VIII SKYRIUS. DIDIEJI NUOKRYPIAI

1. KUMULIANTAI. KRAMERO SĄLYGA

Iki šiol nagrinėtose teoremose asimptotiką turėjome tik gana nedidelėms, palyginti su n, argumento x reikšmėms. Pamėginsime šia prasme pagerinti teoremas. Suprantama, gali prireikti papildomų sąlygų.

Mums pravers atsitiktinių dydžių kumuliantų (semiinvariantų) sąvoka. Jei atsitiktinis dydis X turi s momentų, tai jo charakteristinę funkciją nulinio taško aplinkoje, kaip žinome, galima parašyti pavidalu

$$f(t) = \sum_{k=0}^{s} \frac{\alpha_k}{k!}(it)^k + o(|t|^s); \tag{1}$$

čia

$$\alpha_k = MX^k = i^{-k} f^{(k)}(t)\Big|_{t=0}. \tag{2}$$

Kai t yra pakankamai mažas, tai galime kalbėti apie charakteristinės funkcijos logaritmą. Jo pagrindinė reikšmė nulinio taško aplinkoje yra lygi

$$\ln f(t) = \sum_{k=0}^{s} \frac{\gamma_k}{k!}(it)^k + o(|t|^s). \tag{3}$$

Koeficientas

$$\gamma_k = i^{-k} \frac{d^k}{dt^k} \ln f(t)\Big|_{t=0} \tag{4}$$

yra vadinamas k-osios eilės *kumuliantu*, arba *semiinvariantu*. Nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos kumuliantai yra lygūs tų dydžių atitinkamų kumuliantų sumai.

Nesunku rasti ryšį tarp momentų ir kumuliantų. Tai galima gauti iš (2) ir (4) formulių arba iš (1) ir (3). Turime

$$
\begin{aligned}
\ln f(t) = \ln\left(1 + \sum_{k=1}^{s} \frac{\alpha_k}{k!}(it)^k + o(|t|^s)\right) = \\
= \sum_{k=1}^{s} \frac{\alpha_k}{k!}(it)^k + o(|t|^s) - \\
- \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\alpha_k}{k!}(it)^k + o(|t|^s)\right)^2 + \\
+ \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{s} \frac{\alpha_k}{k!}(it)^{\text{‘}}k + o(|t|^s)\right)^3 - \ldots
\end{aligned}
$$

Kai egzistuoja reikiamas skaičius momentų (arba kumuliantų), iš (3) gauname

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 = \alpha_1, \\
&\frac{\gamma_2}{2} = \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{2}\alpha_1^2, \\
&\frac{\gamma_3}{6} = \frac{\alpha_3}{6} - \frac{1}{2}\cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_1^3, \\
&\frac{\gamma_4}{24} = \frac{\alpha_4}{24} - \frac{1}{2}\left(2\alpha_1 \cdot \frac{\alpha_3}{6} + \frac{\alpha_2^2}{4}\right) + \frac{1}{3}\cdot 3\alpha_1^2 \cdot \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{4}\alpha_1^4,
\end{aligned}
$$

arba

$$
\begin{aligned}
&\gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2, \\
&\gamma_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3, \\
&\gamma_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2^2 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4
\end{aligned}
$$

ir t.t. Atskiru atveju, kai $\alpha_1 = 0$,

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 = 0, \\
&\gamma_2 = \alpha_2,
\end{aligned}
$$

$$\gamma_3 = \alpha_3,$$
$$\gamma_4 = \alpha_4 - 3\alpha_2^2.$$

Galima būtų parašyti ir bendras formules. Jos sudėtingos. Mums jų neprireiks.

Tarkime dabar, kad atsitiktinis dydis X su pasiskirstymo funkcija F tenkina sąlygą: kuriam nors $a > 0$

$$(C^*) \qquad Me^{a|X|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a|x|} dF(x) < \infty.$$

Tada visiems kompleksiniams z su $\mathrm{Re}z \le a$ integralas

$$\Psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} dF(x)$$

egzistuoja ir yra aprėžtas,

$$|\Psi(z)| \le C.$$

Ši funkcija yra analizinė srityje $|\mathrm{Re}z| < a$. Iš tikrųjų integralas

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{zx} dF(x)$$

(Ψ išvestinė) egzistuoja toje srityje ir yra baigtinis.

Atkreipsime dėmesį, kad X charakteristinė funkcija

$$f(t) = \Psi(it).$$

Kai tenkinama sąlyga (C^*), atsitiktinis dydis X turi visų eilių momentus

$$MX^k = \Psi^{(k)}(0).$$

Iš žinomos Koši formulės galime gauti

$$|MX^k| \le \frac{Ck!}{a^k}.$$

Aišku, jog egzistuoja ir visų eilių kumuliantai.

Kadangi $\Psi(0) = 1$, tai pakankamai mažoje nulinio taško aplinkoje $\Psi(z) \neq 0$. Todėl galime apibrėžti funkciją $K(z) = \ln \Psi(z)$, imdami pagrindinę logaritmo reikšmę. Eilutė

$$K(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} z^k$$

konverguoja pakankamai mažoje nulinio taško aplinkoje.

Toliau visur laikysime $\alpha_1 = MX = 0$. Tada

$$K(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} z^k = \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \frac{1}{6}\gamma_3 z^3 + \dots, \tag{5}$$

$$K'(z) = \sigma^2 z + B|z|^2, \tag{6}$$

$$K''(z) = \sigma^2 + B|z| \tag{7}$$

pakankamai mažoje nulinio taško aplinkoje.

Mums prireiks teoremos apie eilučių apvertimą.

