III SKYRIUS. NYKSTAMIEJI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

1. NYKSTAMŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SĄVOKA

Tirsime atsitiktinių dydžių serijų seką

$$X_{n1}, X_{n2}, \ldots . X_{nk_n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Kiekvienoje serijoje atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi. Imkime seką konstantų A_n ir sudarykime sumas

$$S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n} - A_n.$$

Kyla du uždaviniai.

1. Rasti visus galimus sumų S_n ribinius pasiskirstymo dėsnius.

2. Rasti sąlygas, kad sumų pasiskirstymo dėsniai konverguotų į kurį nors konkretų dėsnį.

Pirmasis uždavinys bendruoju atveju yra trivialus. Kiekviena pasiskirstymo funkcija gali būti ribinė. Iš tikrųjų. Tarkime, kad F yra bet kuri pasiskirstymo funkcija. Imkime atsitiktinius dydžius: X_{n1}, pasiskirsčiusį pagal dėsnį F, o kitus X_{nk}, lygius 0 su tikimybe 1, ir $A_n = 0$. Tada suma S_n yra pasiskirsčiusi pagal dėsnį F. Vadinasi, sumų S_n skirstiniai turi ribinį dėsnį F.

Todėl ateityje įvesime kai kuriuos natūralius apribojimus. Nagrinėsime tam tikras atsitiktinių dydžių sekas, atitinkančias praktikoje pasitaikančius uždavinius. Paprastai įvedamos papildomos sąlygos, kad atskiro dėmens vaidmuo sumoje būtų nežymus. Nusakysime tai tiksliau.

Sakysime, kad dydžiai X_{nk} $(k = 1, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots)$ yra *tolygiai nykstami* (arba tiesiog *nykstami*), jei kiekvienam fiksuotam ε

$$\max_{1 \le k \le k_n} P(|X_{nk}| \ge \varepsilon) \to 0,$$

kai $n \to \infty$.

Atsitiktinio dydžio X_{nk} pasiskirstymo funkciją, charakteristinę funkciją ir medianą žymėsime atitinkamai $F_{nk},\ f_{nk},\ \mu_{nk}$.

1 lema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_{nk} yra nykstami, tai*

$$\max_{1 \le k \le k_n} |\mu_{nk}| \to 0,$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s . Priminsime, kad atsitiktinio dydžio X_{nk} mediana (žr. I.1 skyrelį) yra skaičius μ su sąlygomis

$$P(X_{nk} \ge \mu) \ge \frac{1}{2},\ P(X_{nk} \le \mu) \ge \frac{1}{2}.$$

Pagal nykstamumo apibrėžimą kiekvienam $\varepsilon > 0$ galima rasti tokį n_ε, kad

$$\max_k P(|X_{nk}| \ge \varepsilon) < \frac{1}{2},$$

t.y.

$$\min_k P(|X_{nk}| < \varepsilon) \ge \frac{1}{2},$$

kai $n \ge n_\varepsilon$. Todėl

$$\max_k |\mu_{nk}| < \varepsilon,$$

kai $n \ge n_\varepsilon$. $\square$

2 lema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_{nk} yra nykstami, tai bet kuriems teigiamiems h ir τ*

$$\max_k \int_{|x| < \tau} |x|^h dF_{nk}(x) \to 0,$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s . Kai $\tau > 0,\ 0 < \varepsilon < \tau$, rašome

$$\int_{|x|<\tau} |x|^h dF_{nk}(x) = \int_{|x|<\varepsilon} + \int_{\varepsilon \le |x| < \tau} \le \varepsilon^h + \tau^h \int_{|x|\ge\varepsilon} dF_{nk}(x).$$

Iš čia

$$\max_k \int_{|x|<\tau} |x|^h dF_{nk}(x) \le \varepsilon^h + \tau^h \max_k \int_{|x|\ge\varepsilon} dF_{nk}(x).$$

Parinkę ε pakankamai mažą, o n pakankamai didelį, iš nykstamumo apibrėžimo gauname, kad dešinėje esantį dydį galime padaryti kiek norime mažą. □

3 lema. *Teiginiai:*

1^o *dydžiai* X_{nk} *yra nykstami,*

2^o $\max_k |f_{nk}(t) - 1| \to 0,$ *kai* $n \to \infty$,

tolygiai t *atžvilgiu kiekviename baigtiniame intervale,*

3^o

$$\max_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x) \to 0, \ \textit{kai}\ n \to \infty,$$

yra ekvivalentūs.

