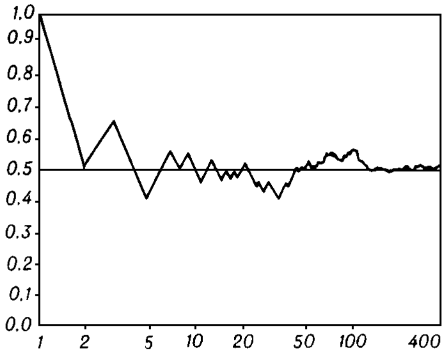
---

[1] George Louis Leclerc de Buffon (1707–1788) – prancūzų gamtininkas ir rašytojas.

[2] Karl Pearson (1857–1936) – anglų matematikas ir statistikas.

Iš pavyzdžių matome, kad herbo atvirtimo statistinis dažnis, kai bandymų skaičius yra didelis, svyruoja nedideliame intervale. Sakome, kad statistinis dažnis yra stabilus. Panašaus stabilumo yra ir berniukų gimimo statistinis dažnis. Tą patį pastebėsime ir tirdami kitus atsitiktinius reiškinius.

Kai eksperimentų skaičius yra nedidelis, statistinis dažnis gali svyruoti gana didelėse ribose intervale [0, 1]. Tačiau kai eksperimentų skaičius didelis, jis paprastai svyruoja labai nedaug ir turi tendenciją artėti prie kokio nors pastovaus skaičiaus. Tai vaizdžiai matyti 1 paveiksle (jis paimtas iš H. Kramero knygos [6]). Čia atvaizduotas, naudojant logaritminę skalę, herbo atvirtimo dažnio kitimas, metus monetą 400 kartų.




1 pav.

Pateiktieji pavyzdžiai ir kasdieninė praktika leidžia mums teigti, kad atsitiktinio įvykio $A$ statistinis dažnis svyruoja apie tam tikrą konstantą. Tą konstantą vadiname įvykio *tikimybe* ir paprastai žymime $P(A)$, $p(A)$, $PA$, $pA$ ir pan. Čia raidė $P$ primena lotynų kalbos žodį "probabilitas" – "tikimybė". Taigi herbo atvirtimo tikimybe galime laikyti 1/2, berniuko gimimo tikimybe – 0,51.

Toks įvykio tikimybės nusakymas apibūdina šios sąvokos natūraliąją mokslinę prasmę, tačiau nėra formalus jos apibrėžimas, kurį pateiksime vėliau.

Tikimybių teorija nagrinėja tik atsitiktinių įvykių su stabiliais statistiniais dažniais dėsnius. Klausimas, kokiomis sąlygomis atsitiktinių įvykių statistinis dažnis yra stabilus, – labai sudėtingas. Reikia, kad eksperimento sąlygos (sąlygų kompleksas $K$) visą laiką būtų tos pačios, o tai dažnai būna nelengva patikrinti.

Ne tik statistinis dažnis, bet ir kitos atsitiktinių reiškinių charakteristikos dažnai būna labai stabilios.

Pailiustruosime tai šitokiu pavyzdžiu. Kaip žinome iš fizikos, dujos yra sudarytos iš be galo daug visą laiką judančių mažyčių dalelių – molekulių. Jų judėjimas yra chaotiškas. Molekulės susidūrinėja vienos su kitomis, atšoka, kinta jų judėjimo kryptis, greitis ir t. t. Tarkime, kad dujos yra uždarame inde. Dujų slėgis į indo sieneles yra molekulių smūgių rezultatas. Regis, slėgis, būdamas atsitiktinis reiškinys, turėtų svyruoti. Tačiau ir tiksliausi matavimai tokio svyravimo – fliuktuacijų – neparodo. Praeityje kinetinės dujų teorijos priešininkai šį faktą net mėgino panaudoti kaip savo argumentą. Iš tikrųjų dėl milžiniško molekulių skaičiaus smūgių į indo sieneles rezultatas išsilygina, ir slėgis būna gana pastovus. Tiktai ištobulėjus eksperimento technikai, kai tapo galima izoliuoti nedidelį molekulių skaičių, buvo pastebėti tokių "labai skystų" dujų slėgio svyravimai.

Tikimybių teorijos metodai palyginti nesunkiai paaiškina tokio tipo atsitiktinių reiškinių charakteristikų stabilumą. Žinoma, kartais galima taikyti ir klasikinius matematikos metodus. Antai, dujų molekulių judėjimą galėtume aprašyti diferencialinėmis lygtimis, traktuodami kiekvieną molekulę kaip labai mažą kūną. Jei molekulių skaičius yra $n$, reikėtų sudaryti $3n$ antrosios eilės diferencialinių lygčių. Kadangi $n$ paprastai labai didelis (kai temperatūra $0°$C ir slėgis 1 atm, 1 $\mathrm{cm}^3$ yra $2{,}6873\cdot 10^{19}$ idealiųjų dujų molekulių), tai gautume milžinišką diferencialinių lygčių sistemą. Iš jos, žinoma, galėtume padaryti kai kurias išvadas apie molekulių judėjimą. Tačiau tokios sistemos praktiškai neįmanoma išspręsti. Yra ir principinių matematinių sunkumų. Tikimybių teorija, nagrinėjant atsitiktinius reiškinius, yra pranašesnė už klasikinius matematikos metodus.

Tikimybių teorijos sąvokos pradėjo formuotis XVI amžiuje, mėginant matematiškai analizuoti azartinių lošimų klausimus (L. Pačolis[1], N. Tartalja[2], Dž. Kardanas[3]). XVII šimtmečio pradžioje Galilėjus[4] mėgino nagrinėti matavimo paklaidas, traktuodamas jas kaip atsitiktines ir įvertindamas jų tikimybes. Tuo laiku mėginta kurti draudimo teoriją, pagrįstą mirtingumo, nelaimingų atsitikimų, ligų ir panašių masinių reiškinių matematine analize. Tačiau tikimybių teorijos pradžia laikomi Ch. Hioigenso[5], B. Paskalio[6] ir P. Ferma[7] darbai, atlikti XVII a. viduryje, susiję su azartiniais lošimais. Tuose darbuose išryškėjo svarbios tikimybių teorijos sąvokos, tarp jų – tikimybės sąvoka. Didelis žingsnis į priekį buvo J. Bernulio[8] darbai, taip pat susiję su lošimais. Jis pirmasis įrodė vieną iš svarbiausių tikimybių teorijos dėsnių –

[1] Luca Pacioli (1445?–1514) – italų matematikas.
[2] Niccolo Tartaglia (1500?–1557) – italų matematikas.
[3] Geronimo Cardano (1501–1576) – italų matematikas.
[4] Galileo Galilei (1564–1642) – italų mokslininkas.
[5] Christiann Huygens (1629–1695) – olandų matematikas ir fizikas.
[6] Blaise Pascal (1623–1662) – prancūzų matematikas ir fizikas.
[7] Pierre de Fermat (1601–1665) – prancūzų matematikas.
[8] Jakob Bernoulli (1654–1705) – šveicarų matematikas.

vadinamąjį didžiųjų skaičių dėsnį. Šis dėsnis įvertina tikimybę, kad, atlikus didelį skaičių eksperimentų, stebimo įvykio statistinis dažnis mažai skirsis nuo to įvykio tikimybės.

Tikimybių teorijos gimimas susijęs su azartinių lošimų teorija. Čia atsitiktinių reiškinių dėsningumai yra gana paprasti. Vystantis mokslams, paaiškėjo, kad tikimybių teorija gali būti taikoma daug svarbesnėse srityse, negu lošimai. Tai – matavimo paklaidų teorija, balistikos, statistikos (pirmiausia demografijos) klausimai. Tai skatino tikimybių teorijos vystymąsi. Tikimybių teorijoje imta taikyti sudėtingesnį matematinį aparatą. Ypač svarbų vaidmenį, kurdami tikimybių teorijos matematinį aparatą, suvaidino A. Muavras[1], P. Laplasas[2], K. F. Gausas[3], S. Puasonas[4]. XVIII ir XIX a. tikimybių teorija sparčiai vystėsi, pradėta ją taikyti įvairiausiose srityse, kartais nepakankamai pagrįstai.

XIX a. antroje pusėje ir XX a. pradžioje daug nusipelnė tikimybių teorijai P. Čebyšovas[5], A. Markovas[6], A. Liapunovas[7].

XX a. tikimybių teorija virto griežta matematine disciplina. Buvo sukurta jos aksiomatika. Pirmąsias aksiomų sistemas pasiūlė L. Bolmanas 1901 m. ir S. Bernšteinas[8] 1917 m. Šiandien labiausiai paplitusi kita aksiomų sistema, pagrįsta mato ir integralo teorija, kurią sukūrė daugiausia prancūzų matematikai. Tą sistemą suformulavo A. Kolmogorovas[9] 1933 m.

Šiais laikais įvairūs mokslai sparčiai matematizuojami. Matematikos metodai braunasi vis į naujas mokslo bei technikos sritis. Ypač platus yra tikimybių teorijos taikymų diapazonas. Antra vertus, įvairūs mokslai kelia tikimybių teorijai naujų svarbių problemų. Praktiniai poreikiai ir vidinė raidos logika spartina šios svarbios matematikos šakos tolesnį vystymąsi.

Tikimybių teorija Lietuvoje turi senas tradicijas. Jau XVIII a. Vilniaus universitete buvo dėstomi tikimybių teorijos elementai. 1830 m. jame buvo įsteigta tikimybių teorijos katedra. Tuo metu Vilniaus universitetas buvo vienas iš svarbiausių Rytų Europos universitetų. Tačiau tikimybių teorijos katedros veikla greitai nutrūko, nes 1832 m. caro valdžios, vykdžiusios imperialistinę rusinimo politiką, universitetas buvo uždarytas. Per pastaruosius kelis

---

[1] Abraham de Moivre (1667–1754) – prancūzų kilmės anglų matematikas.
[2] Pierre Simon Laplace (1749–1827) – prancūzų matematikas.
[3] Carl Friedrich Gauss (1777–1855) – vokiečių matematikas.
[4] Simeon Denis Poisson (1781–1840) – prancūzų matematikas.
[5] Pafnutijus Čebyšovas (1821–1894) – rusų matematikas.
[6] Andriejus Markovas (1856–1922) – rusų matematikas.
[7] Aleksandras Liapunovas (1857–1918) – rusų matematikas.
[8] Sergiejus Bernšteinas (1880–1968) – rusų matematikas.
[9] Andriejus Kolmogorovas (1903–1987) – rusų matematikas.

dešimtmečius Lietuvoje tikimybių teorija plėtojosi labai sparčiai. Lietuvos matematikai nemažai nusipelnė tikimybių teorijos mokslui.

## 3. ELEMENTARIEJI ĮVYKIAI

Pasirinkime kokį nors atsitiktinį eksperimentą (arba stebėjimą) ir nagrinėkime visų su juo susijusių galimų įvykių aibę. Kai kuriuos iš tų įvykių galėsime laikyti sudarytais iš kitų – atskirų atvejų. Tarp įvykių bus ir tokių, kurie toliau neskaidytini ir negali įvykti kartu. Juos vadinsime *elementariaisiais įvykiais* (arba *eksperimento baigtimis*). Ši sąvoka yra pirminė, todėl jos neapibrėšime, bet tik paaiškinsime pavyzdžiais. Aibė visų elementariųjų įvykių, susijusių su kuriuo nors atsitiktiniu eksperimentu, vadinama *elementariųjų įvykių erdve*. Elementariuosius įvykius žymėsime raide $\omega$ su indeksais arba be jų, o elementariųjų įvykių erdvę – raide $\Omega$.

Išnagrinėsime keletą pavyzdžių.

1 p a v y z d y s. Atsitiktinai metame monetą. Ji nukris ant stalo arba ant grindų. Manysime, kad ji negali sustoti, atsirėmusi briauna į paviršių, ant kurio nukrinta, – nebent atsiremtų į stalo koją ar sieną arba patektų į plyšį. Tačiau tokie atvejai praktiškai neįmanomi, todėl laikysime galimais tik du atvejus: atsivers herbas arba skaičius, rodąs monetos vertę. Elementariųjų įvykių erdvė $\Omega$ bus sudaryta iš dviejų įvykių: a) herbo atsivertimo, b) skaičiaus atsivertimo.

2 p a v y z d y s. Lošimo kauliukas yra kubas. Seniau jis buvo gaminamas iš kaulo, dabar – iš plastmasės, medžio arba metalo. Jo sienelės pažymėtos "akutėmis" – mažomis duobutėmis. Vienoje sienelėje yra viena akutė, kitoje – dvi, trečioje – trys ir t. t. iki šešių akučių. Meskime kauliuką. Kaip ir mesdami monetą, manysime, kad jis negali atsistoti, briauna arba viršūne atsirėmęs į paviršių, ant kurio nukrito. Taigi gali atsiversti tik viena iš šešių sienelių, pažymėta atitinkamu akučių skaičiumi. Elementariųjų įvykių erdvė $\Omega$ sudaryta iš šešių įvykių $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$; čia $\omega_k$ reiškia $k$ akučių atsivertimą. Kitus įvykius galėsime sudaryti iš tų šešių įvykių. Sakysime, įvykis "atsivertė lyginis akučių skaičius" bus sudarytas iš trijų elementariųjų įvykių $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Įvykis "atsivertė sveikas akučių skaičius" yra būtinas – jis sudarytas iš visų šešių elementariųjų įvykių $\{\omega_1, ..., \omega_6\} = \Omega$. Įvykis "atsivertė septynios akutės" yra negalimas – jį atitinka tuščia elementariųjų įvykių aibė $\varnothing$.

3 p a v y z d y s. Atsitiktinai metame du kauliukus: baltą ir juodą. Elementariųjų įvykių erdvė $\Omega$ bus sudaryta iš 36 įvykių $(\omega_{1j}, \omega_{2k})$ $(j = 1, ..., 6;$ $k = 1, ..., 6)$. Čia $\omega_{1j}$ reiškia įvykį "baltojo kauliuko $j$ akučių atsivertimas", $\omega_{2k}$ – "juodojo kauliuko $k$ akučių atsivertimas". Įvykis "abiejų kauliukų atsivertusių akučių suma yra 8" sudarytas iš 5 elementariųjų įvykių $\{(\omega_{12}, \omega_{26}), (\omega_{13}, \omega_{25}),$ $(\omega_{14}, \omega_{24}), (\omega_{15}, \omega_{23}), (\omega_{16}, \omega_{22})\}$.

4 p a v y z d y s. Kuriuo nors būdu matuojame atstumą $X$ tarp dviejų žemės paviršiaus taškų. Dėl įvairių atsitiktinių priežasčių, veikiančių matavimo prietaisus, gausime matavimo paklaidas. Aibę $\Omega$ galime sudaryti iš įvykių "$X$ matavimo rezultatas yra $x$"; čia $x$ prabėga tam tikrą reikšmių aibę.

Imdamiesi matematiškai nagrinėti kurį nors atsitiktinį eksperimentą, turime sudaryti jo matematinį modelį. Tam pirmiausia reikia sudaryti jo elementariųjų įvykių erdvę $\Omega$. Atsitiktiniai įvykiai, susiję su tuo eksperimentu, bus sudaryti iš erdvės $\Omega$ elementariųjų įvykių, t. y. bus aibės $\Omega$ poaibiai. Koks nors įvykis $A$ įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta kuris nors iš elementariųjų įvykių, iš kurių sudaryta aibė $A$. Įvykis, kuris visada įvyksta, kai įvyksta bet kuris iš erdvės $\Omega$ elementariųjų įvykių, yra būtinas. Todėl būtinas įvykis žymimas $\Omega$. Negalimą įvykį atitinka tuščia elementariųjų įvykių aibė, todėl jis žymimas $\varnothing$.

Pabrėšime, kad ne kiekvieną aibės $\Omega$ poaibį laikysime įvykiu, nes priešingu atveju susidurtume su esminiais matematiniais sunkumais. Tačiau prie to klausimo dar grįšime 9 skyrelyje. Visų galimų įvykių aibę žymėsime $\mathcal{A}$.

Erdvės $\Omega$ elementus kartais vadinsime taškais.

## 4. VEIKSMAI SU ĮVYKIAIS

Sakykime, duota fiksuota elementariųjų įvykių erdvė $\Omega$ ir sistema $\mathcal{A}$ jos poaibių, laikytinų įvykiais. Panagrinėsime kai kuriuos ryšius tarp įvykių.

Sakysime, kad įvykis $A$ yra įvykio $B$ *dalis*, arba *atskiras atvejis*, jei, įvykus įvykiui $A$, kartu įvyksta ir įvykis $B$. Tai reiškia, kad kiekvienas elementarusis įvykis, įeinantis į įvykį $A$, įeina ir į įvykį $B$, t. y. elementariųjų įvykių aibė $A$ yra elementariųjų įvykių aibės $B$ poaibis (dalis). Rašysime $A \subset B$ arba $B \supset A$.

1 p a v y z d y s. Metame lošimo kauliuką. $A$ – dviejų akučių atsivertimas, $B$ – lyginio akučių skaičiaus atsivertimas. Aišku, kad $A \subset B$.

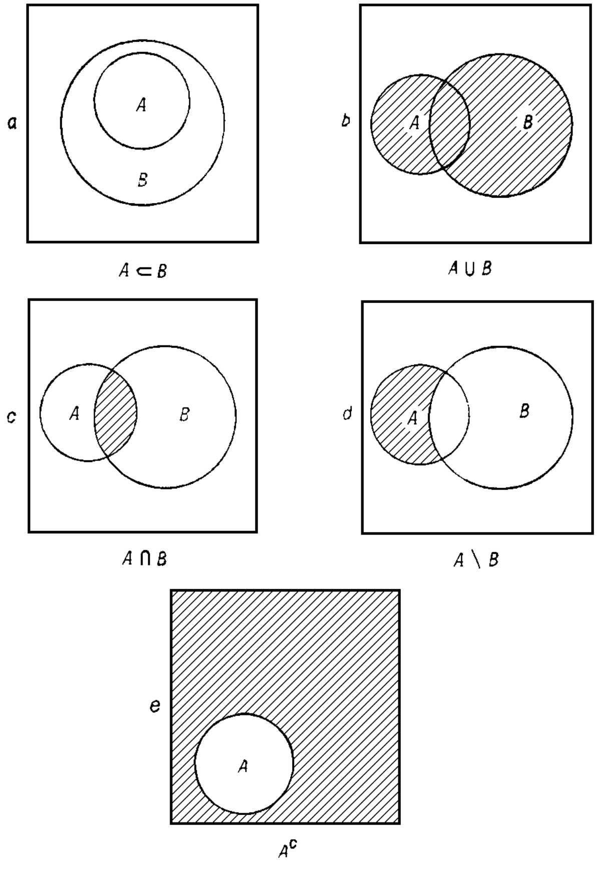
Šį ryšį tarp dviejų įvykių, o vėliau ir aibių veiksmus, pailiustruosime geometriškai vadinamosiomis Veno diagramomis (žr. 2 pav.). Tarkime, kad atsitiktinai parenkame bet kurį kvadrato tašką. Elementariųjų įvykių aibę $\Omega$ atitiks visų kvadrato taškų aibė. Toliau tarkime, jog įvykis $A$ yra taško parinkimas iš srities, pažymėtos taip pat raide $A$, o įvykis $B$ – iš srities $B$. Jei įvykis $A$ yra įvykio $B$ dalis, tai sritis $A$ telpa srityje $B$ (2 pav., a).

Atkreipsime dėmesį, kad teisingos formulės: $\varnothing \subset A \subset \Omega$, $A \subset A$, kai $A$ yra bet kuris įvykis. Jei $A, B, C$ – įvykiai ir $A \subset B, B \subset C$, tai $A \subset C$ (ženklo $\subset$ tranzityvumo savybė).

Įvykių *lygybę* žymėsime ženklu $=$. Du įvykiai yra lygūs, jei juos sudarančios elementariųjų įvykių aibės yra lygios. Teisingas teiginys: jei, įvykus įvykiui $A$, įvyksta ir įvykis $B$, o įvykus įvykiui $B$, įvyksta ir įvykis $A$, tai tie įvykiai yra lygūs. Simboliais: jei $A \subset B$ ir $B \subset A$, tai $A = B$. Įvykių lygybė turi savybes: $A = A$ (refleksyvumas); jei $A = B$, tai $B = A$ (simetriškumas); jei $A = B$ ir $B = C$, tai $A = C$ (tranzityvumas).

Dviejų įvykių $A$ ir $B$ *sąjunga* (arba suma) vadinsime įvykį, kai įvyksta bent vienas iš įvykių $A$ ir $B$. Kitaip sakant, įvykių $A$ ir $B$ sąjunga yra įvykis, sudarytas iš visų elementariųjų įvykių, priklausančių bent vienam iš įvykių $A$ ir $B$, t. y. elementariųjų įvykių aibių $A$ ir $B$ sąjunga (suma). Žymėsime $A \cup B$. Analogiškai apibrėžiama ir didesnio įvykių skaičiaus sąjunga. Bet kurios baigtinės arba skaičios įvykių sistemos $\{A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ sąjunga (suma) vadinsime įvykį, kai įvyksta bent vienas iš tos sistemos įvykių. Tai vėl yra atitinkamų elementariųjų įvykių aibių sąjunga. Žymėsime

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$




2 pav.