Teorema. *Tarkime, kad*

$$w = g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \dots$$

yra analizinė funkcija skritulyje $|z - z_0| \leq \rho$ *ir* $b_1 \neq 0$. *Tada skritulyje* $|w - b_0| < \delta$ *su pakankamai mažu* δ *egzistuoja vienareikšmė funkcija* $z = h(w)$, *kurios reikšmės priklauso sričiai* $|z - z_0| < \rho$ *ir kuri yra atvirkštinė funkcijai* $w = g(z)$. *Funkcija* $h(w)$ *yra analizinė skritulyje* $|w - b_0| < \delta$.

Teoremos įrodymą galima rasti, pvz, [13].

1 lema. *Kai* τ *yra pakankamai mažas moduliu kompleksinis skaičius, lygtis*

$$K'(z) = \sigma\tau \tag{8}$$

yra išsprendžiama ir turi vienintelį sprendinį

$$z_0 = z_0(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tau^k = \frac{\tau}{\sigma} - \frac{\gamma_3}{2\sigma^4}\tau^2 + \frac{3\gamma_3 - \gamma_4\sigma^2}{6\sigma^7}\tau^3 + \dots$$

Eilutė konverguoja pakankamai mažoje nulinio taško aplinkoje.

Jei τ yra realus skaičius, tai ir z_0 yra realus, be to, τ ir z_0 ženklai sutampa.

Į r o d y m a s išplaukia iš ką tik suformuluotos teoremos apie eilučių apvertimą. Koeficientus apskaičiuojame, įstatydami z_0 išraišką į (5) ir (6). $\square$

2 lema. *Jei z_0 yra (8) lygties sprendinys, tai*

$$K(z_0) - z_0K'(z_0) = -\frac{1}{2}\tau^2 + \tau^3\lambda(\tau);$$

čia

$$\lambda(\tau) = \frac{\gamma_3}{6\sigma^3} + \Big(- \frac{\gamma_3^2}{8\sigma^6} + \frac{\gamma_4}{24\sigma^4}\Big)\tau + \dots$$

yra laipsninė (Kramero) eilutė, kurios koeficientai yra kumuliantų funkcijos; eilutė konverguoja pakankamai mažoje nulinio taško aplinkoje.

Į r o d y m a s . Turime

$$\begin{aligned}
&K(z_0) - z_0K'(z_0) = K(z_0) - \sigma\tau z_0 = \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!}\Big(\frac{\tau}{\sigma} - \frac{\gamma_3}{2\sigma^4}\tau^2 + \dots\Big)^k - \\
&- \sigma\tau\Big(\frac{\tau}{\sigma} - \frac{\gamma_3}{2\sigma^4}\tau^2 + \frac{3\gamma_3 - \gamma_4\sigma^2}{6\sigma^7}\tau^3 + \dots\Big) = \\
&= \frac{\gamma_2}{2}\Big(\frac{\tau^2}{\sigma^2} - \frac{\gamma_3}{\sigma^5}\tau^3 + \frac{\gamma_3}{4\sigma^8}\tau^4 + \frac{3\gamma_3 - \gamma_4\sigma^2}{3\sigma^8}\tau^4 + \dots\Big) + \\
&+ \frac{\gamma_3}{6}\Big(\frac{\tau^3}{\sigma^3} - \frac{3\gamma_3}{2\sigma^6}\tau^4 + \dots\Big) + \frac{\gamma^4\tau_4}{24\sigma^4} - \\
- \tau^2 &+ \frac{\gamma_3}{2\sigma^3}\tau^3 - \frac{3\gamma_3 - \gamma_4\sigma^2}{6\sigma^6}\tau^4 + \dots = \\
= -\frac{\tau^2}{2} &+ \Big(- \frac{\gamma_3}{2\sigma^3} + \frac{\gamma_3}{6\sigma^3} + \frac{\gamma_3}{2\sigma^3}\Big)\tau^3 + \\
+ \Big(\frac{\gamma_3^2}{8\sigma^6} &+ \frac{3\gamma_3 - \gamma_4\sigma^2}{6\sigma^6} - \frac{\gamma_3^2}{4\sigma^6} + \frac{\gamma_4}{24\sigma^4} - \frac{3\gamma_3 - \gamma_4\sigma^2}{6\sigma^6}\Big)\tau^4 + \dots = \\
= -\frac{\tau^2}{2} &+ \frac{\gamma_3}{6\sigma^3}\tau^3 + \Big(- \frac{\gamma_3^2}{8\sigma^6} + \frac{\gamma_4}{24\sigma^4}\Big)\tau^4 + \dots \quad \square
\end{aligned}$$

2. INTEGRALINĖ DIDŽIŲJŲ NUOKRYPIŲ TEOREMA

Nagrinėsime seką nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $X_1,\ X_2, \ldots$. Tarkime, kad tie dydžiai tenkina 1 skyrelio (Kramero) sąlygą (C^*). Be to, laikysime $MX_1 = 0$, $DX_1 = \sigma^2 > 0$. Kaip ir anksčiau, žymėsime

$$Z_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}$$

ir F, Φ_n, Φ, Ψ, K reikšmės tos pačios. Mūsų tikslas — įrodyti teoremas, kuriose funkcijos $\Phi_n(x)$ argumentas x galės būti dėmenų skaičiaus n funkcija.

1 teorema. *Jei $x = o(\sqrt{n}$, tai*

$$\frac{1 - \Phi_n(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\right)\left(1 + B\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right),$$

kai $x \geq 0$,

$$\frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)} = \exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\right)\left(1 + B\frac{|x|+1}{\sqrt{n}}\right),$$

kai $x \leq 0$. Čia λ yra 1.2 lemos eilutė, konverguojanti nulinio taško aplinkoje.