Į r o d y m a s . Įrodinėsime lemą pagal schemą $1^o \Rightarrow 2^o \Rightarrow 3^o \Rightarrow 1^o$.

1. Kai $|t| \le T < \infty$,

$$\max_k |f_{nk}(t) - 1| \le \max_k \Big| \int_{|x|<\varepsilon} \big(e^{itx} - 1\big) dF_{nk}(x)\Big| +$$

$$+ \max_k \Big| \int_{|x|\ge\varepsilon} \big(e^{itx} - 1\big) dF_{nk}(x)\Big| \le$$

$$\le T\varepsilon + 2 \max_k \int_{|x|\ge\varepsilon} dF_{nk}(x).$$

Jei teisingas 1^o teiginys, tai dešinėje esantis reiškinys tampa kiek norima mažas, parinkus n pakankamai didelį, o ε pakankamai mažą.

2. Pasinaudoję lygybėmis

$$\int_0^\infty e^{-t}\big(1-f_{nk}(t)\big)dt=\int_0^\infty e^{-t}\bigg(\int_{-\infty}^\infty \big(1-e^{itx}\big)dF_{nk}(x)\bigg)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^\infty\bigg(\int_0^\infty e^{-t}\big(1-e^{itx}\big)dt\bigg)dF_{nk}(x),$$

ir

$$\int_0^\infty e^{-t}\big(1-e^{itx}\big)dt=-\int_0^\infty \big(1-e^{itx}\big)de^{-t}=$$

$$=-\Big(1-e^{itx}\Big)e^{-t}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-t}d\big(1-e^{itx}\big)=$$

$$=-ix\int_0^\infty e^{t(ix-1)}dt=-\frac{ix}{ix-1}e^{t(ix-1)}\Big|_0^\infty=$$

$$=\frac{ix}{ix-1}=\frac{x^2-ix}{x^2+1},$$

gauname

$$\int_0^\infty e^{-t}\big(1-f_{nk}(t)\big)dt=\int_{-\infty}^\infty\frac{x^2-ix}{x^2+1}dF_{nk}(x).$$

Imdami realiąsias dalis, gauname

$$\int_0^\infty e^{-t}\big(1-\mathrm{Re}f_{nk}(t)\big)dt=\int_{-\infty}^\infty\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}(x).$$

Iš čia

$$\max_k\int_{-\infty}^\infty\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}(x)\le\max_k\int_0^\infty e^{-t}|f_{nk}(t)-1|dt\le$$

$$\le\int_0^T\max_k|f_{nk}(t)-1|dt+2\int_T^\infty e^{-t}dt.$$

Jei teisingas 2^o teiginys, tai dešinioji pusė gali būti kiek norima maža, kai n ir T pakankamai dideli.

3. Funkcija
$$\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^{-2}}$$
didėja, kai x^2 didėja. Todėl
$$\max_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF_{nk}(x) \leq \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \max_k \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x).$$
Kai $n\to\infty$, tai dešinioji pusė konverguoja nulin; vadinasi, ir kairioji pusė konverguoja nulin. $\square$

2. CENTRAVIMAS IR SIMETRINIMAS

Toliau τ visur reikš bet kurį fiksuotą teigiamą skaičių. Kiekvienai pasiskirstymo funkcijai $F(x)$ priskirsime skaičių
$$a := \int_{|x|<\tau} x dF(x).$$

Mums ne kartą pravers lygybė
$$\int_{|y|<\tau} (y-a) dF(y) = a - \int_{|y|<\tau} a dF(y) =$$
$$= a\left(1-\int_{|y|<\tau} dF(y)\right) = a\int_{|y|\geq\tau} dF(y). \tag{1}$$

Žymėsime $X^\star := X - a$ ir to dydžio pasiskirstymo bei charakteristinę funkcijas
$$F^\star(x) := F(x+a), \quad f^\star(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF^\star(x) = e^{-iat} f(t).$$
Analogiškai funkcijai F_{nk} priskirsime skaičių a_{nk}, atsitiktinį dydį $X^\star_{nk} := X_{nk} - a_{nk}$ bei funkcijas $F^\star_{nk}$, $f^\star_{nk}$.