Sistemos $\{A_1, ..., A_n\}$ sąjungą žymėsime

$$A_1 \cup \ ... \ \cup A_n, \quad \text{arba} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Skaičios įvykių sistemos $\{A_1, A_2, ...\}$ sąjungą žymėsime

$$A_1 \cup A_2 \cup ..., \quad \text{arba} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Pats veiksmas yra vadinamas įvykių *jungimu* (arba sudėtimi).
Geometrinė iliustracija 2 pav., *b*.

2 pavyzdys. Darbininkas gamina detales tekinimo staklėmis. Iš pagamintų detalių krūvos imame vieną detalę. Ji gali būti arba gera – atitikti techninius reikalavimus, arba niekalas. Bloga ji gali būti dėl trijų priežasčių: a) darbininko kaltės, b) staklių gedimo, c) netinkamo ruošinio, iš kurio buvo gaminama detalė. Pažymėkime raide $A$ įvykį, kad paimta detalė yra bloga, raide $A_1$ – įvykį, kad ji bloga dėl pirmosios, $A_2$ – dėl antrosios, $A_3$ – dėl trečiosios priežasties. Tada $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Jungimo savybės: $A \cup B = B \cup A$ (komutatyvumas), $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociatyvumas). Jeigu $A \subset B$, tai $A \cup B = B$; specialiais atvejais $\varnothing \cup A = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup A = A$.

Dviejų įvykių $A$ ir $B$ *sankirta* (pjūviu) vadinsime įvykį, kai kartu įvyksta abu įvykiai $A$ ir $B$. Kitaip sakant, įvykių $A$ ir $B$ sankirta yra įvykis, sudarytas iš visų elementariųjų įvykių, priklausančių ir $A$, ir $B$, t. y. elementariųjų įvykių aibių $A$ ir $B$ sankirta (pjūvis). Žymėsime $A \cap B$. Bet kurios baigtinės arba skaičios įvykių sistemos $\{A_\lambda, \ \lambda \in \Lambda\}$ sankirta vadinsime įvykį, kai kartu įvyksta visi tos sistemos įvykiai. Ji yra atitinkamų elementariųjų įvykių aibių sistemos sankirta. Žymėsime

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda.$$

Baigtinės įvykių sistemos $\{A_1, ..., A_n\}$ sankirtą žymėsime

$$A_1 \cap ... \cap A_n, \quad \text{arba} \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k,$$

o skaičios įvykių sistemos $\{A_1, A_2, ...\}$ sankirtą –

$$A_1 \cap A_2 \cap ..., \quad \text{arba} \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Geometrinė iliustracija 2 pav., *c*.

3 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. $A$ – įvykis, kai atsiverčia lyginis akučių skaičius, $B$ – atsiverčia akučių skaičius, kartotinis 3. Sankirta $A \cap B$ – įvykis, kai atsiverčia 6 akutės.

Kirtimosi savybės: $A \cap B = B \cap A$ (komutatyvumas), $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociatyvumas). Jei $A \subset B$, tai $A \cap B = A$; specialiais atvejais $\varnothing \cap A = \varnothing$, $A \cap \Omega = A$, $A \cap A = A$.

Jungimo ir kirtimosi veiksmai susieti lygybėmis $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ir $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributyvumas). Tos lygybės yra teisingos ir bendresniais atvejais. Jei $\{A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ yra kokia nors (baigtinė arba skaiti) įvykių sistema, $B$ – bet kuris įvykis, tai teisingos lygybės

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B), \quad \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \cup B = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B).$$

Įvykiai $A$ ir $B$ vadinami *nesutaikomais*, jeigu jie negali įvykti kartu, t. y. jų sankirta yra negalimas įvykis $A \cap B = \varnothing$.

Dviejų įvykių $A$ ir $B$ *skirtumu* vadiname įvykį, kai įvykis $A$ įvyksta, o įvykis $B$ neįvyksta. Kitaip sakant, $A$ ir $B$ skirtumas yra įvykis, sudarytas iš visų elementariųjų įvykių, priklausančių $A$, bet nepriklausančių $B$. Vadinasi, įvykių $A$ ir $B$ skirtumas yra elementariųjų įvykių aibių $A$ ir $B$ skirtumas. Jį žymėsime $A \backslash B$. Patį šį veiksmą vadinsime atimtimi.

Geometrinė iliustracija 2 pav., *d*.

4 pavyzdys. Metame du lošimo kauliukus. Tarkime, kad $A$ yra įvykis "abiejų kauliukų atsivertusių akučių suma yra lyginė", $B$ – įvykis "abiejų kauliukų atsivertusių akučių skaičiai yra lyginiai". Tada $A \backslash B$ reikš įvykį "abiejų kauliukų atsivertusių akučių skaičiai yra nelyginiai".

5 pavyzdys. Iš studentų grupės reikėjo išrinkti atstovą į delegaciją. Iš pradžių buvo manyta jį rinkti iš studentų, išlaikiusių visus sesijos egzaminus. Tarkime, kad $A$ yra įvykis, kai atstovas buvo išrinktas iš tokių studentų. Vėliau buvo nutarta, kad netinka siųsti delegato, gavusio bent vieną trejetą. Pažymėkime raide $B$ įvykį, kai atstovas renkamas iš studentų, išlaikiusių bent vieną egzaminą trejetui. Tada $A \backslash B$ reiškia įvykį, kai delegatas renkamas iš studentų, gavusių per egzaminus tik ketvertus arba penketus.

Atimties savybės: $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$; jeigu $A \subset B$, tai $A \backslash B = \varnothing$; specialiu atveju $\varnothing \backslash A = \varnothing$, $A \backslash \Omega = \varnothing$, $A \backslash A = \varnothing$; jeigu $A \cap B = \varnothing$ (įvykiai nesutaikomi), tai $A \backslash B = A$; $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$; $(A \backslash B) \cup B = A$ tada ir tik tada, kai $B \subset A$; distributyvumo savybė: $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$. Dviejų įvykių sankirtą galima išreikšti atimtimi: $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.

Įvykis $\Omega \backslash A$ yra vadinamas įvykiu, *priešingu* įvykiui $A$. Jis žymimas $A^c$. Įvykis $A^c$ yra elementariųjų įvykių aibės $A$ papildinys iki $\Omega$.

Žr. 2 pav., *e*.

Aišku, kad $(A^c)^c = A$, t. y. įvykis, priešingas $A^c$, yra pats įvykis $A$. Įvykiams $A$ ir $A^c$ tinka lygybės $A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \varnothing$ ($A$ ir $A^c$ – nesutaikomi).

Teisingos ir šios lygybės: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Jas galima apibendrinti: jei $\{A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ yra bet kokia (baigtinė arba skaiti) įvykių sistema, tai

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c, \quad \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

Pastarieji ryšiai vadinami Morgano[1] lygybėmis. Dviejų įvykių skirtumą galima išreikšti ir šitaip: $A \backslash B = A \cap B^c$.

Matome, kad čia galime vartoti dvejopus terminus – tikimybių teorijos ir aibių teorijos. Galima sudaryti "žodyną", nustatantį atitiktį tarp abiejų tipų terminų. Dalis jo atrodo šitaip:

| Įvykis | Aibė | Žymuo |
|---|---|---|
| Įvykis | Visų elementariųjų įvykių aibės poaibis | $A, B, \ldots$ |
| Būtinas | Visų elementariųjų įvykių aibė | $\Omega$ |
| Negalimas | Tuščia elementariųjų įvykių aibė | $\varnothing$ |
| $A$ yra atskiras įvykio $B$ atvejis | $A$ yra $B$ poaibis | $A \subset B$ |
| $A$ arba $B$ (bent vienas iš jų) | $A$ ir $B$ sąjunga | $A \cup B$ |
| $A$ ir $B$ (abu kartu) | $A$ ir $B$ sankirta | $A \cap B$ |
| Nesutaikomi įvykiai | $A$ ir $B$ neturi bendrų elementų | $A \cap B = \varnothing$ |
| $A$ įvyksta, o $B$ neįvyksta | $A$ ir $B$ skirtumas | $A \backslash B$ |
| Priešingas įvykiui $A$ | $A$ papildinys iki $\Omega$ | $A^c$ |

## 5. KLASIKINIS TIKIMYBĖS APIBRĖŽIMAS

Remiantis kasdienine patirtimi, nesunku suvokti, jog įvairius įvykius galima palyginti pagal jų galimumo laipsnį. Jei, sakysime, tarp loterijos laimėjimų yra 5 automobiliai ir 200 radijo aparatų, tai išlošti radijo aparatą yra daugiau galimybių (labiau tikėtinas įvykis), negu išlošti automobilį. Pataikyti į taikinį iš mažesnio atstumo yra daugiau šansų negu iš didesnio. Kiekvienam įvykiui galime priskirti skaičių, kuris apibūdintų jo galimybės laipsnį, būtų jo atsitiktinumo matas. Tai ir bus tikimybė, apie kurią jau kalbėjome 2 skyrelyje. Ten jos sąvoką įvedėme, remdamiesi statistiniais samprotavimais, eksperimentu. Tačiau kai kuriais nesudėtingais atvejais tikimybę galime nusakyti gana paprastai. Taip yra, kai tinka vadinamasis klasikinis tikimybės apibrėžimas,

[1] Augustus de Morgan (1806–1871) – anglų matematikas.

buvęs tikimybių teorijos pagrindu nuo pat jos atsiradimo iki šio amžiaus pradžios.

Klasikinis tikimybės apibrėžimas yra pagrįstas įvykių *vienodo galimumo*, arba vienodo tikėtinumo, sąvoka. Ši sąvoka taip pat laikoma pirmine. Paaiškinsime ją pavyzdžiais.

1 pavyzdys. Tarkime, kad dėžėje yra įvairių spalvų rutuliai. Jie visiškai vienodi, skiriasi tik spalva. Rutuliai sumaišyti. Nežiūrėdami traukiame vieną rutulį. Neturime jokio pagrindo manyti, kad yra daugiau galimybių ištraukti kurį nors rutulį. Vadinasi, galime tvirtinti, kad kiekvieno rutulio ištraukimas yra vienodai galimas.

2 pavyzdys. Tarkime, kad lošimo kauliukas yra tiksliai simetriškas geometrinis kūnas, padarytas iš vienalytės medžiagos, be to, akutės jame pažymėtos taip, kad negadintų simetriškumo (pavyzdžiui, pažymėtos nesvariais dažais, o jų sluoksnis yra nulinio storio). Atsitiktinai metant kauliuką, kiekvienos sienelės atsivertimo galimybės visiškai vienodos. Vadinasi, galime manyti, kad 1, 2, 3, 4, 5, 6 akučių atsivertimai yra vienodai galimi įvykiai.

3 pavyzdys. Metame idealią monetą. Ji simetriška, pagaminta iš vienalytės medžiagos, tik vienoje pusėje yra herbas, kitoje – skaičius. Tačiau jie pažymėti taip, kad moneta vistiek būtų simetriška. Tada herbo ir skaičiaus atsivertimas yra vienodai galimi įvykiai.

Realios monetos ir realūs lošimo kauliukai yra tik apytiksliai simetriški. Todėl ir atitinkami įvykiai yra tik apytiksliai vienodai galimi.

Tarkime, kad kokio nors eksperimento elementariųjų įvykių aibė $\Omega$ yra sudaryta iš $s$ vienodai galimų elementariųjų įvykių. Natūralu laukti, kad, atlikus didelį skaičių $n$ bandymų, kiekvienas konkretus elementarusis įvykis įvyks maždaug $n/s$ kartų. Jo statistinis dažnis svyruos apie $1/s$. Tai rodo ir praktinė patirtis. Todėl kiekvieno konkretaus elementariojo įvykio tikimybe galime laikyti skaičių $1/s$. Vadinasi, jei, atliekant eksperimentą, gali įvykti $s$ elementariųjų įvykių, tai ekvivalentūs yra teiginiai: a) tie įvykiai vienodai galimi; b) kiekvieno jų tikimybė yra $1/s$.

Metant monetą, herbo ir skaičiaus atsivertimo tikimybės lygios $1/2$. Metant lošimo kauliuką, akučių 1, 2, 3, 4, 5, 6 atsivertimo tikimybės lygios $1/6$. Jei dėžėje yra 10 vienodų rutulių, kurie skiriasi tik spalva, tai, atsitiktinai traukiant iš dėžės rutulį, kiekvieno konkretaus rutulio ištraukimo tikimybė yra $1/10$.

Vėl tarkime, kad, atliekant eksperimentą, gali įvykti $s$ vienodai galimų elementariųjų įvykių. Imkime įvykį $A$, sudarytą iš $r$ elementariųjų įvykių. Pastarieji dažnai vadinami *palankiais* įvykiui $A$. Aišku, šio įvykio statistinis dažnis svyruos apie skaičių $r/s$. Jo tikimybe galėsime laikyti $P(A) = r/s$. Taigi įvykio $A$ tikimybė yra lygi palankių įvykiui $A$ įvykių skaičiaus ir visų vienodai galimų elementariųjų įvykių skaičiaus santykiui.

4 pavyzdys. Dėžėje yra 4 balti ir 6 juodi rutuliai, kurie skiriasi tik spalva. Traukiame atsitiktinai vieną rutulį. Šie žodžiai reiškia, kad galimybės ištraukti kiekvieną rutulį yra vienodos. Rasime tikimybę, kad ištrauktas rutulys bus baltas. Ele-

mentariųjų įvykių aibė yra sudaryta iš 10 vienodai galimų įvykių, o tiriamasis įvykis – iš 4. Ieškomoji tikimybė lygi $4/10 = 2/5$.

5 p a v y z d y s. Metame lošimo kauliuką. Apskaičiuosime lyginio akučių skaičiaus atsivertimo tikimybę. Kaip matėme, visi šeši elementarieji įvykiai yra vienodai galimi. Palankių įvykių yra trys: kai atsiverčia 2, 4 arba 6 akutės. Ieškomoji tikimybė lygi $3/6 = 1/2$.

6 p a v y z d y s. Metame du lošimo kauliukus. Rasime tikimybę, kad abiejų kauliukų atsivertusių akučių suma lygi 8. Kaip matėme iš 3 skyrelio 3 pavyzdžio, elementariųjų įvykių aibė sudaryta iš 36 įvykių. Jie yra vienodai galimi. Tarp jų palankūs yra 5 įvykiai. Taigi ieškomoji tikimybė lygi $5/36$.

7 p a v y z d y s. M e r ė u ž d a v i n y s. Šis uždavinys iškilo tuo metu, kai tik kūrėsi tikimybių teorija, ir pasitarnavo jos raidai. Merė[1] XVII a. vidury nagrinėjo lošimo su kauliukais uždavinius. Tarp jų buvo ir šitoks: kokia dažniau būna akučių suma, metant kartu tris lošimo kauliukus: 11 ar 12? Jam atrodė, kad abi kombinacijos turėtų būti vienodai dažnos, nors "praktika" rodė kitaip. Samprotavo jis šitaip. 11 akučių sumą galima gauti šešiais skirtingais būdais: 6+4+1, 6+3+2, 5+5+1, 5+4+2, 5+3+3, 4+4+3. Taip pat šešiais skirtingais būdais galima gauti 12 akučių sumą: 6+5+1, 6+4+2, 6+3+3, 5+5+2, 5+4+3, 4+4+4. Apie tai jis parašė Paskaliui. Šis laiškas pateko į istoriją.

Paskalis pastebėjo, kad Merė nurodyti įvykiai nėra vienodai galimi (net jeigu kauliukai idealūs). Reikia skaičiuoti ne tik atsivertusių akučių sumą, bet ir žiūrėti, ant kurių kauliukų jos pasirodė. Jei sunumeruotume kauliukus ir imtume akutes atitinkama tvarka, tai matytume, kad kombinacija 6+4+1 pasirodo, kai turime rezultatus (6, 4, 1), (6, 1, 4), (4, 6, 1), (4, 1, 6), (1, 6, 4), (1, 4, 6), o kombinacija 4+4+4 pasirodo tik vieną kartą.

Vartodami šiuolaikinę terminologiją, turime sudaryti elementariųjų įvykių erdvę. Tai bus visi galimi trejetai $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, kur $\omega_1$ yra pirmojo, $\omega_2$ – antrojo, $\omega_3$ – trečiojo kauliuko atsivertusių akučių skaičius. Natūralu manyti, kad elementarieji įvykiai vienodai galimi. Jų iš viso yra $6^3 = 216$. Tarp jų palankūs pirmajam įvykiui yra šie: (6, 4, 1), (6, 3, 2), (6, 2, 3), (6, 1, 4), (5, 5, 1), (5, 4, 2), (5, 3, 3), (5, 2, 4), (5, 1, 5), (4, 6, 1), (4, 5, 2), (4, 4, 3), (4, 3, 4), (4, 2, 5), (4, 1, 6), (3, 6, 2), (3, 5, 3), (3, 4, 4), (3, 3, 5), (3, 2, 6), (2, 6, 3), (2, 5, 4), (2, 4, 5), (2, 3, 6), (1, 6, 4), (1, 5, 5), (1, 4, 6), iš viso 27 įvykiai. Palankūs antrajam įvykiui: (6, 5, 1), (6, 4, 2), (6, 3, 3), (6, 2, 4), (6, 1, 5), (5, 6, 1), (5, 5, 2), (5, 4, 3), (5, 3, 4), (5, 2, 5), (5, 1, 6), (4, 6, 2), (4, 5, 3), (4, 4, 4), (4, 3, 5), (4, 2, 6), (3, 6, 3), (3, 5, 4), (3, 4, 5), (3, 3, 6), (2, 6, 4), (2, 5, 5), (2, 4, 6), (1, 6, 5), (1, 5, 6), iš viso 25 įvykiai. Atitinkamos tikimybės yra $27/216$, $25/216$.

Tiesiog iš apibrėžimo išplaukia šitokios tikimybės savybės.

1. Kiekvieno įvykio $A$ tikimybė tenkina nelygybes $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Būtino įvykio tikimybė $P(\Omega) = 1$.
3. Negalimo įvykio tikimybė $P(\varnothing) = 0$.
4. Jei įvykis $A$ yra įvykio $B$ atskiras atvejis: $A \subset B$, tai $P(A) \leq P(B)$.

Kad įrodytume nelygybę, pakanka pastebėti, jog skaičius elementariųjų

[1] Chevalier de Méray (1607–1648) – prancūzų filosofas ir literatas.

įvykių, palankių įvykiui $A$, yra ne didesnis už skaičių įvykių, palankių įvykiui $B$.

5. Jei įvykis $A$ yra dviejų nesutaikomų įvykių $A_1$ ir $A_2$ sąjunga: $A = A_1 \cup A_2$, tai $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$ (tikimybių sudėties teorema). Tai taip pat lengvai įrodoma, nes skaičius elementariųjų įvykių, palankių $A$, yra elementariųjų įvykių, palankių $A_1$ ir $A_2$, skaičių suma.

Šis teiginys yra teisingas ir keliems kas du nesutaikomiems įvykiams. Įrodoma taip pat. Be to, jį galima įrodyti, remiantis ką tik įrodyta lygybe ir matematinės indukcijos metodu.

6. Teisinga lygybė $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Įvykiai $A$ ir $A^c$ yra nesutaikomi, be to, $A \cup A^c = \Omega$. Todėl $P(A)+P(A^c) = P(\Omega) = 1$.

## 6. KELIOS KOMBINATORIKOS FORMULĖS

Elementariojoje tikimybių teorijoje, kai tinka klasikinis tikimybės apibrėžimas, tenka skaičiuoti visus vienodai galimus ir palankius atvejus. Jei tokių atvejų nedaug, juos suskaičiuoti nesunku. Pakanka išvardyti visus galimus atvejus ir iš jų išrinkti palankiuosius. Kai elementariųjų įvykių daug, tenka ieškoti įvairių taisyklių, palengvinančių tą darbą. Tada labai praverčia kombinatorika.

Tarkime, kad turime keletą elementų $a_1, a_2, ..., a_n$. Bet kuris duotųjų elementų rinkinys $a_{k_1}, a_{k_2}, ..., a_{k_s}$ yra vadinamas *junginiu* (kombinacija). Tarp parinktųjų elementų gali būti ir pasikartojančių; jų tvarka gali būti svarbi, gali ir neturėti reikšmės.

Dažnai tenka skaičiuoti, kiek junginių galima sudaryti iš duotųjų elementų pagal kokią nors taisyklę. Tokius uždavinius paprastai vadiname kombinatoriniais, o juos nagrinėjantį matematikos skyrių – *kombinatorika* (nuo lotynų kalbos žodžio "combinare" – jungti, rišti (po du)).

Pagrindinės junginių rūšys yra gretiniai, kėliniai ir deriniai. Jie gali būti su pasikartojimais (kai kurie elementai junginiuose pasikartoja) ir be jų (visi junginio elementai yra skirtingi).

Išspręsime keletą paprasčiausių kombinatorikos uždavinių.

1. Elementų junginiai iš įvairių aibių. Tarkime, kad turime $r$ baigtinių aibių: pirmojoje aibėje yra $n_1$ elementų $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n_1}$, antrojoje – $n_2$ elementų $a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n_2}$ ir t. t., paskutinėje $r$-ojoje aibėje – $n_r$ elementų $a_{r1}, a_{r2}, ..., a_{rn_r}$. Priminsime, kad aibės elementai visada yra laikomi skirtingais. Visi junginiai po $r$ elementų $a_{1i_1}, a_{2i_2}, ..., a_{ri_r}$ taip sudaromi, kad į kiekvieną junginį įeitų po vieną elementą iš kiekvienos aibės: pirmasis junginio elementas turi būti iš pirmosios, antrasis – iš antrosios ir t. t., $r$-asis – iš $r$-osios aibės.