Į r o d y m a s . 1^o. Pėmę pakankamai mažą realųjį skaičių ξ, apibrėžkime $\Psi = \Psi(\xi)$. Pakankamai mažiems ξ jis yra teigiamas. Tada funkcija

$$F^*(x) = \frac{1}{\Psi}\int_{(-\infty,x)} e^{\xi y} dF(y)$$

yra pasiskirstymo funkcija. Imkime seką nepriklausomų atsitiktinių dydžių $X_1^*, X_2^*, \ldots$ su ta pačia pasiskirstymo funkcija F^*. Ši atsitiktinių dydžių transformacija vadinama Ešerio (Escher) vardu. Naujieji dydžiai turi vidurkius

$$\begin{aligned} m^* = MX_1^* = \int_{-\infty}^{\infty} x dF^*(x) = \\ = \frac{1}{\Psi}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{\xi x} dF^*(x) = \frac{\Psi'(\xi)}{\Psi(\xi)} = K'(\xi) \end{aligned}$$

ir dispersijas

$$\sigma^{*2} = DX_1^* = \frac{1}{\Psi}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\xi x} dF(x) - m^{*2} =$$

$$= \frac{\Psi''(\xi)}{\Psi(\xi)} - \big(K'(\xi)\big)^2 = K''(\xi).$$

Pagal (1.7) dispersija yra teigiama.

2^o. Pažymėkime

$$W_n(x) = P(X_1 + \ldots + X_n < x),$$

$$W_n^*(x) = P(X_1^* + \ldots + X_n^* < x).$$

Rasime ryšį tarp šių funkcijų. Parodysime, kad

$$W_n(x) = \Psi^n \int_{(-\infty,x)} e^{-\xi y} dW_n^*(y). \tag{1}$$

Kai $n = 1$, turime

$$\Psi \int_{(-\infty,x)} e^{-\xi y} dW_1^*(y) = \Psi \int_{(-\infty,x)} e^{-\xi y} dF^*(y) =$$

$$= \Psi \int_{(-\infty,x)} e^{-\xi y} d\left(\frac{1}{\Psi}\int_{(-\infty,y)} e^{\xi z} dF(z)\right) =$$

$$= \int_{(-\infty,x)} e^{-\xi y} e^{\xi y} dF(y) = F(x) = W_1(x).$$

Tarkime, (1) teisinga kuriam nors n. Parodysime, kad ji teisinga, kai n padidinamas 1. Kadangi dydžiai $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ yra nepriklausomi, tai

$$W_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-z) dW_n(z) = \Psi^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x-z)}{\Psi} e^{-\xi z} dW_n^*(z)$$

$$= \Psi^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi z}\left(\int_{(-\infty,x-z)} e^{-\xi y} dF^*(y)\right) dW_n^*(z).$$

Vidiniame integrale pakeičiame $u - z = y$. Gauname

$$W_{n+1}(x) = \Psi^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi z} \left(\int_{(-\infty,x)} e^{-\xi(u-z)} d_u F^*(u-z) \right) dW_n^*(z)$$

$$= \Psi^{n+1} \int_{(-\infty,x)} e^{-\xi u} d_u \left(\int_{-\infty}^{\infty} F^*(u-z) dW_n^*(z) \right) =$$

$$= \Psi^{n+1} \int_{(-\infty,x)} e^{-\xi u} dW_{n+1}^*(u).$$

Iš matematinės indukcijos principo išplaukia, kad (1) formulė teisinga visiems n.

3^o. Pažymėkime

$$Z_n^* = \frac{X_1^* + \ldots + X_n^* - nm^*}{\sigma^* \sqrt{n}}$$

ir normuotų atsitiktinių dydžių sumų pasiskirstymo funkcijas (pirmąją iš jų jau anksčiau vartojome)

$$\Phi_n(x) = P(Z_n < x),$$

$$\Phi_n^*(x) = P(Z_n^* < x).$$

Tada

$$\Phi_n(x) = W_n(x\sigma\sqrt{n}),$$

$$\Phi_n^*(x) = W_n^*(x\sigma^*\sqrt{n} + m^*n).$$

Pasinaudoję (1) formule, gauname

$$\Phi_n(x) = \Psi^n \int_{(-\infty, x\sigma\sqrt{n})} e^{-\xi y} dW_n^*(y),$$

o po pakeitimo $y = u\sigma^*\sqrt{n} + m^*n$

$$\Phi_n(x) = \Psi^n e^{-\xi m^* n} \int_{\left(-\infty, (\sigma x - m^*\sqrt{n})/\sigma^*\right)} e^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n}} d\Phi_n^*(u). \tag{2}$$

Kai $x \to \infty$,

$$1 = \Psi^n e^{-\xi m^* n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n}} d\Phi_n^*(u).$$

Atėmę iš šios lygybės (2), gauname

$$(3) \qquad 1 - \Phi_n(x) = \Psi^n e^{-\xi m^* n} \int_{\left(\sigma x - m^* \sqrt{n})/\sigma^*, \infty\right)} e^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n}} d\Phi_n^*(u).$$

4^o. Panagrinėsime (2) ir (3) lygybių dešiniųjų pusių reiškinius. Kol kas iš ξ buvo reikalaujama tik, kad jis būtų pakankamai mažas. Dabar parinksime jį tiksliau. Imkime $\tau = x/\sqrt{n} = o(1)$, kai $n \to \infty$. Laikysime ξ lygties

$$K'(\xi) = \sigma\tau$$

sprendiniu. Tada

$$\sigma x - m^* \sqrt{n} = \big(\sigma\tau - K'(\xi)\big)\sqrt{n} = 0.$$

(2) ir (3) formulės virsta

$$(4) \qquad \Phi_n(x) = \Psi^n e^{-\xi m^* n} \int_{(-\infty, 0)} e^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n}} d\Phi_n^*(u),$$

$$(5) \qquad 1 - \Phi_n(x) = \Psi^n e^{-\xi m^* n} \int_{(0, \infty)} e^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n}} d\Phi_n^*(u).$$