Nesunku suskaičiuoti, kiek bus tokių junginių. Pirmąjį junginio elementą $a_{1i_1}$ galime parinkti iš pirmosios aibės $n_1$ būdų, antrąjį $a_{2i_2}$ galime parinkti iš antrosios aibės $n_2$ būdų ir t. t., paskutinį $a_{ri_r}$ galime parinkti $n_r$ būdų. Todėl visų junginių skaičius yra $n_1 n_2 ... n_r$.

Pažymėkime duotąsias elementų aibes $A_1, A_2, ..., A_r$. Imkime tų aibių (Dekarto[1]) sandaugą $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$. Sandaugos elementai sudaryti iš visų galimų ką tik nagrinėtų junginių, taigi jų skaičius yra $n_1 n_2 ... n_r$.

Panagrinėkime specialų atvejį, kai aibės $A_1 = ... = A_r = A$ ir aibė $A$ turi $n$ elementų $a_1, a_2, ..., a_n$. Iš aibės $A$ išrenkame kurį nors elementą $a_{i_1}$. Jį grąžiname atgal. Po to renkame kitą elementą $a_{i_2}$. Vėl grąžiname atgal. Taip tęsdami, po $r$ operacijų gausime junginį $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_r}$. Tokie junginiai vadinami *gretiniais su pasikartojimais* iš $n$ elementų po $r$ elementų. Jų skaičius yra $n^r$. Gretinių su pasikartojimais skaičius yra lygus aibių sandaugos $A \times A \times \ldots \times A = A^r$ elementų skaičiui.

2. Gretiniai be pasikartojimų. Duota aibė iš $n$ elementų $a_1, a_2, ..., a_n$. *Gretiniu be pasikartojimų* iš $n$ elementų po $r$ elementų vadinamas bet kuris sutvarkytas duotosios aibės poaibis iš $r$ elementų $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_r}$; du gretiniai skiriasi arba pačiais elementais, arba jų tvarka; elementai negali pasikartoti tame pačiame gretinyje. Gretinius be pasikartojimų galime gauti ir šitokiu būdu. Iš pradžių bet kaip parenkame $a_{i_1}$ iš $n$ aibės elementų ir jo nebegrąžiname. Po to renkame antrąjį gretinio elementą $a_{i_2}$ iš likusių $n-1$ aibės elementų, jo taip pat negrąžiname, ir t. t. Pagaliau renkame $r$-ąjį gretinio elementą $a_{i_r}$ iš likusių $n-r+1$ duotosios aibės elementų. Taigi visų gretinių be pasikartojimų iš $n$ elementų po $r$ elementų skaičius yra $A_n^r = n(n-1)...(n-r+1)$. Šis žymėjimas kilęs iš prancūzų kalbos žodžio "arrangement". Jei susitartume sandaugą $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$ žymėti $m!$ (skaičiaus $m$ faktorialas), tai gautąją formulę galėtume užrašyti šitaip:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Kai $r = n$, pastaroji formulė taip pat turės prasmę, jei susitarsime, kad $0! = 1$.

3. Kėliniai be pasikartojimų. Duota aibė iš $n$ elementų. Kiekviena tų elementų seka, sudaryta iš visų $n$ elementų be pasikartojimų, vadinama *kėliniu be pasikartojimų* iš $n$ elementų. Kiek jų yra? Jų skaičius yra lygus skaičiui būdų, kuriais galima sutvarkyti duotosios aibės elementus. Tai bus gretiniai iš $n$ elementų po $n$ elementų be pasikartojimų. Jų skaičius $P_n = A_n^n = n!$. Čia $P$ primena lotynų kalbos žodį "permutatio".

4. Deriniai be pasikartojimų. Duota $n$ elementų aibė. *Deriniu* iš $n$ elementų po $r$ elementų *be pasikartojimų* vadinamas bet kuris tos aibės poaibis, sudarytas iš $r$ elementų. Pabrėšime, kad čia elementų tvarka nėra svarbi. Rasime derinių be pasikartojimų iš $n$ elementų po $r$ elementų skaičių $C_n^r$. Čia $C$ iš prancūzų kalbos žodžio "combinaison".

---

[1] René Descartes (1596–1650) – prancūzų matematikas, fizikas ir filosofas. Jo vardu dažnai vadinama aibių sandauga, kad ją būtų galima atskirti nuo aibių sankirtos, kuri kartais taip pat vadinama sandauga.

Imkime kurį nors derinį be pasikartojimų iš $r$ elementų. Perstatinėdami jo elementus, galime gauti $r!$ gretinių be pasikartojimų. Padarę tą patį su visais deriniais, gausime visus gretinius iš $n$ elementų po $r$ elementų be pasikartojimų. Vadinasi, $A_n^r = C_n^r \cdot r!$. Iš čia

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Iš pastarosios formulės išplaukia lygybė $C_n^r = C_n^{n-r}$. Papildomai apibrėšime $C_n^0$, laikydami jį lygiu 1. Šie skaičiai yra koeficientai vadinamojoje binomo formulėje

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

5. K ė l i n i a i  s u  p a s i k a r t o j i m a i s. Duota aibė iš $k$ elementų $a_1, a_2, ..., a_k$. Tarkime, kad $r_1, r_2, ..., r_k$ yra natūralieji skaičiai, $n = r_1 + r_2 + ... + r_k$. *Kėliniais su pasikartojimais* iš $n$ elementų, kuriuose $a_1$ pasikartoja $r_1$ kartų, $a_2$ pasikartoja $r_2$ kartų ir t. t., $a_k$ pasikartoja $r_k$ kartų, vadinami gretiniai su pasikartojimais, kuriuose tie elementai pasikartoja nurodytą skaičių kartų. Koks jų skaičius $P(r_1, r_2, ..., r_k)$?

Imkime $k$ elementų grupių, kurių pirmoji sudaryta iš $r_1$ elementų $b_{11}$, $b_{12}, ..., b_{1r_1}$, antroji – iš $r_2$ elementų $b_{21}, b_{22}, ..., b_{2r_2}$ ir t. t., $k$-oji – iš $r_k$ elementų $b_{k1}, b_{k2}, ..., b_{kr_k}$. Kadangi skaičius būdų, kuriais elementus $b_{11}, b_{12}, ..., b_{1r_1}$ galima išdėstyti $n$ vietose, yra $\binom{n}{r_1}$, skaičius būdų, kuriais elementus $b_{21}$, $b_{22}, ..., b_{2r_2}$ galima išdėstyti $n - r_1$ vietose, yra $\binom{n-r_1}{r_2}$ ir t. t., tai

$$P(r_1, r_2, ..., r_k) = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2} \dots \binom{n-r_1-\dots-r_{k-1}}{r_k} =$$
$$= \frac{n!}{r_1!(n-r_1)!} \cdot \frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!} \cdots 1 = \frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!}.$$

Šie skaičiai yra koeficientai formulėje, kuri apibendrina binomo formulę,

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, \dots, r_k \geq 0 \\ r_1+r_2+..+r_k=n}} \frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} ... a_k^{r_k}.$$

Nagrinėjamasis uždavinys yra ekvivalentus tokiam uždaviniui: turime $n$ skirtingų objektų ir $k$ dėžučių; reikia taip sudėlioti objektus į dėžutes, kad į $j$-ąją dėžutę ($j = 1, ..., k$) patektų $r_j$ objektų, $n = r_1 + ... + r_k$. Tai galima padaryti $P(r_1, ..., r_k)$ būdų.

6. D e r i n i a i  s u  p a s i k a r t o j i m a i s. Duota $n$ skirtingų elementų. Iš jų sudarome junginius po $r$ elementų, leisdami elementams kartotis. Elementų tvarka junginiuose neturi reikšmės. Tokius junginius vadiname *deriniais su pasikartojimais* iš $n$ elementų po $r$ elementų. Rasime jų skaičių.

Tarkime, kad elementai, iš kurių sudaromi deriniai su pasikartojimais, yra $a_1, a_2, ..., a_n$. Sudarykime lentelę

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_n, \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_n, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_n, \end{matrix}$$

kurioje yra $r$ eilučių. Iš pirmosios eilutės imsime kurį nors elementą; iš antrosios imsime elementą, arba esantį po pirmuoju, arba į dešinę nuo jo; iš trečiosios imsime elementą, esantį arba po elementu, paimtu iš antrosios eilutės, arba į dešinę nuo jo, ir t. t. Taip galime gauti bet kurį derinį su pasikartojimais iš $n$ elementų po $r$. Jų skaičius bus lygus skaičiui derinių be pasikartojimų, sudarytų iš lentelės

$$\begin{matrix} b_1, & b_2, & \dots, & b_n, \\ b_2, & b_3, & \dots, & b_{n+1}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_r, & b_{r+1}, & \dots, & b_{n+r-1} \end{matrix}$$

elementų, imant po vieną iš kiekvienos eilutės. Taigi ieškomasis skaičius yra

$$C_{n+r-1}^r = \binom{n+r-1}{r}.$$

Naudodamiesi šia formule, galime išspręsti ir šitokį uždavinį. Tarkime, kad turime $n$ vienodų objektų, kuriuos reikia išdėlioti į $r$ dėžučių. Kiekvienas išdėstymas yra apibūdinamas skaičiumi objektų, patekusių į atitinkamą dėžutę, ir aprašomas kombinacija $(n_1, n_2, ..., n_r)$; čia $n_k$ – objektų skaičius $k$-oje dėžutėje. Visų tokių išdėstymų skaičius yra

$$\binom{n+r-1}{r-1}.$$

Jei papildomai reikalautume, kad nė viena dėžutė nebūtų tuščia (t. y. $n_k > 0, \quad k = 1, ..., r$; tada būtinai $n \geq r$), tai išdėstymų skaičius būtų

$$\binom{n-1}{r-1}$$

(įrodykite!).

Ką tik įrodytos formulės labai praverčia, skaičiuojant tikimybes. Kai elementų skaičius yra nedidelis, nesunku rasti įvairių skaičių junginių skaitines reikšmes. Uždavinys pasunkėja, kai elementų skaičius yra didelis. Tada skaičių faktorialams apskaičiuoti tinka apytikslė vadinamoji Stirlingo[1] formulė. Galima įrodyti, kad

[1] James Stirling (1692–1770) – škotų matematikas.

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n+\varrho_n},$$

kai $n$ yra bet kuris natūralusis skaičius. Čia

$$\frac{1}{12n+1} < \varrho_n < \frac{1}{12n},$$

arba, dar tiksliau,

$$\frac{1}{12n+\frac{0{,}6}{n}} < \varrho_n < \frac{1}{12n+\frac{0{,}33}{n}}.$$

Šie įverčiai yra gana geri: pavyzdžiui, naudodamiesi pirmosiomis nelygybėmis ir keturženklėmis logaritmų lentelėmis, gauname $9{,}332 \cdot 10^{157} < 100! < 9{,}334 \cdot 10^{157}$. Yra ir dar tikslesnių Stirlingo formulių.

## 7. KELETAS PAVYZDŽIŲ

Išspręsime keletą šiek tiek sudėtingesnių uždavinių.

1. Berniukas žaidžia su sudedamo raidyno 5 raidėmis E, I, N, R, S, atsitiktinai dėstydamas jas į eilę (atitinkamai atverstas). Kokia tikimybė, kad jis sudės žodį NERIS?

Elementariaisiais įvykiais laikysime kiekvieną kėlinį iš tų raidžių. Jų yra 5!, visi laikytini vienodai galimais. Palankių atvejų yra 1. Todėl ieškomoji tikimybė lygi 1/5!=1/120.

2. Spynoje yra 5 diskai, ant kiekvieno jų užrašyti skaitmenys 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Kiekvienas diskas gali užimti po 10 padėčių, atitinkančių duotuosius skaitmenis. Spyna atsirakina tik tada, kai kiekvienas diskas užima tam tikrą konkrečią padėtį spynos korpuso atžvilgiu. Kokia yra tikimybė, kad, atsitiktinai parinkus diskų padėtis, spyna atsirakins?

Elementariaisiais įvykiais laikysime kiekvieną gretinį iš 5 skaitmenų su pasikartojimais. Jie yra vienodai galimi, o jų skaičius lygus $10^5$. Palankių atvejų yra 1. Ieškomoji tikimybė $1/10^5 = 0{,}00001$.

3. Gaminių partijoje yra $n$ vienetų, tarp jų $m$ blogų. Iš tos partijos atsitiktinai parenkama $r (r \leq n)$ gaminių. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus $s (s \leq r)$ blogų?

Elementariaisiais įvykiais laikysime kiekvieną derinį iš $n$ gaminių po $r$. Jų bus $\binom{n}{r}$. Visi jie laikytini vienodai galimais. Suskaičiuosime palankių elementariųjų įvykių skaičių. $s$ blogų gaminių iš $m$ turimų galime parinkti $\binom{m}{s}$ būdų, o $r - s$ gerų iš $n - m$ gerų galime parinkti $\binom{n-m}{r-s}$ būdų. Todėl palankių atvejų bus $\binom{m}{s}\binom{n-m}{r-s}$. Vadinasi, ieškomoji tikimybė yra

$$\binom{m}{s}\binom{n-m}{r-s} \Big/ \binom{n}{r}.$$

4. Loterijoje yra 100 bilietų ir 25 laimėjimai. Pirkau tris bilietus. Kokia tikimybė, kad bent vienas pirktas bilietas išloš?

Apskaičiuosime priešingo įvykio tikimybę, – kad nė vienas pirktųjų bilietų nelaimės. Elementariųjų įvykių aibė sudaryta iš $\binom{100}{3}$ vienodai galimų įvykių; kadangi neišlošia 75 bilietai, tai palankių priešingajam įvykiui atvejų bus $\binom{75}{3}$. Ieškomoji tikimybė

$$1 - \binom{75}{3} \Big/ \binom{100}{3} = 0,5824...$$

5. Piniginėje yra 4 banknotai po 10 Lt, 3 banknotai po 20 Lt, 3 banknotai po 50 Lt ir 2 banknotai po 100 Lt. Atsitiktinai iš piniginės ištraukiame keturis banknotus. Rasime tikimybę, kad ištrauktų banknotų bendra vertė bus 130 Lt.

Elementariųjų įvykių aibė sudaryta iš $\binom{12}{4}$ įvykių. Laikysime juos vienodai galimais. Apskaičiuosime palankių atvejų skaičių. 130 Lt galime gauti, paėmę du 50 Lt, vieną 20 Lt ir vieną 10 Lt banknotus arba vieną 100 Lt ir tris 10 Lt banknotus. Iš 3 penkiasdešimtličių banknotų 2 galime parinkti $\binom{3}{2}$ būdų, iš 3 dvidešimtličių 1 galime parinkti $\binom{3}{1}$ būdų ir iš 4 dešimtličių 1 galime parinkti $\binom{4}{1}$ būdų; iš 2 šimtaličių banknotų 1 galime parinkti $\binom{2}{1}$ būdų ir iš 4 dešimtličių 3 galime parinkti $\binom{4}{3}$ būdų. Palankių atvejų yra iš viso $\binom{3}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{1}\binom{4}{3}$ . Ieškomoji tikimybė

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{1}\binom{4}{3}}{\binom{12}{4}} = \frac{4}{45}.$$

Spręsdami šį uždavinį, galėjome remtis ir 5.5 savybe.

6. Statistinėje fizikoje dalelės momentinė būsena (vieta, impulsas ir t. t.) nusakoma jos koordinatėmis daugiamatėje fazinėje erdvėje. Sakykime, turime $n$ dalelių. Padalijame fazinę erdvę į mažas sritis – ląsteles. Tarkime, kad jų bus $k$. Kiekviena dalelė pateks į vieną lastelę. Visos sistemos būsena aprašoma tikimybėmis $p(r_1, r_2, ..., r_k)$, kad $j$-oje ląstelėje bus $r_j$ dalelių.

Tarkime, kad daleles galime vienas nuo kitų atskirti. Kiekviena iš jų gali patekti į bet kurią ląstelę. Gauname iš viso $k^n$ galimų pasiskirstymų, kurie vienas nuo kito skiriasi arba pačiomis dalelėmis, arba jų skaičiumi ląstelėse. Laikykime tuos pasiskirstymus vienodai galimais elementariaisiais įvykiais. Tada

$$p(r_1, r_2, ..., r_k) = \frac{n!}{r_1!\ r_2!\ ...\ r_k!}\ \frac{1}{k^n}.$$

Šiuo atveju fizikai kalba apie Maksvelo[1]–Bolcmano[2] statistiką[3]. Ji gerai aprašo dujų molekulių pasiskirstymą, bet netinka elementariųjų dalelių sistemoms. Todėl buvo sukurtos kitos statistikos. Tarkime, kad dalelių negalime atskirti vienų nuo kitų.

[1] James Clark Maxwell (1831–1879) – anglų fizikas.
[2] Ludwig Boltzmann (1844–1906) – austrų fizikas.
[3] Matematikoje statistika suprantama kas kita (žr. IV skyr.).

Todėl dabar teigiame, kad atvejai, kai dalelės pasikeičia savo vietomis ląstelėse, yra tapatūs: svarbu tik, kiek dalelių pateko į ląsteles, bet nesvarbu kurios. Manome, kad kiekvienas toks pasiskirstymas yra vienodai galimas elementarusis įvykis. Jų skaičius yra $\binom{n+k-1}{n}$ (deriniai su pasikartojimais). Tada

$$p(r_1, r_2, ..., r_k) = 1 \Big/ \binom{n+k-1}{n}.$$

Turime Bozės[1]–Einšteino[2] statistiką. Ji gerai aprašo fotonų, atomų branduolių ir atomų, turinčių lyginį elementariųjų dalelių skaičių, sistemas.

Kitoms sistemoms aprašyti reikalinga dar viena statistika. Pareikalausime, kad vienoje ląstelėje nebūtų daugiau kaip viena dalelė (todėl turi būti $n \le k$). Pasiskirstymas aprašomas, nurodant, kuriose ląstelėse yra dalelės. Kadangi yra $k$ ląstelių ir $n$ dalelių, tai galimi $\binom{k}{n}$ pasiskirstymų. Laikysime juos vienodai galimais. Gauname

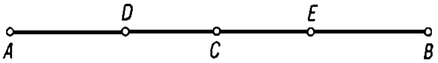
$$p(r_1, r_2, ..., r_k) = \begin{cases} 1/\binom{k}{n}, & \text{kai } 0 \le r_j \le 1 \quad (j = 1, ..., k), \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Turime vadinamąją Fermio[3]–Dirako[4] statistiką. Ji tinka elektronų, protonų, neutronų sistemoms aprašyti.

## 8. "GEOMETRINĖS" TIKIMYBĖS

Iki šiol kalbėjome apie baigtines elementariųjų įvykių erdves ir įvedėme tikimybės sąvoką, kai tiko vienodo galimumo principas. Apibendrindami šį principą, lengvai galime įvesti tikimybės sąvoką ir kai kurioms begalinėms elementariųjų įvykių erdvėms. Tarp jų bus vadinamosios "geometrinės" tikimybės. Iš pradžių panagrinėkime porą pavyzdžių.

1 p a v y z d y s. Turime atkarpą $AB$ (3 pav.), kurios ilgis $2a$. Tarkime, kad $C$ yra tos atkarpos vidurio taškas. Atsitiktinai parenkame atkarpos tašką $x$. Kokia tikimybė, kad taško $x$ atstumas nuo taško $C$ bus ne didesnis už $d$ ($d \le a$)?




[1] Jagadis Chunder Bose (1858–1937) – indų fizikas.
[2] Albert Einstein (1879–1955) – žymus pastarųjų laikų fizikas, vienas iš reliatyvumo teorijos pradininkų.
[3] Enrico Fermi (1901–1954) – italų kilmės fizikas, dirbęs Italijoje ir JAV, branduolio fizikos specialistas.
[4] Paul Adrien Maurice Dirac (g. 1902) – anglų fizikas, vienas iš kvantų mechanikos kūrėjų.

3 pav.

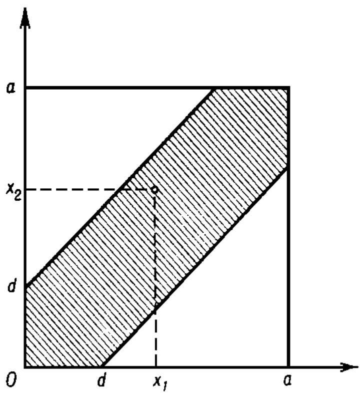
Kol kas uždavinys yra neapibrėžtas. Mes dar nenusakėme, ką reiškia ”atsitiktinai”. Įvesime ir čia vienodo galimumo sąvoką. Grubiai kalbant, tai reikš, kad, parinkdami taškus, laikysimės ”demokratijos” principų – visi taškai bus ”lygiateisiai”. Tiksliau kalbant, tai reikš, jog įvykis, kad taškas parenkamas iš kurio nors intervalo, esančio atkarpoje $AB$, ir įvykis, kad taškas parenkamas iš kito to paties ilgio intervalo (esančio, suprantama, taip pat atkarpoje $AB$), yra vienodai galimi. Todėl natūralu manyti, kad tikimybė parinkti tašką iš kurio nors intervalo yra proporcinga to intervalo ilgiui. Vadinasi, jei taškai $D$ ir $E$ yra nutolę atstumu $d$ nuo taško $C$, tai nagrinėjamoji tikimybė lygi atkarpų $DE$ ir $AB$ ilgių santykiui $2d/2a = d/a$.

2 p a v y z d y s. Tarkime, kad ilgio $a$ atkarpoje $AB$ atsitiktinai ir nepriklausomai vienas nuo kito parenkami du taškai. Kokia tikimybė, kad atstumas tarp jų bus ne didesnis už $d$ ($d \leq a$)?

Naudosimės šitokiu modeliu. Pažymėkime $x_1$ pirmojo taško, $x_2$ antrojo taško atstumus nuo $A$. Imkime stačiakampę koordinačių sistemą (4 pav.). Abscisių ašyje atidėkime $x_1$, o ordinačių – $x_2$. Visos galimos taškų $(x_1, x_2)$ padėtys sudarys kvadratą, kurio kraštinė $a$. Taškai, atitinkantys tiriamąjį įvykį, sudarys sritį $|x_1 - x_2| \leq d$.

Tarkime, kad šiuo atveju teisingas vienodo galimumo principas. ”Atsitiktinai ir nepriklausomai” reikš, kad du įvykiai, kai parenkamas taškas iš dviejų lygiapločių kvadrato sričių, yra vienodai galimi. Šiuo atveju natūralu teigti, kad tikimybė, jog taškas $(x_1, x_2)$ pateks į kurią nors sritį, yra proporcinga tos srities plotui. Vadinasi, ieškomoji tikimybė bus santykis ploto, kurį nuo kvadrato atkerta tiesės $x_2 = x_1 \pm d$, su viso kvadrato plotu:

$$\frac{a^2 - (a-d)^2}{a^2} = \frac{d}{a}\left(2 - \frac{d}{a}\right).$$




4 pav.

Pateiksime bendresnį geometrinių tikimybių apibrėžimą. Tarkime, jog nagrinėjame atsitiktinį eksperimentą, kurio elementariosios baigtys sudaro sritį $\Omega$ $s$-matėje Euklido[1] erdvėje $R^s$. Tarkime, kad sritis $\Omega$ turi Lebego[2] matą $m(\Omega)$ (kai $s=1$, tai bus ilgis, kai $s=2$, – plotas, kai $s=3$, – tūris). Imkime $\sigma$ algebrą $\mathcal{A}$ visų aibės $\Omega$ poaibių $A$, turinčių Lebego matą $mA$. Manysime, kad galioja vienodo galimumo principas: turint dvi sritis $A_1 \in \mathcal{A}$ ir $A_2 \in \mathcal{A}$, kurių matai yra vienodi, o forma ir padėtis srityje $\Omega$ gali skirtis, nėra pagrindo teigti, kad parinkti tašką iš vienos tų sričių yra daugiau galimybių, negu iš kitos. Jei ši sąlyga tenkinama, tai įvykio – atsitiktinai parinkti tašką iš srities $A$ – tikimybe laikome santykį $mA/(m\Omega)$.

Ir šis apibrėžimas, nors formaliai ir nėra griežtas, gerai derinasi su praktine patirtimi.

Taip apibrėžta tikimybė turi panašias savybes, kaip ir klasikinės schemos tikimybė. Kai $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$, $A_k \in \mathcal{A}$ $(k=1,2,...)$, tai:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega)=1$;
3. $P(\varnothing)=0$;
4. Jei $A \subset B$, tai $P(A) \leq P(B)$;
5. Jei $A \cap B = \varnothing$, tai $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
6. $P(A^c) = 1 - P(A)$;
7. Jei $A_j \cap A_k = \varnothing$ $(j \neq k)$,

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Išspręsime dar porą uždavinių.

3 pavyzdys. Biufono uždavinys. Horizontalioje plokštumoje nubrėžta sistema lygiagrečių tiesių, tarp kurių atstumai yra $a$. Ant tos plokštumos atsitiktinai metama ilgio $l$ $(l \leq a)$ adata. Reikia rasti tikimybę, kad adata kirs kurią nors iš nubrėžtų tiesių.

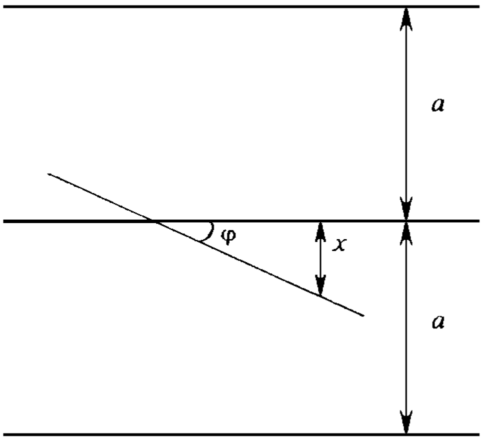
Pažymėkime raide $x$ adatos apatinio galo atstumą iki artimiausios iš viršaus lygiagretės (5 pav.), raide $\varphi$ – kampą tarp adatos ir tos lygiagretės. Aišku, $x$ ir $\varphi$ nepriklausomai vienas nuo kito įgyja visas reikšmes ribose $0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq x \leq a$. Taigi visos galimos $(\varphi, x)$ reikšmės sudaro stačiakampį, kurio kraštinės lygios $\pi$ ir $a$, o tiriamasis įvykis įvyksta tada ir tik tada, kai $x \leq l \sin\varphi$ (žr. 6 pav.). Galima sakyti, kad tinka vienodo galimumo principas. Taigi ieškomoji tikimybė yra

$$\frac{\int_0^{\pi} l \sin\varphi \, d\varphi}{\pi a} = \frac{2l}{\pi a}.$$

---

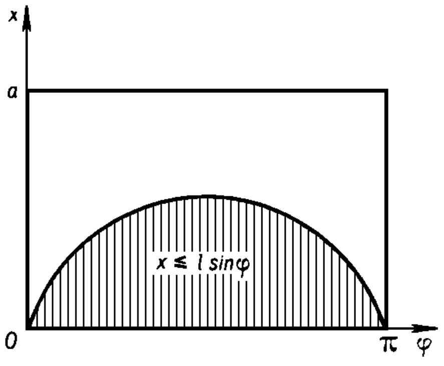
[1] $E\grave{\upsilon}\kappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\zeta$ (365–300) – graikų matematikas.

[2] Henry Lebesgue (1875–1941) – prancūzų matematikas, vienas iš realiųjų funkcijų moderniosios teorijos kūrėjų.




5 pav.

Į tikimybės išraišką be atstumo $a$ tarp lygiagrečių ir adatos ilgio $l$ įeina skaičius $\pi$. Todėl iš eksperimentų galima įvertinti jo reikšmę. Tam reikia atlikti seriją eksperimentų, iš jų rasti adatos kirtimosi su lygiagretėmis statistinį dažnį. Tokių eksperimentų buvo atlikta nemažai (žr. lentelę, paimtą iš [26]).




6 pav.

Tie eksperimentai dar kartą patvirtina atsitiktinių reiškinių statistinio dažnio stabilumą (žinoma, jei neįtariame, kad eksperimentuotojai, iš anksto žinantys $\pi$ reikšmę, nutraukia adatos mėtymą palankiausiu momentu). Antra vertus, matome, kad kai kuriuos matematikos uždavinius galime apytiksliai spręsti atsitiktinių eksperimentų pagalba. Dabar toks metodas (paprastai vadinamas Monte Karlo[1] metodu) gana plačiai taikomas sudėtingoms algebrinėms, diferencialinėms, integralinėms ir pan. lygtims, taip pat kitiems matematikos uždaviniams spręsti.

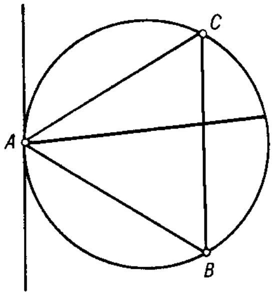
2 lentelė

| Eksperimentuotojas | Santykis $l/a$ | Metimų skaičius | Pataikymų skaičius | $\pi$ įvertis |
|---|---|---|---|---|
| Volfas, 1850 | 0,8 | 5000 | 2532 | 3,1596 |
| Smitas, 1855 | 0,6 | 3204 | 1218,5 | 3,1553 |
| Morganas, 1860 | 1,0 | 600 | 382,5 | 3,137 |
| Foksas, 1884 | 0,75 | 1030 | 489 | 3,1595 |
| Lazerinis, 1901 | 0,83 | 3408 | 1808 | 3,1415929 |
| Reina, 1925 | 0,5419 | 2520 | 859 | 3,1795 |

4 pavyzdys. Bertrano[2] uždavinys. Spindulio $R$ apskritime atsitiktinai brėžiama styga. Kokia tikimybė, kad jos ilgis bus didesnis už $R\sqrt{3}$, t. y. įbrėžto į apskritimą taisyklingojo trikampio kraštinę?

Galimi keli šio uždavinio sprendimai.

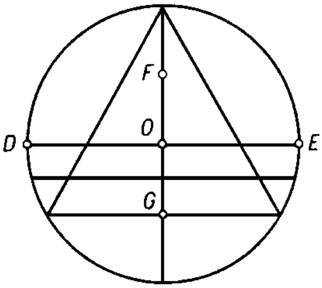
a. Kiekviena styga kerta apskritimą dviejuose taškuose. Tarkime, kad abu taškai yra tolygiai pasiskirstę apskritime, o jų padėtys – nepriklausomos.



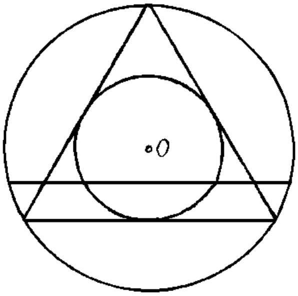

7 pav.

Nemažindami bendrumo, galime laikyti vieną iš tų taškų $A$ (7 pav.) fiksuotu. Įbrėžkime į apskritimą taisyklingąjį trikampį taip, kad viena jo viršūnė sutaptų su tašku $A$. Kitas trikampio viršūnes pažymėkime $B, C$. Antrasis stygos galas gali būti bet kuris apskritimo taškas. Styga bus ilgesnė už taisyklingojo trikampio kraštinę, jei antrasis jos galas bus bet kuris lanko $BC$ taškas. Ieškomoji tikimybė yra $1/3$.

[1] Nuo Monte Carlo miesto, kuriame yra plačiai žinomi lošimo namai, pavadinimo.
[2] Joseph Bertrand (1822–1900) – prancūzų matematikas.




8 pav.




9 pav.

b. Stygos ilgis priklauso nuo jos atstumo iki apskritimo centro ir nepriklauso nuo krypties. Todėl galime manyti, kad styga yra fiksuotos krypties, lygiagreti kuriam nors skersmeniui $DE$ (8 pav.), o galimi susikirtimo su jam statmenu skersmeniu taškai yra tolygiai pasiskirstę. Atidėkime ant pastarojo skersmens nuo centro $O$ į abi puses po $R/2$. Gausime taškus $F, G$. Styga bus ilgesnė už taisyklingojo trikampio kraštinę tada ir tik tada, kai ji kirs atkarpą $FG$. Ieškomoji tikimybė yra 1/2.

c. Kiekvieną stygą vienareikšmiškai nurodo statmens, nuleisto į ją iš centro, pagrindas. Tarkime, kad galimi tokie taškai yra tolygiai pasiskirstę skritulyje. Nubrėžkime spindulio $R/2$ apskritimą, koncentrišką duotajam (9 pav.). Styga bus ilgesnė už įbrėžto taisyklingojo trikampio kraštinę tada ir tik tada, kai statmens pagrindas bus mažesniajame skritulyje. Ieškomoji tikimybė yra

$$\frac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

Atrodytų, kad gavome prieštaravimus. Todėl šis uždavinys dažnai vadinamas Bertrano paradoksu. Tačiau iš tikrųjų visi trys sprendimai yra teisingi, nes sprendėme ne vieną, o tris uždavinius. Uždavinio sąlygoje nebuvo tiksliai nusakyta, ką reiškia "atsitiktinai brėžiama styga". Kiekviename sprendime atsitiktinumą traktavome skirtingai.

Šis pavyzdys rodo, kad tikimybių teorijos uždaviniuose (ne tik geometrinių tikimybių) visada reikia tiksliai apibrėžti, ką reiškia žodis "atsitiktinai".

## 9. TIKIMYBIŲ TEORIJOS AKSIOMOS

Remdamiesi klasikiniu tikimybės apibrėžimu ir jo praplėtimu vadinamosioms geometrinėms tikimybėms, negalime kurti griežtos matematinės teorijos. Tiek klasikinės, tiek geometrinės tikimybės yra pagrįstos ne visai griežta vienodo tikėtinumo sąvoka. Dėl to negriežtumo sunku ja naudotis ir, elgiantis neapdairiai, galimos klaidingos išvados. Yra ir kitas tos sąvokos trūkumas: ji taikoma tik gana siaurai atsitiktinių reiškinių klasei. Imkime paprastą pavyzdį. Tarkime, kad metamas nesimetriškas lošimo kauliukas: jis nėra tikslios kubo formos, pagamintas iš nevienalytės medžiagos (realūs lošimo kauliukai tokie ir yra). Intuityviai aišku, kad bet kurios tokio kauliuko sienelės atsivertimas turi stabilų statistinį dažnį. Tai patvirtina ir eksperimentai. Tuo tarpu pagal klasikinį tikimybės apibrėžimą nieko negalima pasakyti apie jo sienelių atsivertimo tikimybes.

Norėdami paversti tikimybių teoriją griežta matematine disciplina, turime ją aksiomatizuoti. Taip daroma ir kitose matematikos šakose. Štai kad ir geometrija. Ji nagrinėja realaus pasaulio geometrines formas ir jų santykius. Tačiau gamtoje neturime nei idealių apskritimų, nei trikampių, kuriuos nagrinėja geometrija. Geometrinis apskritimas ir geometrinis trikampis yra realių "apskritimų" ir realių "trikampių" abstrakcija. Jie atspindi tai, kas yra esminio realiesiems apskritimams ir realiesiems trikampiams. Geometrijos teoremos apie geometrinių figūrų santykius atspindi realių erdvinių formų santykius. Taigi geometrija yra empirinių geometrinių faktų abstraktus modelis. Geometrijos aksiomatikoje iš pradžių įvedamos kelios aibės objektų, kurie vadinami "taškais", "tiesėmis", "plokštumomis". Kokia jų reali prasmė, mums nesvarbu. Toliau nusakomos sąvokos "taškas yra tiesėje", "taškas yra plokštumoje", "tiesė yra plokštumoje" ir t. t. Dar toliau formuluojami teiginiai – aksiomos, kurie nusako svarbiausias sąryšių savybes. Kiti geometrijos teiginiai – teoremos – yra išvedami dedukciškai iš aksiomų. Žinoma, aksiomos parenkamos taip, kad atspindėtų realaus pasaulio geometrinių formų svarbiausias savybes. Visos teorijos teisingumo kriterijus yra praktika.

Panašiai elgiamės ir tikimybių teorijoje. Susipažinsime su A. Kolmogorovo aksiomatika.

Elementariųjų įvykių erdve laikoma bet kuri netuščia aibė $\Omega$. Mums nerūpi jos prigimtis. Atsitiktiniais įvykiais laikomi tos aibės poaibiai. Tačiau ne visi poaibiai gali būti įvykiais, nes priešingu atveju, įvesdami tikimybės sąvoką, susidurtume su dideliais matematiniais sunkumais. Kiekvienam įvykiui – atitinkamam aibės $\Omega$ poaibiui – priskiriamas skaičius, vadinamas to įvykio tikimybe ir turįs tam tikras savybes.

Dabar griežtai apibrėšime reikalingas sąvokas.

Norėdami formalizuoti kurį nors tikimybių uždavinį – sudaryti jo matematinį modelį, atitinkamam eksperimentui priskiriame aibę $\Omega$ su jos poaibių $\sigma$ algebra $\mathcal{A}$, t. y. mačią erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}\}$. Elementariaisiais įvykiais laikysime aibės $\Omega$ elementus, atsitiktiniais įvykiais – mačias aibes, t. y. sistemos $\mathcal{A}$ aibes. Visi kiti $\Omega$ poaibiai (jei tokių yra), nepriklausantys $\mathcal{A}$, įvykiais nelaikomi. $\Omega$ yra laikoma būtinu įvykiu, $\varnothing$ – negalimu įvykiu. $A^c$ vadinamas įvykiu, priešingu įvykiui $A$. Jei dvi aibės $A$ ir $B$ iš $\mathcal{A}$ neturi bendrų elementų, tai įvykiai $A$ ir $B$ vadinami *nesutaikomais*.

Tačiau kol kas mūsų matematinis modelis yra nepilnas. Reikia dar įvesti tikimybės sąvoką.

*Tikimybe* vadiname skaitinę funkciją $P : \mathcal{A} \to R$, apibrėžtą $\sigma$ algebroje $\mathcal{A}$ ir tenkinančią aksiomas:

1. Funkcija $P$ yra neneigiama – turi būti $P(A) \geq 0$, kai $A \in \mathcal{A}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Funkcija $P$ yra $\sigma$ adityvi: jei sekos $A_1, A_2, ...$ kas dvi aibės neturi bendrų elementų, tai

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

(suprantama, eilutė turi konverguoti).

Jau kalbėjome, kad įvykiais laikome ne visus $\Omega$ poaibius. Pasirodo, kad, paėmus platesnę už $\sigma$ algebrą poaibių sistemą, ne visada galima įvesti tikimybę.

Jei sistema $\mathcal{A}$ yra baigtinė, tai iš tikimybės pakanka reikalauti tik *baigtinio adityvumo*, t. y. kad 3 aksioma galiotų tik baigtiniam aibių skaičiui. Toliau įrodysime (10.1 teorema), kad $P(\varnothing) = 0$. Jei sistema $\mathcal{A}$ yra baigtinė, o $A_1, A_2, ...$ yra jos aibių, kas dvi nedengiančių viena kitos, begalinė seka, tai tarp tų aibių nelygių tuščiajai gali būti tik baigtinis skaičius.

Trejetas $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ yra vadinamas *tikimybine erdve*. Atitinkama tikimybinė erdvė ir yra atsitiktinio eksperimento matematinis modelis.

1 p a v y z d y s. Metame lošimo kauliuką. Šio eksperimento matematinis modelis bus šitoks. Elementariųjų įvykių erdvė sudaryta iš šešių elementų $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_6\}$. Imame visų jos poaibių algebrą $\mathcal{A}$ (ji bus ir $\sigma$ algebra). Kiekvienas $\Omega$ poaibis – atsitiktinis įvykis. Įvedame tikimybę $P$. Jei $A = \{\omega_{k_1}, ..., \omega_{k_r}\}$, tai $P(A) = r/6$. Nesunku patikrinti, kad aibės funkcija $P(A)$ tenkina aksiomas.

2 p a v y z d y s. Nagrinėsime uždavinį apie dviejų taškų atsitiktinį parinkimą ilgio $a$ atkarpoje (8.2 pavyzdys). Čia elementariųjų įvykių erdvė $\Omega$ yra visuma plokštumos taškų $(x_1, x_2)$, tenkinančių nelygybes $0 \leq x_1 \leq a,\ 0 \leq x_2 \leq a$. Sudarykime aibių $\sigma$ algebrą $\mathcal{A}$ iš visų plokštumos mačių Lebego prasme aibių, telpančių tame kvadrate. Aibės $A \in \mathcal{A}$ tikimybe laikysime $mA/a^2$; čia $m$ reiškia Lebego matą. Jis tenkina aksiomas.

3 p a v y z d y s. Gana paprastos yra tikimybinės erdvės, kai aibė $\Omega = \{\omega_k\}$ baigtinė arba skaiti. Tada galime susitarti įvykiais laikyti visus $\Omega$ poaibius be išimties. Jų sistema $\mathcal{A}$, kaip nesunku suvokti, yra $\sigma$ algebra. Tikimybę $P$ galime įvesti šitokiu būdu. Imkime baigtinę arba skaičią seką neneigiamų skaičių $p_k$ (tiek, kiek yra aibėje $\Omega$ elementų) su sąlyga

$$\sum_k p_k = 1$$

ir pažymėkime $P(\{\omega_k\}) = p_k$.

Jei įvykis $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, ...\} \subset \Omega$ yra baigtinė arba skaiti aibė, tai susitarkime laikyti

$$P(A) = P(\{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, ...\}) = \sum_{k_j} P(\{\omega_{k_j}\}) = \sum_{k_j} p_{k_j}.$$

Nesunku patikrinti, kad $P$ tenkina tikimybių aksiomas.

Aksiomų sistema yra *neprieštaringa*. Tai reiškia, kad egzistuoja objektai, kurie ją tenkina. Tą matėme iš pavyzdžių.

Aksiomų sistema nėra *pilna*, nes atsitiktinio įvykio tikimybės ji nenusako vienareikšmiškai. Grįžkime prie lošimo kauliuko (1 pavyzdys). Sudarykime tą pačią elementriųjų įvykių erdvę $\Omega$ ir tą pačią atsitiktinių įvykių sistemą $\mathcal{A}$. Tikimybę dabar nusakykime kitaip. Imkime $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = 1/4$, $P(\{\omega_4\}) = P(\{\omega_5\}) = P(\{\omega_6\}) = 1/12$. Kitoms aibėms $A \in \mathcal{A}$ apibrėžkime $P(A)$, remdamiesi adityvumu. Vėl turėsime tikimybinę erdvę, bet su kita tikimybe.