Įvertinsime tų formulių dešiniųjų pusių reiškinius. Pagal 1.2 lemą dauginamasis prieš integralus yra lygus reiškiniui

$$(6) \qquad \Psi e^{-\xi m^*} = \exp\big\{K(\xi) - \xi K'(\xi)\big\} = \exp\Big\{-\frac{\tau^2}{2} + \tau^3 \lambda(\tau)\Big\},$$

pakeltam n-uoju laipsniu.

5^o. Įvertinsime integralus. (4) formulėje laikysime $x < 0$, o (5) – $x > 0$. Nagrinėsime tik antrą atvejį, nes pirmasis tiriamas analogiškai. Pažymėkime

$$I = \int_{(0, \infty)} e^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n}} d\Phi_n^*(u).$$

Kadangi atsitiktiniai dydžiai X_k^* yra vienodai pasiskirstę ir turi trečiuosius momentus (jie turi visų eilių momentus), tai pagal VII.2.2 teoremą

$$\Phi_n^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-v^2/2} + Q_n(u);$$

čia

$$Q_n(u) = \frac{B}{\sqrt{n}}.$$

Todėl

$$\begin{aligned} & I = J_1 + J_2, \\ (7) \qquad & J_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n} - u^2/2} du, \\ & J_2 = \int_{(0,\infty)} e^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n}} dQ_n(u). \end{aligned}$$

Įvertinsime J_2. Integruodami dalimis ir prisiminę, kad $\xi > 0$, gauname

$$(8) \qquad \begin{aligned} J_2 &= e^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n}} Q_n(u) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty Q_n(u) de^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n}} = \\ &= -Q_n(0) + \frac{B}{\sqrt{n}} \int_0^\infty de^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n}} = \frac{B}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

6^o. Integralo J_1 įvertinimas kiek ilgesnis. Jį iš pradžių skaidome į du

$$(9) \qquad J_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{n}/\xi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{n}/\xi}^\infty e^{-\xi u \sigma^* \sqrt{n} - u^2/2} du = J_3 + J_4.$$

Kadangi ξ yra teigiamas, tai

$$(10) \qquad J_4 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{n}/\xi}^\infty e^{-u^2/2} du \le \frac{\xi}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty u e^{-u^2/2} du = \frac{B}{\sqrt{n}}.$$

Iš (1.6) ir (1.7) gauname

$$\xi\sigma^* - \frac{m^*}{\sigma} = \xi\bigl(K''(\xi)\bigr)^{1/2} - \frac{1}{\sigma}K'(\xi) =$$
$$= \xi(\sigma^2 + B\xi)^{1/2} - \frac{1}{\sigma}(\sigma^2\xi + B\xi^2) = B\xi^2.$$

Be to,

$$e^{B\xi^2\sqrt{n}u} = 1 + B\xi^2\sqrt{n}ue^{B\xi^2\sqrt{n}u}.$$

Todėl

$$(11)\qquad J_3 = J_5 + J_6,$$
$$J_5 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{n}/\xi} e^{-m^*u\sqrt{n}/\sigma - u^2/2}du,$$
$$J_6 = B\xi^2\sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}/\xi} ue^{-m^*u\sqrt{n}/\sigma - u^2/2 + B\xi^2u\sqrt{n}}du.$$

7^o. Iš pradžių vertinsime integralą J_6. Kadangi $m^* \backsim \sigma^2\xi$ ir ξ — kiek norima mažas, kai n pakankamai didelis, tai to integralo pointegralinės funkcijos rodiklis

$$\leq -\frac{1}{2}m^*u\sqrt{n}/\sigma - u^2/2 \leq -\frac{1}{2}m^*u\sqrt{n}/\sigma.$$

Vadinasi,

$$J_6 = B\xi^2\sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}/\xi} ue^{-\frac{1}{2}m^*u\sqrt{n}/\sigma}du.$$

Integruosime dalimis. Kad būtų trumpiau, pažymėkime

$$E = \frac{1}{2}m^*\sqrt{n}/\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{n}(\sigma\xi + B\xi^2).$$

Tada

$$\int_0^{\sqrt{n}/\xi} ue^{-Eu}du = -\frac{1}{E}\int_0^{\sqrt{n}/\xi} ude^{-Eu} =$$

$$= -\frac{u}{E}e^{-Eu}\Big|_0^{\sqrt{n}/\xi} + \frac{1}{E}\int_0^{\sqrt{n}/\xi} e^{-Eu}du =$$

$$= -\frac{u}{E}e^{-Eu}\Big|_0^{\sqrt{n}/\xi} - \frac{e^{-Eu}}{E^2}\Big|_0^{\sqrt{n}/\xi} =$$

$$= -\frac{\sqrt{n}}{\xi E}e^{-E\sqrt{n}/\xi} + \frac{1}{E^2}\left(1 - e^{-E\sqrt{n}/\xi}\right) =$$

$$= \frac{B}{\xi^2}e^{-\frac{1}{2}n(\sigma+B\xi)} + \frac{B}{n\xi^2} = \frac{B}{n\xi^2}.$$