Nepilnumas dar nereiškia, kad aksiomų sistema yra bloga – ji tik universalesnė. Jei 1 pavyzdžio tikimybinė erdvė tinka tik idealiam lošimo kauliukui, tai, atitinkamai pakeitę tikimybės apibrėžimą, ją galime pritaikyti ir netaisyklingiems kauliukams.

Kartais reikalaujama, kad tikimybinė erdvė turėtų šitokią papildomą savybę: jei $C \in \mathcal{A}$ ir $P(C) = 0$, tai ir kiekvienas aibės $C$ poaibis turi priklausyti $\mathcal{A}$. Tada tikimybinė erdvė vadinama *pilna*. Tačiau šioje knygoje tokio reikalavimo neįvesime.

## 10. TIKIMYBIŲ SAVYBĖS

Pateiksime paprasčiausias išvadas iš tikimybių teorijos aksiomų. Matysime, kad ir abstrakčiai įvesta tikimybės sąvoka turi tas pačias svarbiausias savybes, kaip ir klasikinė arba geometrinė tikimybė.

Visur laikysime tikimybinę erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ fiksuota.

**1 teorema.** $P(\varnothing) = 0$.

Į r o d y m a s. Trečiojoje aksiomoje imame $A_1 = A_2 = ... = \varnothing$. Kadangi

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$$

ir įvykiai $A_k$ yra kas du nesutaikomi, tai iš tos aksiomos išplaukia, kad $P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + ...$ Pastaroji lygybė yra teisinga tik tada, kai $P(\varnothing) = 0$. □

Iš šios teoremos ir tikimybės aksiomų matome, jog funkcija $P$ yra matas. Todėl ji turi visas mato savybes (žr. V skyriaus 3 ir 4 skyrelius). Mes čia pakartosime jas be įrodymo, išskyrus 6 teoremą, kurią įrodysime pilnai.

**2 teorema.** *Jei įvykiai $A_1, A_2, ..., A_n$ yra kas du nesutaikomi, tai*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

P a s t a b a. Kaip jau minėjome 9 skyrelyje, ši tikimybių savybė vadinama jų baigtiniu adityvumu.

**3 teorema.** *Kai $A$ ir $B$ yra bet kurie įvykiai,*

$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B).$$

**1 išvada.** *Jei įvykis $A$ yra įvykio $B$ atskiras atvejis: $A \subset B$, tai $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.*

**2 išvada.** *Jei įvykis $A$ yra įvykio $B$ atskiras atvejis: $A \subset B$, tai $P(A) \leq P(B)$.*

**3 išvada.** *$P(A^c) = 1 - P(A)$, kai $A$ yra bet kuris įvykis.*

**4 išvada.** *$P(A) \leq 1$, kai $A$ yra bet kuris įvykis.*

**4 teorema.** *Jei $A_1, A_2, ...$ yra bet kokių įvykių seka, tai*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

**Išvada.** *Jei $A_1, A_2, ..., A_n$ yra atsitiktiniai įvykiai, tai*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

**5 teorema.** *$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, kai $A, B$ – bet kokie įvykiai.*

Apibendrinsime šią teoremą.

**6 teorema.** *Jei $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 2)$ yra bet kokie įvykiai, tai*

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) &= \sum_{1 \leq k \leq n} P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + \\ &+ \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) - ... + \\ &+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \\ &= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_m \leq n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap ... \cap A_{k_m}). \end{aligned}$$

Į r o d y m a s. Kai $n = 2$, lygybė teisinga pagal 5 teoremą. Tarkime, kad ji teisinga, kai $n \geq 2$ yra kuris nors sveikas skaičius. Įrodysime jos teisingumą, kai turime $n + 1$ įvykį. Iš 5 teoremos

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) = P\Big[\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \cup A_{n+1}\Big] = P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + P(A_n) -$$
$$- P\Big[\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\Big].$$

Iš indukcijos prielaidos išplaukia

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) = &\sum_{1\le k\le n} P(A_k) - \sum_{1\le k_1<k_2\le n} P(A_{k_1}\cap A_{k_2}) + \\ &+ \sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n} P(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap A_{k_3}) - ... + \\ &+ (-1)^{n-1} P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n) + P(A_n) - \\ &- \sum_{1\le k\le n} P(A_k\cap A_{n+1}) + \sum_{1\le k_1<k_2\le n} P(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap A_{n+1}) - \\ &- \sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n} P(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap A_{k_3}\cap A_{n+1}) + ... + \\ &+ (-1)^{n+1} P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n\cap A_{n+1}). \end{aligned}$$

Gautajame reiškinyje atitinkamai sugrupavę narius, turime

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) = &\sum_{1\le k\le n+1} P(A_k) - \sum_{1\le k_1<k_2\le n+1} P(A_{k_1}\cap A_{k_2}) + \\ &+ \sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n+1} P(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap A_{k_3}) - ... + \\ &+ (-1)^{n} P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{n+1}). \end{aligned}$$

Remdamiesi matematinės indukcijos principu, darome išvadą, kad teiginys yra teisingas, kai $n \geq 2$ – bet kuris natūralusis skaičius. □

**7 teorema.** *Jei įvykiai $A_k$ $(k = 1, 2, ...)$ sudaro monotoniškai didėjančią seką: $A_1 \subset A_2 \subset ...$ ir*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

*tai $P(A_n) \to P(A)$, kai $n \to \infty$.*

**8 teorema.** *Jei įvykiai $A_k$ $(k = 1, 2, ...)$ sudaro monotoniškai mažėjančią seką: $A_1 \supset A_2 \supset ...$ ir*

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

*tai* $P(A_n) \to P(A)$, *kai* $n \to \infty$.

**9 teorema.** *Tarkime, kad netuščios aibės* $\Omega$ *poaibių algebroje* $\mathcal{A}$ *apibrėžtas tikimybinis matas* $P$. *Pažymėję* $\sigma(\mathcal{A})$ *sistemos* $\mathcal{A}$ *generuotą* $\sigma$ *algebrą, galime rasti tikimybinį matą* $Q$, *apibrėžtą mačioje erdvėje* $\{\Omega, \sigma(\mathcal{A})\}$ *ir tenkinantį sąlygą* $Q(A) = P(A)$ *visoms* $A \in \mathcal{A}$. *Funkcija* $Q$ *yra vienareikšmiškai nusakyta.*

## 11. SĄLYGINĖS TIKIMYBĖS

Dažnai tenka nagrinėti įvykių tikimybes, kai prie duotojo sąlygų komplekso $K$ yra pridedamos papildomos sąlygos. Paprastai papildoma sąlyga būna koks nors įvykis $E$. Gauname naują platesnį sąlygų kompleksą $K_1$, sudarytą iš sąlygų $K$ ir papildomos sąlygos $E$. Įvykio $A$ tikimybę naujojo komplekso $K_1$ atžvilgiu natūralu vadinti *sąlygine* tikimybe su papildoma sąlyga $E$. Tokią tikimybę žymėsime $P(A|E)$ arba $P_E(A)$. Skaitysime: "įvykio $A$ tikimybė, kai yra įvykęs įvykis $E$" arba "įvykio $A$ tikimybė su sąlyga $E$". Tada įvykių tikimybes, kai turime tik sąlygų kompleksą $K$ be papildomos sąlygos $E$, galėtume vadinti *absoliučiomis*, arba *nesąlyginėmis*. Suprantama, šie pavadinimai yra reliatyvūs.

Kaip galime apibrėžti sąlygines tikimybes? Kad būtų vaizdžiau, išnagrinėkime konkretų pavyzdį.

Tarkime, kad $n$ asmenų kolektyve yra $v > 0$ vyrų ir $n - v$ moterų, tarp jų $d$ dešiniarankių ir $n - d$ kairiarankių (manome, kad nėra asmenų, kurie būtų kartu dešiniarankiai ir kairiarankiai). Tarp vyrų yra $v_d$ dešiniarankių. Iš visų kolektyvo narių atsitiktinai parenkamas vienas asmuo (realizuojamas sąlygų kompleksas $K$). Tarkime, kad tinka vienodo galimumo principas. Pažymėkime $V$ vyro parinkimą, $D$ – dešiniarankio. Tikimybė, kad atsitiktinai parinktas asmuo bus dešiniarankis, yra $P(D) = d/n$. Sakykime, mus domina ne visi asmenys, bet tik vyrai. Tikimybė parinkti dešiniarankį, kai renkame tik iš vyrų (papildoma sąlyga $V$), bus lygi

$$P(D|V) = \frac{v_d}{v} = \frac{v_d/n}{v/n} = \frac{P(D \cap V)}{P(V)}.$$

Matome, kad sąlyginė tikimybė $P(D|V)$ išreiškiama dviejų nesąlyginių tikimybių santykiu.

Analogišką formulę galime gauti ir bendresniu atveju, kai tinka klasikinis tikimybės apibrėžimas.

Tarkime, kad turime elementariųjų įvykių erdvę iš $n$ vienodai galimų įvykių. Sakykime, įvykį $E$ sudaro $k$ $(0 < k \leq n)$ elementariųjų įvykių, o įvykį $A \cap E$ sudaro $r$ $(0 \leq r \leq k)$ įvykių. Tada, skaičiuojant įvykio $A$ sąlyginę tikimybę su sąlyga $E$, visų elementariųjų įvykių erdvė bus sudaryta iš $k$ vienodai galimų elementariųjų įvykių, o tarp jų palankių įvykiui $A$ bus $r$. Vadinasi,

$$P(A|E) = \frac{r}{k} = \frac{r/n}{k/n} = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}.$$

Iš čia išplaukia lygybė

$$P(A \cap E) = P(E)P(A|E),$$

t.y. tikimybė įvykiams $A$ ir $E$ įvykti drauge yra lygi įvykio $E$ (absoliučiai) tikimybei, padaugintai iš įvykio $A$ tikimybės su sąlyga, kad įvykis $E$ yra įvykęs. Šis teiginys kartais vadinamas *tikimybių daugybos teorema*.

Iš šių samprotavimų paaiškėja, kaip reikia įvesti sąlygines tikimybes aksiomiškai. Tarkime, kad turime tikimybinę erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$. Jei $A$ ir $E$ yra įvykiai ir $P(E) > 0$, tai įvykio $A$ *sąlygine tikimybe* su sąlyga, kad $E$ yra įvykęs, vadinsime

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}.$$

Sąlyginę tikimybę apibrėžėme tik tuo atveju, kai sąlygos $E$ tikimybė $P(E) > 0$. Todėl visur, kalbėdami apie sąlygines tikimybes, turėsime omenyje, kad sąlygos tikimybė nėra lygi nuliui, nors to specialiai ir neaptarsime.

1 p a v y z d y s. Du draugai, Jonas ir Petras, laisvalaikiu žaidžia lošimo kauliuku, kurio sienelės su nelyginiu akučių skaičiumi nudažytos žaliai, o sienelės su lyginiu akučių skaičiumi – baltai. Jonas meta lošimo kauliuką, krintantį uždengia delnu ir siūlo Petrui dalyvauti šitokiame žaidime: jei atsivertusių akučių skaičius yra mažesnis už keturis, tai laimi Petras, priešingu atveju laimi Jonas. Tačiau Petras pastebėjo, kad kauliukas nukrito žalia sienele į viršų. Kokia tikimybė jam išlošti?

Apskaičiuosime tą tikimybę dvejopai. a. Žinodami, kad atsivertė kauliuko žalioji sienelė, turime tris vienodai galimus elementariuosius įvykius: atsivertė 1, 3 arba 5 akutės. Iš jų palankių įvykių, kai laimi Petras, yra du. Todėl ieškomoji tikimybė lygi 2/3. b. Išreikšime ieškomąją tikimybę absoliučiomis tikimybėmis. Pažymėkime raide $A$ įvykį "atsivertė mažiau kaip 4 akutės" (1, 2, 3, akutės), $E$ – įvykį "atsivertė žalios spalvos sienelė" (1, 3, 5 akutės). Įvykio $E$ tikimybė yra 1/2; tikimybė, kad įvykiai $A$ ir $E$ įvyks kartu, yra 1/3. Todėl ieškomoji tikimybė $P(A|E) = P(A \cap E)/P(E) = = 2/3$.

2 p a v y z d y s. Dėžėje yra 3 balti ir 6 juodi rutuliai, kurie skiriasi tik spalva. Atsitiktinai ištraukiamas vienas rutulys ir nebegrąžinamas į dėžę. Po to atsitiktinai traukiamas antras rutulys. Apskaičiuosime tikimybę ištraukti baltą rutulį antruoju traukimu, kai žinoma, kad pirmą kartą buvo ištrauktas baltas rutulys. a. Kadangi po pirmojo traukimo dėžėje liko 2 balti ir 6 juodi rutuliai, tai ieškomoji tikimybė yra 1/4. b. Pažymėkime $A$ įvykį "pirmasis ištrauktas rutulys yra baltas", $B$ – įvykį "antrasis ištrauktas rutulys yra baltas". Elementariųjų įvykių aibė sudaryta iš $9 \cdot 8 = 72$ įvykių $(\omega_1, \omega_2)$; čia $\omega_1$ yra kurio nors fiksuoto rutulio iš 9 ištraukimas pirmuoju traukimu, o $\omega_2$ – fiksuoto rutulio iš likusių 8 ištraukimas antruoju traukimu. Tarp

jų palankių įvykiui $A \cap B$ (abu kartus ištraukiamas baltas rutulys) yra $3 \cdot 2 = 6$, o palankių įvykiui $A$ – $3 \cdot 8 = 24$. Todėl $P(A) = 1/3$, $P(A \cap B) = 1/12$. Iš čia $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = 1/4$.

Panagrinėsime sąlyginių tikimybių savybes.

**1 teorema.** *Sąlyginės tikimybės turi šias savybes:*

1. $P(A|E) \geq 0$.
2. $P(\Omega|E) = 1$.
3. *Jei* $A_1, A_2, ...$ *yra kas du nesutaikomi įvykiai, tai*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|E\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|E).$$

Į r o d y m a s. 1. Iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo išplaukia, kad ji neneigiama.

2. $P(\Omega|E) = \dfrac{P(\Omega \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(E)}{P(E)} = 1.$

3. Pagal sąlyginės tikimybės apibrėžimą

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|E\Big) = \frac{P\Big[\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap E)\Big]}{P(E)}.$$

Kadangi įvykiai $A_k$ yra kas du nesutaikomi, tai tuo labiau bus kas du nesutaikomi ir įvykiai $A_k \cap E$. Iš visiško tikimybės adityvumo išplaukia, kad

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|E\Big) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \cap E)}{P(E)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(A_k \cap E)}{P(E)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|E). \ \square$$

Kaip matome, sąlyginės tikimybės tenkina tikimybių teorijos aksiomas. Vadinasi, trejetas $\{\Omega, \mathcal{A}, P_E\}$ sudaro tikimybinę erdvę. Todėl (kai $E$ fiksuotas) sąlyginėms tikimybėms tinka tos pačios teoremos, kurias įrodėme nesąlyginėms tikimybėms.

Iš pavadinimo išplauktų, kad sąlyginė tikimybė įvykiui $E$ įvykti, kai $E$ yra įvykęs, turėtų būti lygi 1. Taip ir yra.

**2 teorema.** $P(E|E) = 1$.

Į r o d y m a s. Vėl iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo išplaukia:

$$P(E|E) = \frac{P(E \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E)}{P(E)} = 1. \ \square$$

Nagrinėsime toliau sąlyginių tikimybių savybes. Nagrinėdami klasikinę tikimybę, įrodėme vadinamąją tikimybių daugybos teoremą. Apibrėžus tikimybę aksiomiškai, ji yra triviali išvada iš apibrėžimo.

**3 (daugybos) teorema.** $P(A \cap E) = P(A)P(E|A) = P(E)P(A|E)$.

Apibendrinsime šią teoremą.

**4 teorema.** *Jei* $n \geq 2$*, tai*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) =& P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)... \\ & ...P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

P a s t a b a. Kaip susitarėme, sąlyginėse tikimybėse sąlygų tikimybės turi būti teigiamos. Šiuo atveju pakanka reikalauti, tik kad būtų $P(A_1 \cap A_2 \cap \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$. Iš tikrųjų, kadangi

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-2} \subset ... \subset A_1 \cap A_2 \subset A_1,$$

tai

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \leq P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-2}) \leq ... \leq \\ \leq P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1). \end{aligned}$$

Į r o d y m a s. Kai $n = 2$, teiginys teisingas (3 teorema). Tarkime, kad jis teisingas, kai turime $n - 1 \geq 2$ įvykių. Tada pagal indukcijos prielaidą ir 3 teoremą

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) &= P\big((A_1 \cap A_2) \cap A_3 \cap ... \cap A_n\big) = \\ &= P(A_1 \cap A_2)P\big(A_3|(A_1 \cap A_2)\big)\times \\ &\times P\big(A_4|(A_1 \cap A_2) \cap A_3\big)...\times \\ &\times P\big(A_n|(A_1 \cap A_2) \cap ... \cap A_{n-1}\big) = \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\times \\ &\times P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)...\times \\ &\times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

Iš matematinės indukcijos principo išplaukia, kad įrodomasis teiginys yra teisingas kiekvienam baigtiniam įvykių skaičiui. □

**5 teorema (pilnosios tikimybės formulė).** *Jei* $\{H_k\}$ *yra baigtinė arba skaiti aibė įvykių, kurie kas du nesutaikomi ir*

$$\bigcup_k H_k = \Omega,$$

$A$ *– bet koks įvykis, tai*

$$P(A) = \sum_k P(H_k)P(A|H_k).$$

Į r o d y m a s. Iš jungimo ir kirtimosi operacijų distributyvumo išplaukia

$$A = A \cap \Omega = A \cap \Big(\bigcup_k H_k\Big) = \bigcup_k (H_k \cap A).$$

Kadangi įvykiai $H_k$ yra kas du nesutaikomi, tai tuo labiau tokie yra ir įvykiai $H_k \cap A$. Remiantis tikimybės adityvumu ir tikimybių daugybos teorema,

$$P(A) = \sum_k P(H_k \cap A) = \sum_k P(H_k)P(A|H_k). \ \square$$

Teoremos pavadinimas yra tradicinis. Matematiniu požiūriu ji beveik trivieli, bet naudinga sprendžiant uždavinius.

3 p a v y z d y s. Šešerios automatinės staklės gamina veržles. Staklės vienodos, bet nevienodai susidėvėjusios. Visos jos pagamina po 10 000 veržlių per dieną, bet niekalo dalis nevienoda. Žinoma, kad trejos iš jų daro po 1% niekalo, dvejos – po 2% ir vienerios – 3%. Iš visos produkcijos atsitiktinai imama veržlė. Kokia tikimybė, kad ji bus bloga?

Įvykį, kai paimama veržlė, pagaminta vienomis iš geriausių staklių, pažymėkime raide $H_1$, vidutinių staklių – raide $H_2$, blogiausių staklių – $H_3$; blogos veržlės parinkimą pažymėkime $A$. Per dieną staklės pagamina $6 \cdot 10\ 000 = 60\ 000$ veržlių; tarp jų yra $30\ 000 \cdot 0,01 + 20\ 000 \cdot 0,02 + 10\ 000 \cdot 0,03 = 1000$ blogų. Manydami, kad tinka vienodo galimumo principas, turime

$$P(A) = \frac{1000}{60\ 000} = \frac{1}{60}.$$

Iš pilnosios tikimybės formulės gauname

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \\ = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{100} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{100} = \frac{1}{60}.$$

Sudarykite atitinkamą tikimybinę erdvę!

**6 teorema (Bajeso[1] formulė).**

$$P(A|E) = \frac{P(A)P(E|A)}{P(E)}.$$

Į r o d y m a s. Ši formulė yra triviali daugybos teoremos išvada. $\square$

[1] Thomas Bayes (1702 – 1761) – anglų matematikas.

**7 (Bajeso) teorema.** *Jei* $\{H_k\}$ *yra baigtinė arba skaiti sistema įvykių, kurie kas du nesutaikomi ir*

$$\bigcup_k H_k = \Omega,$$

*A – bet koks įvykis, tai*

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum\limits_k P(H_k)P(A|H_k)} \quad (j = 1, 2, ...).$$

Į r o d y m a s išplaukia iš 6 ir 5 teoremų. □

Ši teorema taip pat vadinama *hipotezių tikimybių teorema*. Įvykius $H_k$ tada vadiname hipotezėmis. Įvykis $A$ gali įvykti, kai teisingos vienos ar kitos sąlygos – hipotezės, kurios yra kas dvi nesutaikomos ir kurių sąjunga – būtinas įvykis. Tarkime, kad iš anksto žinomos hipotezių tikimybės $P(H_k)$ (*apriorinės* tikimybės) ir tikimybės, kad įvyks įvykis $A$ su tomis hipotezėmis $P(A|H_k)$. Tada, remiantis šia teorema, galima apskaičiuoti tikimybes $P(H_j|A)$ (*aposteriorines* tikimybes), kad buvo teisinga hipotezė $H_j$, jei įvykis $A$ įvyko.

4 p a v y z d y s. Tarkime, kad išpildomos ankstesnio pavyzdžio sąlygos. Atsitiktinai buvo parinkta veržlė. Paaiškėjo, kad ji bloga. Kokia tikimybė, kad ją pagamino geriausios staklės?

Vartodami tuos pačius žymenis, kaip ir ankstesnio pavyzdžio sprendime, turime

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)P(H_3)P(A|H_3)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{60}} = \frac{3}{10}.$$

## 12. NEPRIKLAUSOMI ĮVYKIAI

Nepriklausomumo sąvoka yra viena iš svarbiausių tikimybių teorijoje – be jos ta teorija būtų tik specialus mato bei integralo teorijos atvejis.

Pirmiausia įvesime dviejų įvykių $A$ ir $B$ nepriklausomumo sąvoką. Sakydami, kad įvykio $A$ įvykimas nepriklauso nuo to, ar įvykis $B$ įvyko, ar ne, ir atvirkščiai, mes ir nurodome tai, ką matematikos kalba vadiname įvykių nepriklausomumu. Matematiškai galėtume jį nusakyti šitaip. Imkime sąlyginę tikimybę $P(A|B)$ ($P(B) > 0$), kad įvyks įvykis $A$, kai yra įvykęs $B$. Jei $P(A|B) = P(A)$, tai natūralu įvykį $A$ laikyti nepriklausomu nuo įvykio $B$. Tada iš tikimybių daugybos teoremos išplaukia, kad

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B).$$

Tokią pat lygybę gauname ir tuo atveju, kai $P(B|A) = P(B)$. Lygybė yra simetriška $A$ ir $B$ atžvilgiu. Remdamiesi tais samprotavimais, ir susitarsime du įvykius $A$ ir $B$ vadinti *nepriklausomais*, kai $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Kartais dar kalbama apie *tikimybinį*, arba *stochastinį*[1], *nepriklausomumą*, norint atskirti nuo kitų nepriklausomumo sąvokų, vartojamų matematikoje. Atkreipsime dėmesį, jog šiame apibrėžime nereikalaujame, kad kuris nors iš įvykių $A$ arba $B$ turėtų teigiamas tikimybes.

1 p a v y z d y s. Klasėje yra 12 berniukų ir 12 mergaičių, tarp jų 8 mokslo pirmūnai: 4 berniukai ir 4 mergaitės. Mokytojas atsitiktinai iškviečia vieną mokinį atsakinėti. Įvykiai "iškviestas berniukas" ir "iškviestas pirmūnas" yra nepriklausomi, nes tų įvykių tikimybės lygios $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ ir $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$, o tikimybė iškviesti berniuką pirmūną lygi $\frac{4}{24} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

2 p a v y z d y s. Bet koks įvykis $A$ ir negalimas įvykis $\varnothing$ yra nepriklausomi. Iš tikrųjų, kadangi $A \cap \varnothing = \varnothing$ ir $P(\varnothing) = 0$, tai $P(A \cap \varnothing) = P(\varnothing) = P(A)P(\varnothing)$.

3 p a v y z d y s. Bet koks įvykis $A$ ir būtinas įvykis $\Omega$ yra nepriklausomi. Kadangi $A \cap \Omega = A$ ir $P(\Omega) = 1$, tai $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A)P(\Omega)$.

**1 teorema** *Jei $P(B) > 0$, tai įvykiai $A$ ir $B$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai $P(A|B) = P(A)$.*

Į r o d y m a s. Sąlygos pakankamumas jau buvo įrodytas: jei $P(A|B) = P(A)$, tai iš daugybos teoremos išplaukia $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Sąlygos būtinumas įrodomas paprastai: jei įvykiai $A$ ir $B$ yra nepriklausomi, tai

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A). \ \square$$

**2 teorema.** *Jei įvykiai $A$ ir $B$ nepriklausomi, tai nepriklausomi ir įvykiai $A$ ir $B^c$.*

Į r o d y m a s. Teisingos lygybės

$$\begin{gathered} P(A \cap B^c) = P\big(A \cap (\Omega \backslash B)\big) = \\ = P\big(A \backslash (A \cap B)\big) = P(A) - P(A \cap B) = \\ = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A)P(B^c). \ \square \end{gathered}$$

**Išvada.** Jei vieno iš dvejetų $A, B$; $A, B^c$; $A^c, B$; $A^c, B^c$ įvykiai yra nepriklausomi, tai nepriklausomi ir kitų dvejetų įvykiai.

**3 teorema.** *Jei $A_1, ..., A_n$ yra kas du nesutaikomi įvykiai, $B$ – bet koks įvykis ir kiekvieno iš dvejetų $A_1, B; ...; A_n, B$ įvykiai yra nepriklausomi, tai taip pat nepriklausomi yra įvykiai $A_1 \cup ... \cup A_n$ ir $B$.*

---

[1] Nuo graikiško žodžio $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau\iota\varsigma$ – pataikymas į taikinį.

Į r o d y m a s. Teoremą pakanka įrodyti tik tuo atveju, kai $n = 2$. Kadangi $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \varnothing$, tai

$$P\big((A_1 \cup A_2) \cap B\big) = P\big((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\big) =$$
$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) = P(A_1)P(B) + P(A_2)P(B) =$$
$$= \big(P(A_1) + P(A_2)\big)P(B) = P(A_1 \cup A_2)P(B). \ \square$$

Apibendrinsime nepriklausomumo sąvoką. Tarkime, kad turime baigtinę arba skaičią įvykių sistemą $\{A_\lambda, \ \lambda \in \Lambda\}$. Sakome, kad tie įvykiai yra *nepriklausomi* (visi), jei

$$P(A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} \cap ... \cap A_{\lambda_n}) = P(A_{\lambda_1})P(A_{\lambda_2})...P(A_{\lambda_n}),$$

kai $n \geq 2$ yra bet kuris natūralusis skaičius, o $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – bet kurie skirtingi indeksai iš sistemos $\Lambda$.

Kai turime du įvykius, šis apibrėžimas sutampa su ankstesniuoju. Kai turime tris įvykius $A_1, A_2, A_3$, jų nepriklausomumui nusakyti reikia 4 lygybių

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2),$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3),$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3),$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Apskritai, jei turime baigtinį skaičių $k$ įvykių, tai jų nepriklausomumui nusakyti reikia

$$\binom{k}{2} + \binom{k}{3} + ... + \binom{k}{k} = 2^k - k - 1$$

lygybių.

Jei turime keletą įvykių (daugiau kaip du), kurie yra kas du nepriklausomi, tai jie nebūtinai yra nepriklausomi (visi). Tai matyti iš šitokio pavyzdžio.

4 p a v y z d y s. Turime keturias korteles su numeriais 110, 101, 011, 000. Atsitiktinai parenkame vieną kortelę. Tarkime, kad įvyko įvykis $A_1$, jei parinkome kortelę, kurios numeris prasideda 0, $A_2$ – jei numerio antrasis skaitmuo yra 0, $A_3$ – jei trečiasis skaitmuo yra 0. Aišku,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2},$$
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4},$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Iš apibrėžimo išplaukia, kad nepriklausomų įvykių sistemos posistemis taip pat yra sudarytas iš nepriklausomų įvykių. Jei iš nepriklausomų įvykių sistemos parinksime skirtingų įvykių grupes ir imsime kiekvienos grupės įvykių sankirtas, tai tos sankirtos sudarys nepriklausomų įvykių sistemą.

**4 teorema.** *Jei sistemos $\{A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ įvykiai yra nepriklausomi, tai, pakeitę bet kuriuos iš įvykių $A_\lambda$ jiems priešingais įvykiais $A_\lambda^c$, vėl gausime nepriklausomų įvykių sistemą.*

Į r o d y m a s. Patogumo dėlei įvesime simboliškus žymenis: jei $A$ yra kuris nors įvykis, tai $A^1 = A,\ A^0 = A^c$. Tada teoremos teiginį galime formuluoti šitaip: jei sistemos $\{A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ įvykiai yra nepriklausomi, tai ir sistemos $\{A_\lambda^{\varepsilon_\lambda},\ \lambda \in \Lambda\}$, kur $\varepsilon_\lambda$ įgyja bet kurią iš reikšmių 0 arba 1, įvykiai taip pat yra nepriklausomi. Reikės įrodyti, kad

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_{\lambda_k}^{\varepsilon_{\lambda_k}}\Big) = \prod_{k=1}^{n} P\big(A_{\lambda_k}^{\varepsilon_{\lambda_k}}\big),$$

kai $\lambda_1, ..., \lambda_n$ yra bet kurie ir $\varepsilon_{\lambda_k}$ taip pat bet kurie (lygūs 0 arba 1).

Nesiaurindami bendrumo, galime suprastinti indeksų rašymą, pakeisdami $\lambda_k$ tiesiog $k$. Įrodinėsime, kad

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^{\varepsilon_k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} P\big(A_k^{\varepsilon_k}\big). \tag{1}$$

Kai $n = 2$, šis teiginys išplaukia iš 2 teoremos.

Tarkime, kad teiginys įrodytas, kai turime $n-1 \geq 2$ įvykių. Įrodysime, kad jis teisingas ir tada, kai įvykių yra $n$. Pažymėkime $L$ aibę vektorių $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ , kurie tenkina (1) lygybę. Aibė $L$ yra netuščia, nes jai priklauso (1, ..., 1).

Tarkime, kad koks nors vektorius $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ priklauso $L$ ir ne visos jo koordinatės yra nuliai. Bet kurią jo koordinatę, lygią 1, pakeiskime 0. Parodysime, kad ir pakeistasis vektorius priklausys aibei $L$. Kad būtų lengviau užrašyti, imkime $\varepsilon_n = 1$. Turime

$$\Big(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}\Big) \cap A_n^c = \Big(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}\Big) \Big\backslash \Big(\Big(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}\Big) \cap A_n\Big).$$

Iš 10.3 teoremos 1 išvados išplaukia, kad

$$P\Big(\Big(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}\Big) \cap A_n^c\Big) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}\Big) - P\Big(\Big(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}\Big) \cap A_n\Big).$$

Kadangi $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}, 1) \in L$, tai, pasinaudoję indukcijos prielaida, gauname

$$P\Big(\Big(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^{\varepsilon_k}\Big) \cap A_n^c\Big) = \prod_{k=1}^{n-1} P(A_k^{\varepsilon_k}) - P(A_n) \prod_{k=1}^{n-1} P(A_k^{\varepsilon_k}) =$$

$$= \big(1 - P(A_n)\big) \prod_{k=1}^{n-1} P(A_k^{\varepsilon_k}) = P(A_n^c) \prod_{k=1}^{n-1} P(A_k^{\varepsilon_k}).$$

Taigi $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}, 0) \in L$. Vadinasi, pradėję vektoriumi (1, ..., 1, 1) ir paeiliui pakeitę po vieną vienetą nuliu, po baigtinio žingsnių skaičiaus įsitikinsime, kad bet kuris vektorius $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ priklauso $L$.

Iš indukcijos principo išplaukia teoremos teiginys. □

**5 teorema.** *Jei* $\{A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ *yra nepriklausomų įvykių sistema, tai*

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{r} A_{\lambda_{m_j}} \Big| \bigcap_{k=1}^{s} A_{\lambda_{n_k}}\Big) = P\Big(\bigcap_{j=1}^{r} A_{\lambda_{m_j}}\Big),$$

*kai* $A_{\lambda_{m_1}}, ..., A_{\lambda_{m_r}}, A_{\lambda_{n_1}}, ..., A_{\lambda_{n_s}}$ $(\lambda_{m_1}, ..., \lambda_{m_r}, \lambda_{n_1}, ..., \lambda_{n_s} \in \Lambda)$ *yra skirtingi tos sistemos įvykiai (suprantama, sąlygos tikimybė turi būti teigiama).*

Įrodyti teoremą paliekame skaitytojui.

Kol kas kalbėjome apie atskirų įvykių nepriklausomumą. Dabar apibrėšime įvykių sistemų nepriklausomumą.

Tarkime, kad $\{S_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ yra įvykių sistemų $S_\lambda$ šeima iš tos pačios tikimybinės erdvės. Sakysime, kad tos sistemos yra *nepriklausomos*, jei, paėmę iš kiekvienos sistemos $S_\lambda$ po bet kurį įvykį $A_\lambda$, gauname nepriklausomų įvykių sistemą $\{A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$. Dažnai tenka nagrinėti įvykių sistemų šeimas, kai sistemos yra algebros arba $\sigma$ algebros. Tada kalbame apie algebrų arba $\sigma$ algebrų nepriklausomumą.

## 13. NEPRIKLAUSOMI EKSPERIMENTAI

Iki šiol nagrinėjome tikimybinius modelius, kurie aprašo vieno eksperimento rezultatus. Jei ir kalbėjome apie rutulio pakartotinį traukimą iš dėžės, tai tuos du traukimus traktavome kaip vieną eksperimentą. Dažnai palyginti nesunku aprašyti vieno eksperimento rezultatų tikimybinį pasiskirstymą, bet daug sunkiau kalbėti apie eksperimentų seriją. Pavyzdžiui, nesunku aprašyti vieno kauliuko metimą, bet daug sunkiau aprašyti metimų seriją. Uždavinys palengvėja, kai galime padaryti prielaidą, jog visi metimai atliekami identiškomis sąlygomis ir kurio nors metimo rezultatai neturi įtakos tolesniems metimams, kitaip tariant, galime daryti prielaidą, kad įvykiai, atitinkantys atskirus metimus, yra nepriklausomi. Tada kalbame apie nepriklausomus metimus. Kyla klausimas, ar negalima, remiantis vieno eksperimento rezultatų tikimybėmis, aprašyti visos metimų serijos rezultatų tikimybinį pasiskirstymą. Atsakymas yra teigiamas. Sudarysime nepriklausomų eksperimentų serijos matematinį modelį.

Pirmiausia išnagrinėsime paprastą pavyzdį. Mesdami kauliuką vieną kartą, gauname elementariųjų įvykių aibę $\Omega$, sudarytą iš šešių elementų $\{\omega_1, ..., \omega_6\}$; čia $\omega_k$ reiškia įvykį, kad atsivertė $k$ akučių. Įvykiai, susiję su šiuo eksperimentu, yra visi galimi tos aibės poaibiai. Laikydami elementariuosius įvykius vienodai galimais, įvedame kiekvieno jų tikimybę, lygią $1/6$; bet kurio kito įvykio tikimybė bus lygi tą įvykį sudarančių elementariųjų įvykių skaičiui, padaugintam iš $1/6$.

Meskime kauliuką du kartus. Tų dviejų metimų rezultatą galėsime nusakyti dvejetu $(\omega_{1k}, \omega_{2l})$; čia $\omega_{1k}$ yra įvykis, kai pirmąjį kartą atsivertė $k$ akučių, $\omega_{2l}$ – įvykis, kai antrąjį kartą atsivertė $l$ akučių. Turime iš viso 36 elementariuosius įvykius. Jų visuma yra dviejų aibių $\Omega_1 = \{\omega_{11}, ..., \omega_{16}\}$ ir $\Omega_2 = \{\omega_{21}, ..., \omega_{26}\}$ (Dekarto) sandauga $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Imkime visų aibės $\Omega$ poaibių sistemą. Tie poaibiai bus įvykiai. Pareikalavę, kad kiekvienas dvejetas $(\omega_{1k}, \omega_{2l})$ būtų vienodai galimas, turime $P(\{\omega_{1k}, \omega_{2l}\}) = 1/36$. Jei $A_k$ yra įvykis, kai atsiverčia $k$ akučių, metant kauliuką pirmą kartą, o $B_l$ – įvykis, kai atsiverčia $l$ akučių, metant kauliuką antrą kartą, tai $A_k = \{(\omega_{1k}, \omega_{21}), ..., (\omega_{1k}, \omega_{26})\}$, $B_l = \{(\omega_{11}, \omega_{2l}), ..., (\omega_{16}, \omega_{2l})\}$. Todėl $P(A_k) = 6/36 = 1/6$, $P(B_l) = 6/36 = 1/6$. Kadangi $A_k \cap B_l = (\omega_{1k}, \omega_{2l})$ ir $P(A_k \cap B_l) = 1/36$, tai įvykiai $A_k$ ir $B_l$ yra nepriklausomi visiems $k = 1, ..., 6$ ir $l = 1, ..., 6$. Iš 12.3 teoremos išplaukia, kad bet kuris įvykis, susijęs su pirmuoju metimu, ir bet kuris įvykis, susijęs su antruoju metimu, yra nepriklausomi.

Dabar aprašysime bendrą kelių nepriklausomų eksperimentų matematinį modelį. Tarkime, kad turime $n$ eksperimentų, kuriuos atitinka tikimybinės erdvės $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1\}, ..., \{\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n\}$. Tų eksperimentų rezultatai yra elementarieji įvykiai $(\omega_1, ..., \omega_n)$, $\omega_1 \in \Omega_1, ..., \omega_n \in \Omega_n$. Jie sudaro aibių $\Omega_1, ..., \Omega_n$ (Dekarto) sandaugą $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$, t. y. aibę baigtinių sekų

$$\{(\omega_1, ..., \omega_n) : \omega_1 \in \Omega_1, ..., \omega_n \in \Omega_n\}.$$

Dabar reikia išskirti sistemą aibės $\Omega$ poaibių, kurie laikytini įvykiais. Imkime "stačiakampes aibes" – sandaugas

$$A_1 \times ... \times A_n; \tag{1}$$

čia $A_1 \in \mathcal{A}_1, ..., A_n \in \mathcal{A}_n$. Jas vadinsime mačiais stačiakampiais. Jie visi bus aibės $\Omega$ poaibiai; pati $\Omega$ yra viena iš tokio tipo aibių. Visi matūs stačiakampiai nesudaro $\sigma$ algebros, netgi algebros. Tačiau pagal V.1.2 teoremą egzistuoja $\sigma$ algebra $\mathcal{A}$, generuota mačių stačiakampių. Ji paprastai žymima $\mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_n$. Gauname mačią erdvę $\{\Omega, \mathcal{A}\}$, kurią dažnai žymime

$$\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\} \otimes ... \otimes \{\Omega_n, \mathcal{A}_n\}. \tag{2}$$

Šių apibrėžimų prasmė šitokia. Jei erdvės $\{\Omega_1, \mathcal{A}_1\}, ...\{\Omega_n, \mathcal{A}_n\}$ aprašo atskirus eksperimentus, tai (2) erdvė aprašo visus juos drauge. Tada, sakysime, pirmojo eksperimento įvykį $A_1$ galime nusakyti kaip įvykį $A_1 \times \Omega_2 \times \times ... \times \Omega_n$ – "cilindrinę" aibę – (2) erdvėje.

Dabar reikia įvesti (2) erdvėje tikimybinį matą. Jei eksperimentai yra nepriklausomi, tai kiekvieno (1) įvykio tikimybė turi būti lygi sandaugai $P_1(A_1)...P_n(A_n)$. Parodysime, kad toks tikimybinis matas egzistuoja.

Šis klausimas sprendžiamas labai paprastai, kai aibės $\Omega_k$ yra baigtinės arba skaičios. Tarkime, kad $\Omega_k = \{\omega_k^{(j)},\ j = 1, 2, ...\}$ ir $P_k(\{\omega_k^{(j)}\}) = p_k^{(j)}$; čia $p_k^{(j)}$ yra neneigami skaičiai ir

$$\sum_j p_k^{(j)} = 1.$$

Įvykio $A_k = \{\omega_k^{(l_k)},\ l_k \in N_k\}$ tikimybė yra

$$P_k(A_k) = \sum_{l_k \in N_k} p_k^{(l_k)}.$$

Tada $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_n$ sudaroma iš visų aibės $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ poaibių. Kiekvienam elementariajam įvykiui $(\omega_1^{(l_1)}, ..., \omega_n^{(l_n)})$ imkime $P\{(\omega_1^{(l_1)}, ..., \omega_n^{(l_n)})\} = p_1^{(l_1)}, ..., p_n^{(l_n)}$, o bet kurio įvykio $A = \{(\omega_1^{(l_1)}, ..., \omega_n^{(l_n)}),\ l_1 \in N_1, ..., l_n \in N_n\}$ tikimybinį matą apibrėžkime lygybe

$$P(A) = \sum_{l_1 \in N_1} ... \sum_{l_n \in N_n} p_1^{(l_1)} ... p_n^{(l_n)}.$$

Aišku, $P(A)$ tenkins tikimybių aksiomas; be to,

$$P(A) = \sum_{l_1 \in N_1} p_1^{(l_1)} ... \sum_{l_n \in N_n} p_n^{(l_n)} = P_1(A_1)...P_n(A_n).$$

Daug sudėtingiau apibrėžti tikimybinį matą bendruoju atveju. Kaip tas daroma, aprašyta V.10 skyrelyje.

## 14. BERNULIO EKSPERIMENTAI

Paprasčiausia nepriklausomų eksperimentų schema yra vadinamieji Bernulio eksperimentai. Turime $n$ nepriklausomų eksperimentų. Atlikę kurį nors iš jų, gauname vieną iš dviejų elementariųjų įvykių $\omega_1, \omega_0$. Visuose eksperimentuose jie yra tie patys ir jų tikimybės $p$ ir $q = 1 - p$ taip pat yra tos pačios.

1 p a v y z d y s. Metame simetrišką monetą $n$ kartų; metimai nepriklausomi. Kiekvieną kartą įvyks vienas iš dviejų įvykių: atvirs herbas (įvykis $\omega_1$) arba skaičius (įvykis $\omega_0$). Kadangi moneta yra simetriška, tai $p = q = 1/2$.