Todėl

$$J_6 = \frac{B}{\sqrt{n}}. \tag{12}$$

8^o. Pereiname prie integralo J_5. Iš (1.8)

$$m^*\sqrt{n}/\sigma = K'(\xi)\sqrt{n}/\sigma = \tau\sqrt{n}.$$

Todėl

$$\begin{aligned} J_5 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\tau u\sqrt{n}-u^2/2}du - \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{n}/\xi}^\infty e^{-\tau u\sqrt{n}-u^2/2}du = J_7 - J_8. \end{aligned} \tag{13}$$

Iš pradžių įvertinsime J_8:

$$J_8 = \frac{B\xi}{\sqrt{n}}\int_0^\infty ue^{-u^2/2}du = \frac{B\xi}{\sqrt{n}}. \tag{14}$$

Apskaičiuosime ir integralą J_7. Atlikę elementarius pertvarkymus, gauname

$$
\begin{aligned}
J_7 =& \frac{e^{\tau^2 n/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(u+\tau\sqrt{n})^2/2} du = \\
&= \frac{e^{\tau^2 n/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau\sqrt{n}}^\infty e^{-y^2/2} dy = \\
&= e^{\tau^2 n/2}\big(1 - \Phi(\tau\sqrt{n})\big) + \frac{B}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Surinkę visus įverčius iš (7)–(15), gauname

$$I = e^{\tau^2 n/2}\big(1 - \Phi(\tau\sqrt{n})\big) + \frac{B}{\sqrt{n}}.$$

Narį skliausteliuose įvertinsime iš apačios. Integruosime dalimis:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\tau\sqrt{n}}^\infty e^{-y^2/2} dy = -\int_{\tau\sqrt{n}}^\infty \frac{1}{y} de^{-y^2/2} = \\
&= -\frac{e^{-y^2/2}}{y}\bigg|_{\tau\sqrt{n}}^\infty - \int_{\tau\sqrt{n}}^\infty \frac{1}{y^2} e^{-y^2/2} dy = \\
&= \frac{e^{-\tau^2 n/2}}{\tau\sqrt{n}} + \int_{\tau\sqrt{n}}^\infty \frac{1}{y^3} de^{-y^2/2} = \\
&= \frac{e^{-\tau^2 n/2}}{\tau\sqrt{n}} + \frac{e^{-y^2 n/2}}{y^3}\bigg|_{\tau\sqrt{n}}^\infty + 3\int_{\tau\sqrt{n}} \frac{1}{y^4} e^{-y^2/2} dy \geq \\
&\geq \frac{e^{-\tau^2 n/2}}{\tau\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{(\tau\sqrt{n})^2}\right).
\end{aligned}
$$

Kai $\tau\sqrt{n} \geq 2$, tai

$$I = e^{\tau^2 n/2}\big(1 - \Phi(\tau\sqrt{n})\big)(1 + B\tau).$$

Iš (5) ir (6) formulių gauname

$$1 - \Phi_n(x) = e^{n\tau^3\lambda(\tau)}\big(1 - \Phi(x)\big)(1 + B\tau).$$

Kai $\tau\sqrt{n} = x \le 2$,

$$\exp\Big(- x^3/\sqrt{n}\lambda\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big) = \exp\big(\frac{B}{\sqrt{n}}\big) = 1 + \frac{B}{\sqrt{n}},$$

o iš VII.2.2 teoremos

$$1 - \Phi_n(x) = 1 - \Phi(x) + \frac{B}{\sqrt{n}} = \big(1 - \Phi(x)\big)\big(1 + \frac{B}{\sqrt{n}}\big) =$$
$$= \exp\Big(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\big(1 - \Phi(x)\big)\Big(1 + \frac{B}{\sqrt{n}}\Big).$$

Vadinasi, visiems $x \ge 0, x = o(\sqrt{n})$

$$1 - \Phi_n(x) = \exp\Big(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\big(1 - \Phi(x)\big)\Big(1 + B\frac{x+1}{\sqrt{n}}\Big).$$

Kaip jau sakėme, neigiamiems x viskas daroma analogiškai. □

Kaip matome iš 1 teoremos, kai x yra didelis, normalusis dėsnis blogai aproksimuoja normuotos sumos pasiskirstymo funkciją — reikia papildomo daugiklio. Kada jis nereikalingas?

Tarkime, $x = o(n^{1/6})$. Tada

$$\lambda\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big) = \frac{\gamma_3}{6\sigma^3} + o(1), \ \ \frac{x^3}{\sqrt{n}} = o(1).$$

Iš 1 teoremos matome, kad

$$\frac{1 - \Phi_n(x)}{1 - \Phi(x)} = 1 + o(1), \ \ \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)} = 1 + o(1).$$

3. GARDELIŠKŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ DIDELIŲ NUOKRYPIŲ LOKALIOJI TEOREMA

Nagrinėsime atsitiktinius dydžius, tenkinančius tas pačias sąlygas, kaip ir 2 skyrelyje. Tik dabar juos laikysime gardeliškais: su tikimybe

1 įgyjančius reikšmes iš kokios nors progresijos $b+kh$, $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Čia h yra didžiausias pasiskirstymo žingsnis. Žymėsime

$$P(X_1 = b+kh) = p_k.$$

Suma $S_n = X_1+\ldots+X_n$ įgyja reikšmes (su tikimybe 1) iš progresijos $bn+kh, k\in\mathbb{Z}$. VI.1 skyrelio lokalioji teorema teigia, kad

$$\frac{\sigma\sqrt{n}}{h}P(S_n = bn+kh) - \frac{e^{-x_{nk}^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \to 0,$$

kai $n\to\infty$. Čia

$$x_{nk} = \frac{bn+kh}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Mūsų atveju, kai tenkinama Kramero sąlyga, galėsime įrodyti tikslesnį teiginį.