2 p a v y z d y s. Metame lošimo kauliuką $n$ kartų; metimai nepriklausomi. Stebime du įvykius: $\omega_1$ – šešių akučių atsivertimą ir $\omega_0$ – ne šešių akučių atsivertimą. Jei kauliukas yra idealus, tai $p = 1/6,\ q = 5/6$.

Sudarysime Bernulio eksperimentų matematinį modelį, remdamiesi 13 skyrelio samprotavimais. Kurio nors, sakysime $k$-ojo, eksperimento matematinis modelis yra tikimybinė erdvė $\{\Omega_k, \mathcal{A}_k, P_k\}$; čia $\Omega_k = \{\omega_1, \omega_0\}$, $\mathcal{A}_k = \{\varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_0\}, \Omega_k\}$ ir $P_k(\{\omega_1\}) = p$, $P_k(\{\omega_0\}) = q$. Visų $n$ eksperimentų modelis bus tikimybinė erdvė $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$,

$$\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n = \Omega_1^n,\ \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1^n,\ P = P_1 \times ... \times P_n = P_1^n.$$

$\mathcal{A}$ bus visų $\Omega$ poaibių sistema. Rasime tikimybinį matą $P$. Aibė $\Omega$ bus sudaryta iš baigtinių sekų

$$\{\omega_{\varepsilon_1}, \omega_{\varepsilon_2}, ..., \omega_{\varepsilon_n}\}, \tag{1}$$

kuriose $\varepsilon_k$ įgyja reikšmę 0 arba 1. Kadangi erdvė yra baigtinė, tai užteks tikimybinį matą apibrėžti tik tiems elementariesiems įvykiams. Remdamiesi 13 skyrelyje išdėstyta medžiaga, turime imti

$$P(\{\omega_{\varepsilon_1}, ..., \omega_{\varepsilon_n}\}) = \prod_{k=1}^{n} P_k(\{\omega_{\varepsilon_k}\}) = p^{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k} q^{n-\sum_{k=1}^n \varepsilon_k}. \tag{2}$$

Kad pastaroji formulė turėtų prasmę, imant visas $p$ ir $\varepsilon_k$ reikšmes, susitarsime joje $0^0$ laikyti 1. Įvykių sistemos $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ bus nepriklausomos.

Išspręsime keletą uždavinių.

1 u ž d a v i n y s. Rasime tikimybę $p_n(k)$, kad, atlikus $n$ Bernulio eksperimentų, įvykis $\omega_1$ įvyks $k$ kartų $(0 \le k \le n)$.

Reikia suskaičiuoti, kiek yra (1) elementariųjų įvykių, kuriuose visi $\varepsilon$ reikšmę 1 įgyja $k$ kartų. Tai gali atsitikti $\binom{n}{k}$ kartų. Kiekvieno tokio įvykio tikimybė pagal (2) formulę yra $p^k q^{n-k}$. Todėl ieškomoji tikimybė

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Išskleidę dvinarį $(px+q)^n$ pagal Niutono[1] binomo formulę

$$(px+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} x^k,$$

[1] Isaac Newton (1643–1727) – anglų matematikas ir fizikas.

matome, kad $p_n(k)$ yra $x^k$ koeficientas. Pastaroji formulė yra specialus vadinamųjų generuojančių funkcijų atvejis.

3 p a v y z d y s. Elektroninė schema sudaryta iš 6 grandžių. Per mėnesį kiekviena iš grandžių, nepriklausomai nuo kitų, gali sugesti su tikimybe $p = 0,1$. Schema veikia normaliai, jei sugedusių grandžių yra ne daugiau kaip dvi. Reikia rasti tikimybę, kad schema veiks normaliai visą mėnesį.

Turime Bernulio eksperimentus su $n = 6$, $p = 0,1$; $q = 0,9$. Tikimybė, kad nesuges nė viena grandis, yra

$$p_6(0) = \binom{6}{0} p^0 q^6,$$

kad suges viena grandis –

$$p_6(1) = \binom{6}{1} p q^5,$$

kad suges dvi grandys –

$$p_6(2) = \binom{6}{2} p^2 q^4.$$

Ieškomoji tikimybė

$$p_6(0) + p_6(1) + p_6(2) = 0,9^6 + 6 \cdot 0,1 \cdot 0,9^5 + 15 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^4 = 0,984...$$

2 u ž d a v i n y s. Tikimybė $p_n(k)$ yra $p, n$ ir $k$ funkcija. Fiksuokime $p$ ir $n$. Kaip tada kinta $p_n(k)$, kintant $k$? Mums rūpi rasti tas $k$ reikšmes, kurioms $p_n(k)$ yra didžiausia. Jos vadinamos *tikėtiniausiomis* įvykių $\omega_1$ skaičiaus reikšmėmis.

Tarkime, kad $0 < p < 1$. Nagrinėkime santykį $(k = 0, 1, ..., n-1)$

$$\frac{p_n(k+1)}{p_n(k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}.$$

Iš čia matome, kad $p_n(k+1)$ yra didesnė už $p_n(k)$, jai lygi arba už ją mažesnė tada ir tik tada, kai atitinkamai skaičius $(n-k)p$ yra didesnis už $(k+1)q$, jam lygus arba už jį mažesnis, t. y. $k$ mažesnis už $np - q = (n+1)p - 1$, jam lygus arba už jį didesnis.

Skirsime du atvejus.

a) $(n+1)p$ yra sveikasis skaičius. Tikimybė $p_n(k)$ įgyja didžiausią reikšmę, kai $k$ lygus $(n+1)p - 1$ ir $(n+1)p$. Iki tol ji didėja, po to – mažėja.

b) $(n+1)p$ nėra sveikasis skaičius. Tikimybė $p_n(k)$ įgyja didžiausią reikšmę, kai $k$ yra skaičiaus $(n+1)p$ sveikoji dalis $[(n+1)p]$. Iki tol ji didėja, o toliau – mažėja.

Jei $p = 0$, tai $p_n(0) = 1$, ir $p_n(k) = 0$, kai $k = 1, ..., n$.

Jei $p = 1$, tai $p_n(n) = 1$, ir $p_n(k) = 0$, kai $k = 0, ..., n-1$.

Pažymėję $k_0$ tikėtiniausią reikšmę, gauname, kad $k_0/n = p + r/n$; čia $-1 < r < 2$. Vadinasi, "tikėtiniausia" statistinio dažnio reikšmė, esant pakankamai dideliems $n$, kiek norima mažai skiriasi nuo tikimybės $p$.

4 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką 50 kartų; metimai nepriklausomi. Kokia tikėtiniausia šešių akučių atvirtimo reikšmė?

Kauliuko metimus jau nagrinėjome 2 pavyzdyje. Skaičius $(50 + 1) \cdot 1/6$ nėra sveikasis. Jo sveikoji dalis lygi 8. Tai ir yra tikėtiniausia reikšmė. 8 kartus šešios akutės atsiverčia su tikimybe

$$\binom{50}{8}\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{5}{6}\right)^{42} = 0,151...$$

Kaip matome, ji nedaug skiriasi nuo $1/6$.

Norint rasti šios tikimybės skaitinę reikšmę, tiesiog skaičiuojant binominį koeficientą, dauginant bei dalijant reikiamus skaičius, kad ir po atitinkamų suprastinimų, reikėtų sugaišti nemažai laiko. Tiesa, galima naudotis binominių koeficientų bei logaritmų lentelėmis. Tada uždavinys žymiai suprastėja. Tačiau binominių koeficientų $\binom{n}{k}$ lentelės yra sudarytos tik nedideliems $n$ ir $k$. Kai $n$ ir $k$ dideli, reikia naudotis 6 skyrelyje pateikta Stirlingo formule.

## 15. TIKIMYBĖS $p_n(k)$ ASIMPTOTIKA

Analizuodami 14 skyrelio 4 pavyzdį, matėme, kad apskaičiuoti tikimybę $p_n(k)$, kai $n$ ir $k$ dideli, yra nelengva. Jau sakėme, kad tada galima naudotis Stirlingo formule. Skaičiavimų suprastinimui pravartu turėti gatavas formules. Pamėginsime jas gauti.

Parašysime Stirlingo formulę šitaip:

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \varrho(n);$$

čia $1/(12n + 1) < \varrho(n) < 1/(12n)$.

Mums reikės dar ir kitokių įverčių. Toliau visur $\theta$ reikš skaičių, ne visada tą patį, bet aprėžtą moduliu 1: $|\theta| \leq 1$.

**1 lema.** *Jei $|x| \leq 1/2$, tai*

$$|\ln(1 + x)| \leq 2|x|,$$
$$(1 + x)\ln(1 + x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\theta|x|^3.$$

Įrodymas. Iš Makloreno[1] formulės

[1] Colin Maclaurin (1698–1746) – škotų matematikas.

$$\ln(1+x) = \ln 1 + \frac{x}{1+\theta x}.$$

Iš čia gauname pirmąją lemos nelygybę.

Pažymėję $\psi(x) = (1+x)\ln(1+x)$ ir pastebėję, kad

$$\psi'(x) = 1 + \ln(1+x),\ \psi^{(j)}(x) = \frac{(-1)^j (j-2)!}{(1+x)^{j-1}}\ (j = 2, 3, ...),$$

iš Makloreno formulės gauname

$$\psi(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + R;$$

čia

$$R = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{(-x)^j}{j(j-1)}.$$

Kadangi $|x| \le 1/2$, tai

$$|R| \le \frac{|x|^3}{6} \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^j = \frac{1}{3}|x|^3. \ \square$$

**1 (Muavro[1]–Laplaso lokalioji) teorema.** *Jei $a$, $b$, $p$ yra fiksuoti skaičiai,*

$$B_n = \sqrt{npq},\ t = \frac{k-np}{B_n},$$

*tai*

$$B_n\sqrt{2\pi}p_n(k) = e^{-t^2/2}(1+r_n);$$

*čia $r_n \to 0$, kai $n \to \infty$, tolygiai visiems $k$ su sąlyga $a \le t \le b$.*

Į r o d y m a s. Įrodysime kiek daugiau: įvertinsime liekamąjį narį $r_n$. Be to, nereikalausime, kad $p$ būtų fiksuotas.

Pažymėkime

$$\delta = \frac{k}{n} - p,\ s_n = k - np = n\delta$$

ir tarkime, kad tenkinama sąlyga

$$|\delta| \le \frac{1}{2}\min(p, q).$$

Ši sąlyga bendresnė už reikalavimą, kad $t = \delta\sqrt{n}/\sqrt{pq}$ būtų tarp dviejų fiksuotų skaičių, kai $p$ yra fiksuotas.

---

[1] Minimą teoremą, kai $p$ yra bet kuris fiksuotas, įrodė Laplasas. Atvejis, kai $p = 1/2$, buvo žinomas Muavrui.

Atkreipsime dėmesį, kad

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
k &= n(p-\delta) = np\Big(1-\frac{\delta}{p}\Big) \geq \frac{1}{2}np,\\
n-k &= nq\Big(1+\frac{\delta}{p}\Big) \geq \frac{1}{2}nq.
\end{aligned}
$$

Sulogaritmavę lygybės

$$
p_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}
$$

abi puses, pritaikę Stirlingo formulę ir atlikę elementarius prastinimus, gauname

$$
\begin{aligned}
\ln p_n(k) = \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\ln n - \Big(k+\frac{1}{2}\Big)\ln k - \Big(n-k+\frac{1}{2}\Big)\ln(n-k) -\\
-\frac{1}{2}\ln 2\pi + klnp + (n-k)\ln q + \varrho_1;
\end{aligned}
$$

čia

$$
\begin{aligned}
|\varrho_1| = |\varrho(n) - \varrho(k) - \varrho(n-k)| < \frac{1}{12k} + \frac{1}{12(n-k)} \leq\\
\leq \frac{1}{6np} + \frac{1}{6nq} = \frac{1}{6npq} = \frac{1}{6}B_n^{-2}.
\end{aligned}
$$

Skaičius $k$ ir $n-k$ po logaritmo ženklu pakeičiame (1) reiškiniais. Sugrupuojame narius su $\ln n, \ln p, \ln q$. Gauname

$$
\begin{aligned}
\ln p_n(k) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi - \ln B_n - \Big(k+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1-\frac{\delta}{p}\Big) -\\
-\Big(n-k+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\frac{\delta}{q}\Big) + \varrho_1.
\end{aligned}
$$

Remdamiesi 1 lema, randame įverčius

$$
\Big|\frac{1}{2}\ln\Big(1-\frac{\delta}{p}\Big) + \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{\delta}{q}\Big)\Big| \leq \frac{|\delta|}{p} + \frac{|\delta|}{q} = \frac{|\delta|}{pq} = \frac{|s_n|}{B_n^2}
$$

ir

$$
\begin{aligned}
&k\ln\Big(1-\frac{\delta}{p}\Big) + (n-k)\ln\Big(1+\frac{\delta}{q}\Big) =\\
&= np\Big(1-\frac{\delta}{p}\Big)\ln\Big(1-\frac{\delta}{p}\Big) + nq\Big(1+\frac{\delta}{q}\Big)\ln\Big(1+\frac{\delta}{q}\Big) =\\
&= np\Big(-\frac{\delta}{p} + \frac{\delta^2}{2p^2} + \frac{1}{3}\,\theta\,\frac{|\delta|^3}{p^3}\Big) + nq\Big(\frac{\delta}{q} + \frac{\delta^2}{2q^2} + \frac{1}{3}\,\theta\,\frac{|\delta|^3}{q^3}\Big) =\\
&= \frac{\delta^2}{2npq} + \frac{\theta\,|\delta|^3(p^2+q^2)n}{3p^2q^2} = \frac{t^2}{2} + \frac{\theta\,|s_n|^3}{3B_n^4},
\end{aligned}
$$

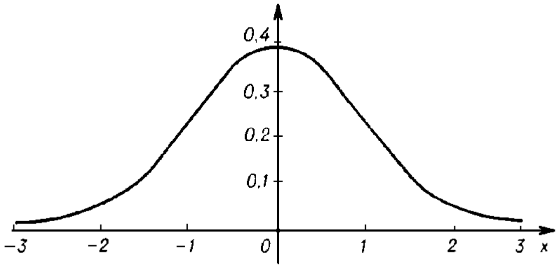
nes
$$p^2 + (1-p^2) = 1 - 2pq < 1.$$
Todėl
$$\ln p_n(k) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi - \ln B_n - \frac{t^2}{2} + \varrho_2;$$
čia
$$|\varrho_2| \le \frac{|s_n| + 1/6}{B_n^2} + \frac{|s_n|^3}{3B_n^4}.$$
Vadinasi, turime asimptotinę formulę
$$B_n\sqrt{2\pi}p_n(k) = e^{-t^2/2}(1 + r_n),$$
kurioje

(2)
$$1 + r_n = \exp\Big\{\theta\Big(\frac{|s_n| + 1/6}{B_n^2} + \frac{|s_n|^3}{3B_n^4}\Big)\Big\}.$$

Jei $t = s_n/B_n$ yra tarp dviejų fiksuotų skaičių, tai (2) įverčio dešinės pusės rodiklis konverguoja į nulį, kai $n \to \infty$. Jis konverguoja į nulį net tada, kai $s_n = o(B_n^{4/3})$, t. y. $t = o(B_n^{1/3})$. Jei $p$ yra fiksuotas skaičius, tai jis konverguoja į nulį, kai $s_n = o(n^{2/3}),\ t = o(n^{1/6})$. □

Muavro–Laplaso lokalioji teorema taikoma apytiksliam tikimybės $p_n(k)$ skaičiavimui. Manoma, kad

(3)
$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(t);$$
čia
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}.$$
Pastaroji funkcija yra tabuliuota. Jos grafikas pavaizduotas 10 paveiksle.




10 pav.

Naudojantis (3) formule, gaunami geri rezultatai, kai $p$ nėra labai artimas 0 ar 1, o $n$ – pakankamai didelis. Neblogi rezultatai gaunami ir kai $n$ nedideli. Pailiustruosime tai pavyzdžiu. 11 paveiksle laiptuota kreive pavaizduotos tikimybės $p_{10}(k)$, kai $p = 0,2$, o tolydi kreivė yra funkcijos

$$\frac{1}{\sqrt{10\cdot 0,2\cdot 0,8}}\,\varphi\Big(\frac{x-10\cdot 0,2}{\sqrt{10\cdot 0,2\cdot 0,8}}\Big)$$

grafikas.

-90.png 11 pav.

(2) formulė leidžia įvertinti paklaidą, kurią padarome, skaičiuodami $p_n(k)$ pagal (3) formulę.

1 p a v y z d y s. Elektroninėje schemoje yra 400 vienodų elementų. Per metus kiekvienas iš jų gali sugesti su tikimybe 0,2. Kokia tikimybė, kad per metus suges 80 elementų?

Taikysime lokaliąją Muavro–Laplaso teoremą, kai $n = 400$, $k = 80$, $p = 0,2$; $q = 0,8$. Gauname $B_n = 8$, $t = 0$. Pagal (3) formulę

$$p_{400}(80) \approx \frac{1}{8}\,\varphi(0) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} = 0,04986...$$

Įvertinsime paklaidą. Kadangi $s_n = 0$, tai $1 + r_n = \exp(\theta/384)$, vadinasi,

$$\frac{1}{8}\,\varphi(0)e^{-1/384} \le p_{400}(80) \le \frac{1}{8}\,\varphi(0)e^{1/384}.$$

Gauname

$$0,04973 < p_{400}(80) < 0,05.$$

Absoliučioji paklaida mažesnė už 0,00014, o santykinė mažesnė už 0,29%.

Neretai tenka skaičiuoti tikimybę, kad Bernulio eksperimentų schemoje įvykis $\omega_1$ įvyks ne mažiau kaip $\alpha$ ir ne daugiau kaip $\beta$ kartų. Tam tikslui reikia apskaičiuoti sumą

$$\sum_{\alpha\le k\le\beta} p_n(k).$$

Jei parametrų $n, \alpha$ ir $\beta$ reikšmės didelės, tai ir lokalioji Muavro–Laplaso teorema mažai naudinga. Rasime kitą apytikslę formulę.

**2 lema.** $|e^x - 1| \le |x|\ e^{|x|}$.

Į r o d y m a s. Išskleidę $e^x$ eilute, gauname

$$|e^x - 1| \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x|^j}{j!} \le |x| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|x|^{j-1}}{(j-1)!} = |x|e^{|x|}. \ \square$$

**3 lema.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}du = \sqrt{2\pi}.$

Į r o d y m a s. Pažymėkime šį integralą raide $I$. Turėsime

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)/2} du dv.$$

Pakeiskime integravimo kintamuosius $u = R\cos\varphi$, $v = R\sin\varphi$. Kadangi jakobianas

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial R} & \dfrac{\partial v}{\partial R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -R\sin\varphi & R\cos\varphi \end{vmatrix} = R,$$

tai

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} Re^{-R^2/2} dR d\varphi = -2\pi \int_0^{\infty} e^{-R^2/2} d(-R^2/2) =$$
$$= -2\pi e^{-R^2/2}\Big|_0^{\infty} = 2\pi. \ \square$$

**2 (Muavro–Laplaso integralinė) teorema.** *Tarkime, kad $X_n$ yra įvykių $\omega_1$ skaičius Bernulio schemoje,atlikus $n$ eksperimentų,*

$$Y_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}},$$

*$a < b$ – bet kokie skaičiai, $p$ – fiksuotas, $0 < p < 1$. Tada*

$$P(a \le Y_n \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du + R_n,$$

*o $R_n \to 0$, kai $n \to \infty$, tolygiai $a$ ir $b$ atžvilgiu.*

Į r o d y m a s. Kaip ir įrodinėdami lokaliąją teoremą, ne tik parodysime, kad $R_n$ konverguoja į nulį, bet ir rasime gana tikslų jo įvertį. Be to, nereikalausime, kad $p$ būtų fiksuotas, o tik kad būtų $0 < p < 1$. Tarkime, kad $\alpha$ ir $\beta$ yra sveikieji skaičiai, $\alpha < \beta$,

$$a = \frac{\alpha - np}{B_n}, \ b = \frac{\beta - np}{B_n}, \ B_n = \sqrt{npq}.$$

Pažymėkime $c = \max(|a|, |b|)$,

$$r = \frac{c(c^2+3)}{3B_n} + \frac{1}{6B_n^2}. \tag{4}$$

Reikia įvertinti sumą

$$P(a \le Y_n \le b) = \sum_{\alpha \le k \le \beta} p_n(k).$$

Padarysime prielaidą, kad $B_n \geq 2,\ r \leq 1/2$. Tada iš (4) ir šios prielaidos išplaukia $c \leq B_n/2$. Todėl

$$|\delta| = \left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \frac{cB_n}{n} \leq \frac{B_n^2}{2n} = \frac{1}{2}pq < \frac{1}{2}\min(p,q).$$

Vadinasi, $p_n(k)$ įverčiams galėsime taikyti (2) formulę. Gausime

$$P(a \leq Y_n \leq b) = B_n^{-1} \sum_{\alpha \leq k \leq \beta} \varphi(t) e^{\theta v};$$

čia

$$t = \frac{k - np}{B_n},\ v = \frac{|s_n| + 1/6}{B_n^2} + \frac{|s_n|^3}{3B_n^4}.$$

Kadangi

$$v \leq \frac{cB_n + 1/6}{B_n^2} + \frac{c^3 B_n^3}{3B_n^4} = r,$$

tai pagal 2 lemą

$$|e^{\theta v} - 1| \leq r e^{1/2} \leq 2r.$$

Vadinasi,

$$P(a \leq Y_n \leq b) = B_n^{-1} \sum_{\alpha \leq k \leq \beta} \varphi(t)(1 + 2\theta r).$$

Pakeisime sumą integralu. Imant bet kurią diferencijuojamą funkciją $\varphi(x)$, iš Teiloro[1] formulės išplaukia

$$\int_x^{x+h} \varphi(u)du = h\varphi(x) + \frac{1}{2}h^2\varphi'(x + \theta h).$$

Funkcijai $\varphi(x) = 2\pi^{-1/2}\exp(-x^2/2)$ turime: $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$. Laikysime $h$ teigiamu. Tada

$$\begin{aligned}
\varphi(x + \theta h) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x + \theta h)^2\Big) \leq \\
&\leq \min_{x \leq u \leq x+h} \varphi(u) \exp\Big(|hx| + \frac{1}{2}h^2x^2\Big) \leq \\
&\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi(u)du \cdot \exp\Big(|hx| + \frac{1}{2}h^2x^2\Big).
\end{aligned}$$

Todėl

[1] Brook Taylor (1685–1731) – anglų matematikas.

$$h\varphi(x) = \int_x^{x+h} \varphi(u)du + \frac{1}{2}h^2(x+\theta h)\varphi(x+\theta h) =$$
$$= \int_x^{x+h} \varphi(u)du\Big\{1 + \frac{\theta}{2}h(x+h)\exp\Big(|hx| + \frac{1}{2}h^2x^2\Big)\Big\}.$$

Kai $h = B_n^{-1}$,

$$|hx| + \frac{1}{2}h^2x^2 \leq \frac{c}{B_n} + \frac{c^2}{2B_n^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{8},$$

nes $c \leq B_n/2$. Kadangi $\exp(5/8) < 2$, tai

$$h\varphi(x) = \int_x^{x+h} \varphi(u)du(1+\theta ch).$$

Vadinasi,

$$P(a \leq Y_n \leq b) = \int_a^b \varphi(u)du(1+2\theta r)\Big(1+\frac{\theta c}{B_n}\Big). \tag{5}$$

Tai ir yra ieškomoji formulė.