Teorema. *Kai* $x = o(\sqrt{x_{nk}}n)$,

$$P(S_n = bn+kh) =$$
$$= \frac{h}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\exp\left\{-\frac{x_{nk}^2}{2}+\frac{x_{nk}^3}{\sqrt{n}}\lambda\Big(\frac{x_{nk}}{\sqrt{n}}\Big)\right\}\cdot\left(1+B\frac{|x_{nk}|}{\sqrt{n}}+B\frac{\ln^{12} n}{n}\right);$$

čia λ *yra Kramero eilutė.*

Į r o d y m a s . 1^o. Kiekvienam kompleksiniam skaičiui $z, |\mathrm{Re}z|\le a$, apibrėžkime

$$\Psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx}dF(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{z(b+kh)}.$$

Funkcija $\Psi(z)e^{-bz}$ turi periodą $2\pi i/h$. Iš dydžių X_k nepriklausomumo gauname

$$\Psi^n(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_n(k)e^{z(bn+kh)};$$

čia
$$P_n(k) = P(S_n = bn + kh).$$

Tarkime, kad $c \in [-a/2, a/2]$. Padauginę pastarosios lygybės abi puses iš
$$\frac{h}{2\pi i} e^{-z(bn+kh)}$$
ir integruodami tiesės atkarpa kompleksinėje plokštumoje nuo $c - \pi i/h$ iki $c + \pi i/h$, gausime

$$
\begin{aligned}
P_n(k) &= \frac{h}{2\pi i} \int_{c-\pi i/h}^{c+\pi i/h} \Psi^n(z) e^{-z(kh+bn)} dz = \\
&= \frac{h}{2\pi i} \int_{c-\pi i/h}^{c+\pi i/h} \Psi^n(z) e^{-z\sigma x\sqrt{n}} dz;
\end{aligned} \tag{1}
$$

čia $x = x_{nk}$.

2^o. Parodysime, kad

$$|\Psi(c + it)| < \Psi(c), \tag{2}$$

kai $0 < |t| \le \pi/h$. Pirmiausia, aišku, kad
$$|\Psi(c + it)| \le \Psi(c).$$

Jei kuriam nors t_0, $0 < |t_0| \le \pi/h$, būtų teisingas lygybės ženklas, tai turėtume
$$e^{i\beta t_0} \sum_k p_k e^{d_k(c+it_0)} = \sum_k p_k e^{d_k c};$$
čia $d_k = b + kh$, β — realusis skaičius. Gautume
$$\sum_k p_k e^{d_k c} \Big(1 - e^{i(d_k+\beta)t_0}\Big) = 0$$
ir
$$\sum_k p_k e^{d_k c} \Big(1 - \cos(d_k + \beta) t_0\Big) = 0.$$

Kadangi reiškinys skliausteliuose yra neneigiamas, tai visiems k su sąlyga $p_k \neq 0$ gautume

$$\cos(d_k + \beta)t_0 = 1,$$

t.y.

$$(hk + b + \beta)t_0 = 2\pi l_k,\ l_k \in \mathbb{Z}.$$

Kadangi h yra didžiausias pasiskirstymo žingsnis, tai egzistuoja du sveikieji k_1 ir k_2, $k_1 - k_2 = 1$, su sąlyga

$$(hk_1 + b + \beta)t_0 = 2\pi l_{k_1},\ l_{k_1} \in \mathbb{Z},$$
$$(hk_2 + b + \beta)t_0 = 2\pi l_{k_2},\ l_{k_2} \in \mathbb{Z};$$

iš čia

$$ht_0 = 2\pi(l_{k_1} - l_{k_2}).$$

Taigi $|ht_0| \geq 2\pi$, o tai prieštarauja sąlygai $|t_0| \leq \pi/h$.

3^0. Pažymėję $\tau = x/\sqrt{n}$, laikysime ξ lygties $K'(z) - \sigma\tau = 0$ sprendiniu. Paėmę pakankamai mažą $\varepsilon > 0$, iš (1) turime

$$P_n(k) = \frac{h}{2\pi i}\int_{\xi-\pi i/h}^{\xi+\pi i/h} \Psi^n(z)e^{-z\sigma x\sqrt{n}}dz =$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\int_{\xi-\varepsilon i}^{\xi+\varepsilon i} \Psi^n(z)e^{-z\sigma x\sqrt{n}}dz+ \tag{3}$$

$$+\frac{h}{2\pi}\int_{\varepsilon<|t|\leq\pi/h} \Psi^n(\xi+it)e^{-z(\xi+it)\sigma x\sqrt{n}}dt = I_1 + I_2.$$

Iš pradžių įvertinsime I_2. Iš (2) ir Ψ tolydumo gauname

$$|\Psi(\xi+it)| < \Psi(\xi)e^{-\eta(\varepsilon)},$$

kai $\varepsilon < |t| \leq \pi/h$; čia $\eta(\varepsilon) > 0$ nepriklauso nuo ξ. Todėl

$$|I_2| \leq \frac{h}{2\pi}|\Psi^n(\xi)|e^{-n\eta(\varepsilon)}\int_{\varepsilon<|t|\leq\pi/h} e^{-\xi\sigma x\sqrt{n}}dt = \tag{4}$$

$$= B|\Psi^n(\xi)|e^{-n\eta(\varepsilon)-\xi\sigma\tau n}.$$

4^o. Lieka įvertinti integralą

$$I_1 = \frac{h}{2\pi i}\int_{\xi-\varepsilon i}^{\xi+\varepsilon i} e^{n(K(z)-\sigma\tau z)}dz.$$

Kadangi $K'(z) = \sigma\tau$, tai integravimo srityje

$$K(z) - \sigma\tau z = K(\xi) - \sigma\tau\xi + R(t),$$
$$R(t) = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{K^{(j)}(\xi)}{j!}(it)^j.$$

Pastaroji eilutė konverguoja, kai ε yra pakankamai mažas, $|t| \le \varepsilon$. Turime

(5)
$$I_1 = \frac{h}{2\pi}e^{n(K(\xi)-\sigma\tau\xi)}(I_3 + I_4),$$
$$I_3 = \int_{|t|\le \ln^2 n/\sqrt{n}} e^{nR(t)}dt,$$
$$I_4 = \int_{\ln^2 n/\sqrt{n}<|t|\le\varepsilon} e^{nR(t)}dt.$$

Iš pradžių įvertinsime antrąjį integralą. Pagal (1.7) turime

$$R(t) = -\frac{1}{2}K''(\xi)t^2 + B|t|^3 = -\frac{\sigma^2}{2}t^2 + B|\xi|t^2 + B|t|^3,$$
$$\mathrm{Re}R(t) < -\frac{\sigma^2}{4}t^2,$$

kai n yra pakankamai didelis, o ε – pakankamai mažas. Todėl

(6)
$$|I_4| < \int_{\ln^2 n/\sqrt{n}<|t|\le\varepsilon} e^{-n\sigma^2t^2/4}dt <$$
$$< \frac{2\sqrt{n}}{\ln^2 n}\int_{\ln^2 n/\sqrt{n}}^{\infty} te^{-n\sigma^2t^2/4}dt =$$
$$= -\frac{2\sqrt{n}}{\ln^2 n}\frac{2}{n\sigma^2}\int_{\ln^2 /\sqrt{n}}^{\infty} de^{-n\sigma^2t^2/4} =$$
$$= \frac{4}{\sqrt{n}\sigma^2\ln^2 n}e^{-\sigma^2\ln^4 n/4} = Be^{-c_1\ln^4 n};$$

c_1 yra teigiama konstanta.

5^o. Tirsime I_3. Kai $|t| \le \ln^2 n/\sqrt{n}$,

$$R(t) = -\frac{1}{2}K''(\xi)t^2 + \frac{1}{6}K'''(\xi)(it)^3 + Bt^4,$$

$$e^{nR(t)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}nK''(\xi)t^2}\Big(1 + \frac{n}{6}K'''(\xi)(it)^3 + Bn^2(K''(\xi))^2t^6(1+Bnt^4)\Big) =$$

$$= e^{-\frac{n}{2}K''(\xi)t^2}\Big(1 + \frac{n}{6}K'''(\xi)(it)^3 + B\frac{\ln^{12} n}{n}\Big).$$

Todėl

$$I_3 = \int_{|t|\le \ln^2 n/\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2}K''(\xi)t^2}\Big(1 + \frac{n}{6}K'''(\xi)(it)^3 + \frac{B\ln^{12} n}{n}\Big)dt =$$

$$= \int_{|t|\le \ln^2 n/\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2}K''(\xi)t^2}\Big(1 + \frac{B\ln^{12} n}{n}\Big)dt,$$

nes nelyginės funkcijos integralas yra lygus 0. Toliau

(7) $$I_3 = \Big(1 + \frac{B\ln^{12} n}{n}\Big)(I_5 - I_6),$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n}{2}K''(\xi)t^2}dt,$$

$$I_6 = \int_{|t|>\ln^2 n/\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{2}K''(\xi)t^2}dt.$$

Kadangi $K''(\xi) = \sigma^2 + B|\tau| > \sigma^2/2$, tai

$$I_6 \le \int_{|t|>\ln^2 n/\sqrt{n}} e^{-\frac{n}{4}\sigma^2t^2}dt.$$

Šį integralą vertiname taip pat kaip ir I_4. Gauname

(8) $$I_6 = Be^{-c_1\ln^4 n}.$$

Integralą I_5 suintegruojame

$$I_5 = \sqrt{\frac{2\pi}{nK''(\xi)}}.$$

Tačiau $K''(\xi) = \sigma^2 + B|\xi|$. Todėl

$$I_5 = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}(1 + B|\tau|). \tag{9}$$

Iš (3)–(9) išplaukia

$$\begin{aligned}P_n(k) &= \frac{h}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{n(K(\xi)-\sigma\tau\xi)}\Big(1 + B|\tau| + \frac{B\ln^{12 n}}{n}\Big) + \\ &+ B|\Psi^n(\xi)|e^{-n\eta(\varepsilon)-\xi\sigma\tau n} = \\ &= \frac{h}{\sigma\sqrt{2\pi n}} e^{n(K(\xi)-\sigma\tau\xi)}\Big(1 + B|\tau| + \frac{B\ln^{12} n}{n}\Big).\end{aligned}$$

Pakanka pritaikyti 1.2 lemą. □

4. TANKIŲ LOKALIOJI RIBINĖ DIDELIŲ NUOKRYPIŲ TEOREMA

Tarkime, dydžiai X_k tenkina 2 skyrelio sąlygas ir turi tolydų aprėžtą tankį $p(x)$.