Iš jos tiesiog išplaukia teoremos teiginys, kai $a$ ir $b$ yra fiksuoti. Tiesa, buvome padarę prielaidą, kad $\alpha$ ir $\beta$ yra sveikieji skaičiai. Čia jos galima atsisakyti, nes, pakeitus integravimo intervalą dydžiu $B_n^{-1}$, gauname paklaidą, konverguojančią į nulį, kai $n \to \infty$. Įrodysime, kad teorema teisinga ir esant bet kokiems $a, b$.

Iš 3 lemos išplaukia, kad, koks bebūtų $\varepsilon > 0$, galima rasti $a_0 = a_0(\varepsilon)$ su sąlyga

$$\int_{-a_0}^{a_0} \varphi(u)du > 1 - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{6}$$

Pagal (5) galime rasti tokį $n_0 = n_0(\varepsilon)$, kad būtų

$$\Big|P(a \leq Y_n \leq b) - \int_a^b \varphi(u)du\Big| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{7}$$

kai $-a_0 \leq a < b \leq a_0$ ir $n \geq n_0$.

Toliau nagrinėsime atvejį $a < -a_0 < a_0 < b$. Kiti atvejai ($a < -a_0 < b \leq \leq a_0, -a_0 \leq a < a_0 < b$) tiriami analogiškai. Pasinaudoję lygybėmis

$$P(a \leq Y_n \leq b) = P(a \leq Y_n < -a_0) + P(-a_0 \leq Y_n \leq a_0) + P(a_0 < Y_n \leq b),$$
$$\int_a^b \varphi(u)du = \int_a^{-a_0} \varphi(u)du + \int_{-a_0}^{a_0} \varphi(u)du + \int_{a_0}^b \varphi(u)du,$$

iš (6) ir (7) nelygybių gauname

$$\Big|P(a \le Y_n \le b) - \int_a^b \varphi(u)du\Big| \le \Big|P(a \le Y_n < -a_0) - \int_a^{a_0} \varphi(u)du\Big| +$$

$$+ \Big|P(-a_0 \le Y_n \le a_0) - \int_{-a_0}^{a_0} \varphi(u)du\Big| + \Big|P(a_0 < Y_n \le b) - \int_{a_0}^{b} \varphi(u)du\Big| <$$

$$< P(Y_n < -a_0) + \int_{-\infty}^{-a_0} \varphi(u)du + \frac{\varepsilon}{4} + P(Y_n > a_0) + \int_{a_0}^{\infty} \varphi(u)du =$$

$$= P(|Y_n| > a_0) + \int_{|u|>a_0} \varphi(u)du + \frac{\varepsilon}{4} =$$

$$= 1 - \Big[P(|Y_n| \le a_0) - \int_{-a_0}^{a_0} \varphi(u)du\Big] - \int_{-a_0}^{a_0} \varphi(u)du + \int_{|u|>a_0} \varphi(u)du +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4} < 2\int_{|u|>a_0} \varphi(u)du + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \ \square$$

Skaičiavimams naudojama apytikslė formulė

$$P(a \le Y_n \le b) \approx \Phi(b) - \Phi(a); \tag{8}$$

čia

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

Paklaidą galima įvertinti pagal (5) formulę – beje, grubokai. Šis įvertinimas efektyvus, kai $c$ nedideli, o $n$ pakankamai dideli. Skaičiavimams palengvinti yra sudarytos funkcijos $\Phi(x)$ lentelės. Kai $x \to -\infty$, funkcija $\Phi(x)$ labai greitai konverguoja į nulį, o kai $x \to \infty$, $\Phi(x)$ konverguoja į vienetą. Jos grafikas pavaizduotas 12 paveiksle.

2 p a v y z d y s. Elektroninėje schemoje yra 40 000 vienodų detalių. Per metus kiekviena iš jų nepriklausomai nuo kitų gali sugesti su tikimybe 0,2. Kokia tikimybė, kad per metus suges nuo 7995 iki 8005 detalių?

Čia

$$B_n = \sqrt{40\ 000 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 80, \ a = \frac{7995 - 40\ 000 \cdot 0,2}{80} = -0,0625, \ b = 0,0625.$$

Pagal (8) formulę

$$P(a \le Y_n \le b) \approx \Phi(0,0625) - \Phi(-0,0625).$$

Iš lentelių randame, kad $P(a \le Y_n \le b) \approx 0,0498$.

Įvertinsime paklaidą.

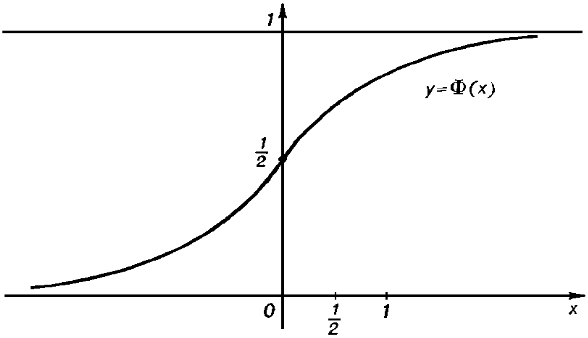
$$2r = 2 \cdot \frac{0,0625(0,0625^{-2} + 3)}{3 \cdot 80} + \frac{1}{6 \cdot 80^2} = 0,00159...$$

$$\frac{c}{B_n} = \frac{0,0625}{80} = 0,00078...$$

Iš (5) formulės gauname, kad

$$0,0498 - 0,00012 < P(a \le Y_n \le b) < 0,0498 + 0,00012.$$

Atkreipsime dėmesį, kad, naudojantis integraline Muavro–Laplaso formule, ne visada gaunami pakankamai tikslūs rezultatai. Yra tikslesnių artutinių formulių (žr., pvz., [2], 105–107 p.).




12 pav.

Iš integralinės Muavro–Laplaso teoremos išplaukia įdomi išvada. Tarkime, kad turime Bernulio eksperimentų schemą. Pažymėkime $X_n$ įvykių $\omega_1$ skaičių, atlikus $n$ eksperimentų. Tada $X_n/n$ yra to įvykio statistinis dažnis. Nagrinėsime įvykį, kai statistinis dažnis nukrypsta nuo tikimybės $p$ dydžiu, ne didesniu už $\varepsilon$:

$$\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \le \varepsilon.$$

Tos nelygybės tikimybė

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le Y_n \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}.$$

Pagal 2 teoremą

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}du = 1,$$

kai $n \to \infty$. Šis teiginys paprastai vadinamas *Bernulio teorema*. Tai yra vadinamojo didžiųjų skaičių dėsnio konkretus atvejis. Muavro–Laplaso teoremos yra taip pat konkretūs daug bendresnių tikimybių teorijos dėsnių atvejai. Apie juos kalbėsime III skyriuje. Ten pateiksime ir kitus čia nagrinėtų teoremų įrodymus.

Remiantis Muavro–Laplaso teoremomis, gaunami gana geri atitinkamų tikimybių įverčiai, kai $npq$ yra didelis. Jei $p$ yra fiksuotas, ši sandauga didėja kartu su $n$. Tačiau, kai vienas iš skaičių $p, q$ yra mažas, $n$ turi būti gana didelis, kad būtų galima taikyti tas teoremas. Ieškosime kitokios apytikslės formulės, geriau atitinkančios tikimybei $p_n(k)$ įvertinti, kai $p$ maži.

**4 lema.** *Jei* $0 \leq x \leq 1/4$, *tai*

$$-\frac{11}{9}x \leq \ln(1-x) \leq -x,$$
$$\ln(1-x) \geq -x - \frac{8}{9}x^2.$$

Į r o d y m a s. Iš Makloreno formulės gauname

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2(1-\theta x)^2}.$$

Atmetę dešinės pusės antrąjį narį, reiškinį tik padidinsime. Įvertinsime iš apačios

$$\ln(1-x) \geq -x\Big(1 + \frac{x}{2(1-x)^2}\Big) \geq -x\Big(1 + \frac{1/4}{2(1-1/4)^2}\Big) = -\frac{11}{9}x.$$

Antrąjį įvertinimą gauname analogiškai:

$$\ln(1-x) + x \geq \frac{x^2}{2(1-x)^2} \geq -\frac{8}{9}x^2. \ \square$$

**3 teorema.** *Pažymėkime* $\mu = np$. *Jei* $p \leq 1/4, \ k-1 \leq n/4$, *tai*

$$p_n(k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu+\eta(k)};$$

*čia*

$$\frac{18k\mu - 11k(k-1) - 12\mu^2}{18n} \leq \eta(k) \leq \frac{2k\mu - k(k-1)}{2n}. \tag{9}$$

Į r o d y m a s. Kai $k \geq 2$, $p_n(k)$ išraišką perrašome šitaip:

$$p_n(k) = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}p^k q^{n-k} = \frac{(pn)^k}{k!}e^{p_n+\eta(k)};$$

čia

$$e^{\eta(k)} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)(1-p)^{n-k}e^{p_n}.$$

Logaritmuojame

$$\eta(k) = \sum_{j=1}^{k-1} \ln\Big(1 - \frac{j}{n}\Big) + (n-k)\ln(1-p) + pn.$$

Remdamiesi 4 lema, įvertinsime šį reiškinį iš viršaus ir iš apačios:

$$\eta(k) \le \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n} - (n-k)p + pn = -\frac{k(k-1)}{2n} + kp,$$

$$\eta(k) \ge -\frac{11}{9}\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n} - (n-k)\Big(p + \frac{8}{9}p^2\Big) + pn = -\frac{11k(k-1)}{18n} + kp - \frac{2}{3}np^2.$$

Nesunku patikrinti, kad formulė yra teisinga ir tada, kai $k = 0, 1$. □

Gavome apytikslę formulę

$$p_n(k) \approx \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} \tag{10}$$

visai kito tipo negu lokalioji Muavro–Laplaso formulė. (9) įvertinimą galima dar patikslinti.

3 p a v y z d y s. Šaudoma į tolimą taikinį. Žinoma, kad tikimybė pataikyti vienu šūviu yra 0,001. Rasime tikimybę 4 kartus pataikyti į taikinį iš 5000 šūvių, manydami, kad šūviai yra nepriklausomi.

Taikysime (10) formulę. Šiuo atveju $n = 5000$, $p = 0,001$, $\mu = 5$, $k = 4$. Gausime

$$p_n(4) \approx \frac{5^4}{4!}e^{-5} = 0,1754...$$

Įvertinsime paklaidą. Turime

$$\eta(4) \le \frac{2\cdot 4\cdot 5 - 4\cdot 3}{10^4} = 0,0028,$$

$$\eta(4) \ge \frac{18\cdot 4\cdot 5 - 11\cdot 4\cdot 3 - 12\cdot 5^2}{9\cdot 10^4} = -0,0008.$$

Gauname

$$\frac{5^4}{4!}e^{-5-0,0008} \le p_n(4) \le \frac{5^4}{4!}e^{-5+0,0028},$$

arba

$$0,17532 < p_n(4) < 0,17597.$$

Paklaida mažesnė už 0,0006.

Tarkime, jog turime ne vieną Bernulio eksperimentų seriją, o tokių serijų seką. Sakykime, kad $n$-ojoje serijoje turime $n$ Bernulio eksperimentų, kiekvieno jų baigtis yra $\omega_1$ arba $\omega_0$ su atitinkamomis tikimybėmis $p_n$ ir $1 - p_n$.

Tada yra teisinga vadinamoji Puasono teorema, kuri aprašo tikimybės $p_n(k)$ asimptotiką, kai $p_n$ gana greitai mažėja, $n$ neaprėžtai didėjant.

**4 (Puasono) teorema.** *Jei* $np_n \to \lambda > 0$, *tai kiekvienam* $k$

$$p_n(k) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Į r o d y m a s. 3 teoremos dydis $\eta(k)$, kaip matyti iš (9) formulės, konverguoja į nulį, kai $p_n \to 0$. □

P a s t a b a. Jei $p_n = \lambda/n$, tai 4 teoremos įrodymas yra visai paprastas. Formulėje

$$p_n(k) = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}p_n^k(1-p_n)^{n-k}$$

vietoje $p_n$ įrašykime $\lambda/n$ ir ją pertvarkykime

$$p_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^n\Big(1-\frac{\lambda}{n}\Big)^{-k}.$$

Kadangi $k$ yra fiksuotas, o $(1-\lambda/n)^n \to e^{-\lambda}$, kai $n \to \infty$, tai gauname

$$p_n(k) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

## 16. APIBENDRINTOJI BERNULIO EKSPERIMENTŲ SCHEMA

Praktikos uždaviniams spręsti naudingas kiek bendresnis už išnagrinėtąjį nepriklausomų eksperimentų modelis. Tarkime, kad vėl atliekama $n$ nepriklausomų eksperimentų ir per kiekvieną iš jų gali įvykti $s$ tų pačių elementriųjų įvykių $\omega_1, ..., \omega_s$ ir su tomis pačiomis tikimybėmis $p_1, ..., p_s$ $(p_1 + ... + p_s = 1)$. Kai $s = 2$, turime Bernulio eksperimentus. Todėl šį modelį galime vadinti apibendrintąja Bernulio schema.

1 p a v y z d y s. Metame lošimo kauliuką $n$ kartų. Manome, kad metimai yra nepriklausomi. Kiekvieną kartą gali atvirsti 1, 2, ..., 6 akutės. Jei kauliukas simetriškas, kiekvieno iš tų įvykių tikimybė yra 1/6. Turime apibendrintąją Bernulio eksperimentų schemą.

Sudarant tos schemos matematinį modelį, teks tik apibendrinti 14 skyrelio samprotavimus.

Pažymėkime $\{\Omega_k, \mathcal{A}_k, P_k\}$ $(1 \le k \le s)$ tikimybinę erdvę, atitinkančią $k$-ąjį eksperimentą. Čia $\Omega_k = \{\omega_1, ..., \omega_s\}$. Algebra $\mathcal{A}_k$ yra aibės $\Omega_k$ visų poaibių sistema. Jei $A = \{\omega_{j_1}, ..., \omega_{j_l}\}$, tai $P_k(A) = p_{j_1} + ... + p_{j_l}$. Pagal 13 skyrelį visų $n$ nepriklausomų eksperimentų matematinis modelis yra tikimybinė erdvė $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$; čia

$$\Omega = \Omega_1^n = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n = \{(\omega_{1r_1}, ..., \omega_{nr_n}),\ \omega_{1r_1} \in \Omega_1, ..., \omega_{nr_n} \in \Omega_n\};$$

$\mathcal{A}$ – visų $\Omega$ poaibių sistema; tikimybinį matą aprašome lygybėmis

$$P(\{\omega_{1r_1}, ..., \omega_{nr_n}\}) = p_1^{k_1} ... p_s^{k_s},$$

kai tarp $\omega_{1r_1}, ..., \omega_{nr_n}$ įvykis $\omega_1$ pasikartoja $k_1$ kartų ir t. t., $\omega_s$ pasikartoja $k_s$ kartų. Šios lygybės vienareikšmiškai apibrėžia $P(A)$ visoms $A \in \mathcal{A}$, be to, įvykių sistemos $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n$ yra nepriklausomos.

Rasime formulę apskaičiuoti tikimybei $p(k_1, k_2, ..., k_s)$, kad, atlikus $n$ eksperimentų, įvykis $\omega_1$ įvyks $k_1$ kartų, įvykis $\omega_2$ – $k_2$ kartų ir t. t., įvykis $\omega_s$ įvyks $k_s$ kartų; $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$. Atkreipsime dėmesį, kad elementariųjų įvykių $\{\omega_{1r_1}, ..., \omega_{sr_s}\}$, kuriuose $\omega_1$ pasikartoja $k_1$ kartų, $\omega_2$ – $k_2$ kartų ir t. t., $\omega_s$ pasikartoja $k_s$ kartų, skaičius (kėliniai su pasikartojimais!) yra

$$\frac{n!}{k_1! k_2! ... k_s!},$$

o kiekvieno jų tikimybė lygi $p_1^{k_1}, p_2^{k_2} ... p_s^{k_s}$. Todėl

$$p(k_1, k_2, ..., k_s) = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_s!} p_1^{k_1}, p_2^{k_2} ... p_s^{k_s}. \tag{1}$$

Išskleidę reiškinį $(p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_s x_s)^n$ pagal multinomo taisyklę, gauname

$$(p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_s x_s)^n = \sum_{k_1 + k_2 + ... + k_s = n} \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_s!} \times$$
$$\times\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_s^{k_s} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_s^{k_s}.$$

Matome, kad $p(k_1, k_2, ..., k_s)$ yra $x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_s^{k_s}$ koeficientas. Ir ši formulė yra konkretus generuojančių funkcijų atvejis.

2 p a v y z d y s. Fabrikas gamina detales. Jos arba atitinka standartus, arba yra per ilgos, arba per trumpos. Tikimybė, kad detalė bus per ilga, lygi 0,01, kad bus per trumpa, – 0,03. Atsitiktinai parenkama 100 detalių. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus 2 per ilgos, 3 per trumpos, o visos kitos standartinės?

Pagal gautąją formulę

$$p(2, 3, 95) = \frac{100!}{2!3!95!} \cdot 0,01^2 \cdot 0,03^3 \cdot 0,96^{95} = 0,0420...$$

Taikant (1) formulę, faktorialus galime skaičiuoti pagal apytikslę Stirlingo formulę. Yra įrodytos apibendrintos lokalioji ir integralinė Muavro–Laplaso teoremos. Mes jas tik suformuluosime.

**1 teorema.** *Tarkime, kad* $0 < p_j < 1$ $(j = 1, ..., s)$,

$$t_j = \frac{k_j - np_j}{\sqrt{np_j(1-p_j)}}.$$

*Tada*

$$(2\pi)^{(s-1)/2}(p_1...p_s)^{1/2}p(k_1, ..., k_s) =$$
$$= exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}(1-p_j)t_j^2\Big\}(1+r_n);$$

*čia* $r_n \to 0$, *kai* $n \to \infty$, *tolygiai* $k_1, k_2, ..., k_s$ *atžvilgiu, jei* $a_j \le t_j \le b_j$ $(j = = 1, ..., s)$ *ir* $a_j, b_j$ *yra fiksuoti skaičiai.*

**2 teorema.** *Tarkime, kad* $X_{nj}$ $(j = 1, ..., s)$ *yra įvykių* $\omega_j$ *skaičius apibendrintoje Bernulio schemoje, atlikus* $n$ *eksperimentų,* $0 < p_j < 1$ *ir* $a_j < b_j$ $(j = 1, ..., s)$ *– fiksuoti skaičiai,* $q_j = 1 - p_j$,

$$Y_{nj} = \frac{X_{nj} - np_j}{\sqrt{np_jq_j}}.$$

*Tada*

$$P(a_1 \le Y_{n_1} \le b_1, ..., a_s \le Y_{n_s} \le b_s) \to \sqrt{\frac{q_1...q_s}{(2\pi)^{s-1}(p_1q_1 + ... + p_sq_s)}}\times$$
$$\times \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_s}^{b_s} exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} q_ju_j^2\Big)du_1...du_s,$$

*kai* $n \to \infty$, *tolygiai* $a_j$ *ir* $b_j$ *atžvilgiu.*