Teorema. *Kai* $x = o(\sqrt{n})$, *tai*

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\bigg(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\bigg)\bigg(1 + \frac{B|x|}{\sqrt{n}} + \frac{B\ln^{12} n}{n^{3/2}}\bigg);$$

čia $\lambda(z)$ *yra Kramero eilutė, konverguojanti pakankamai mažoje nulinio taško aplinkoje.*

Į r o d y m a s . 1^o. Parodysime, kad $f \in L_2(-\infty, \infty)$, t. y.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Tarkime, kad Y yra vienodai pasiskirstęs ir nepriklauso nuo X_1. Kaip žinome, $X_1 - Y$ charakteristinė funkcija yra $|f|^2$. Dydis $X_1 - Y$ taip pat turi aprėžtą tankį $\hat{p}(x)$, nes

$$\hat{p}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y)dF_{-Y}(y).$$

Iš Lebego integralo teorijos turime, kad $\hat{p}$ yra integruojama funkcija. Be to,

$$|f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\hat{p}(x)dx.$$

Iš VI.2.3 lemos išplaukia, kad $f \in L_2(-\infty,\infty)$. Iš čia taip pat išplaukia, kad visi laipsniai $|f|^n$ yra integruojami. Pagal VI.2.4 lemą

$$\begin{aligned}p_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f^n\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big)dt = \\ &= \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^n(it)e^{-\sigma x t i\sqrt{n}}dt.\end{aligned} \tag{1}$$

2^o. Kadangi p yra aprėžta ir tolydi, tai $\Psi(it) \to 0$, kai $t \to \pm\infty$. Be to, $|\Psi(it)| < 1$, kai $t \neq 0$. Todėl

$$|\Psi(it)| < e^{-\eta(\varepsilon)},$$

kai $|t| \geq \varepsilon$; čia $\eta(\varepsilon) > 0$.

(1) formulėje integralą suskaidysime į du

$$\begin{aligned}p_n(x) &= \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}\left(\int_{|t|\leq\varepsilon} + \int_{|t|>\varepsilon} \Psi^n(it)e^{-\sigma x t i\sqrt{n}}dt\right) = \\ &= \frac{\sigma\sqrt{n}}{2\pi}\big(I_1 + I_2\big).\end{aligned} \tag{2}$$

Iš (1), kai $n > 2$, turime

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \int_{|t|>\varepsilon} |\Psi(it|)^n dt \leq e^{-\eta(\varepsilon)(n-2)}\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(it)|^2 dt = \\ &= Be^{-n\eta(\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{3}$$

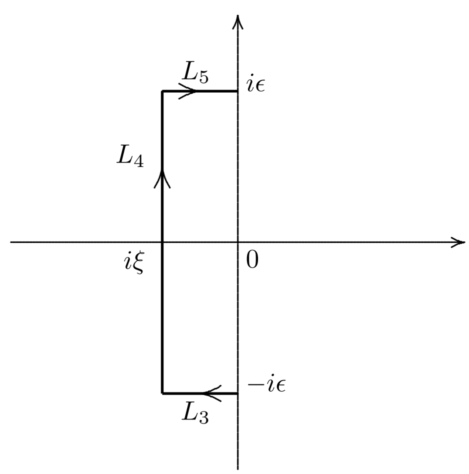
3^o. Tarkime, kad n yra pakankamai didelis. Pažymėkime $\tau = x/\sqrt{n}$, o ξ – lygties $K(z) - \sigma\tau = 0$ sprendinį. Pasinaudoję Koši teorema, integralą

$$I_1 = \frac{1}{i}\int_{-i\varepsilon}^{i\varepsilon} \Psi^n(z) e^{-\sigma\tau n z} dz,$$

pakeisime trimis (ε – pakankamai mažas)

$$iI_1 = \int_{L_3} + \int_{L_4} + \int_{L_5} = I_3 + I_4 + I_5; \tag{4}$$

čia: L_4 yra (žr. 2 brėž.) tiesės atkarpa nuo $\xi - i\varepsilon$ iki $\xi + i\varepsilon$, L_3 –



2 brėž.

nuo $-i\varepsilon$ iki $\xi - i\varepsilon$, o L_5 – tiesės atkarpa nuo $\xi + i\varepsilon$ iki $i\varepsilon$.

Iš pradžių įvertinsime I_3 ir I_5. Kadangi

$$K(it) = -\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + B|t|^3,$$

tai

$$|\Psi(it)| \le e^{-\sigma^2\varepsilon^2/4},$$

kai $|t| \le \varepsilon$ ir ε — pakankamai mažas. Iš Ψ tolydumo išplaukia

$$|\Psi(z)| \le e^{-\sigma^2\varepsilon^2/8}$$

ant kontūrų L_3 ir L_4. Ant tų kontūrų (kadangi ξ ir τ ženklai sutampa)

$$|e^{-\sigma\tau n z}| \le 1.$$

Todėl

$$I_3 + I_5 = Be^{-n\sigma^2\varepsilon^2/8}. \tag{5}$$

4^0. Lieka įvertinti integralą

$$I_4 = \int_{\xi - i\varepsilon}^{\xi + i\varepsilon} e^{n(K(z) - \sigma\tau z)} dz.$$

Įvertinimas nieko nesiskiria nuo integralo I_1 įvertinimo 3 skyrelio teoremoje. Gauname

$$I_4 = ie^{n(K(\xi) - \sigma\tau\xi)} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma\sqrt{n}} \Big(1 + B|\tau| + \frac{B \ln^{14} n}{n^{3/2}}\Big).$$

Surinkę visus įverčius iš (1)—(5), turime

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{n(K(\xi) - \sigma\tau\xi)} \Big(1 + B|\tau| + \frac{B \ln^{14} n}{n^{3/2}}\Big) + Be^{-n\eta(\varepsilon)\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{n(-\frac{1}{2}\tau^2 + \tau^3\lambda(\tau))} \Big(1 + B|\tau| + \frac{B \ln^{12} n}{n^{3/2}}\Big),$$

kai n yra pakankamai didelis. $\square$