Teisinga nelygybė $|a| < \tau$ ir analogiškos nelygybės dydžiams su indeksais.

1 lema. *Bet kuriai pasiskirstymo funkcijai F ir bet kuriam teigiamam T galima rasti teigiamą skaičių $c_1 = c_1(a, T, \tau)$ su sąlyga*

$$c_1 \max_{|t| \le T} |f^\star(t) - 1| \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} dF^\star(x).$$

Į r o d y m a s . Teisinga lygybė

$$f^\star(t) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \big(e^{itx} - 1\big) dF^\star(x).$$

Suskaidę integravimo sritį į dvi: $|x + a| \ge \tau$ ir $|x + a| < \tau$, pritaikę pirmoje srityje trivialų įvertį

$$|e^{itx} - 1| \le 2,$$

o antrojoje įvertį

$$e^{itx} - 1 = itx + \frac{\theta}{2} t^2 x^2, \quad |\theta| \le 1,$$

gauname

$$|f^\star(t) - 1| \le 2 \int_{|x+a| \ge \tau} dF^\star(x) +$$

$$+ |t| \left| \int_{|x+a| < \tau} x dF^\star(x) \right| + \frac{t^2}{2} \int_{|x+a| < \tau} x^2 dF^\star(x).$$

Pasinaudoję (1) lygybe, turime

$$\int_{|x+a| < \tau} x dF^\star(x) = \int_{|y| < \tau} (y - a) dF(y) =$$

$$= a \int_{|y| \ge \tau} dF(y) = a \int_{|x+a| \ge \tau} dF^\star(x).$$

Todėl

$$|f^\star(t) - 1| \le (2 + |at|) \int_{|x+a|\ge\tau} dF^\star(x) + \frac{t^2}{2} \int_{|x+a|<\tau} x^2 dF^\star(x).$$

Įvertinsime tuos integralus. Kadangi funkcija $x^2(1+x^2)^{-1} = (1+x^{-2})^{-1}$, kaip jau esame pastebėję, yra nemažėjanti, kai x^2 didėja, tai pirmasis integralas

$$\int_{|x+a|\ge\tau} dF^\star(x) \le \frac{1+(\tau-|a|)^2}{(\tau-|a|)^2} \int_{|x+a|\ge\tau} \frac{x^2}{1+x^2} dF^\star(x) \le$$

$$\le \frac{1+(\tau-|a|)^2}{(\tau-|a|)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF^\star(x),$$

o antrasis

$$\int_{|x+a|<\tau} x^2 dF^\star(x) \le (1+(\tau+|a|)^2 \int_{|x+a|<\tau} \frac{x^2}{1+x^2} dF^\star(x) \le$$

$$\le \big(1+(\tau+|a|)^2\big) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF^\star(x).$$

Iš šių nelygybių išplaukia

$$\max_{|t|\le T} |f^\star(t) - 1| \le$$
$$\le \Big\{ (2+|a|T) \frac{1+(\tau-|a|)^2}{(\tau-|a|)^2} +$$
$$\frac{T^2}{2}\big(1+(\tau+|a|)^2\big)\Big\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF^\star(x). \quad \square$$

Tarkime, kad μ yra atsitiktinio dydžio X su pasiskirstymo funkcija F mediana. Pažymėkime

$$\hat{X} = X - \mu, \quad \hat{F}(x) = P(\hat{X} < x) = F(x+\mu).$$

Tarkime, kad $\tilde{X} = X - Y$; čia X ir Y yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Atsitiktinio dydžio $\tilde{X}$ pasiskirstymo funkciją žymėsime $\tilde{F}$.

2 lema. *Teisinga nelygybė*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}(x) \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\tilde{F}(x).$$

Į r o d y m a s . Turime lygybę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\big(1 - P(X-\mu \geq x)\big) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+x^2} dP(X-\mu < x) = -\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dP\big(|X-\mu| \geq x\big).$$

Integruojame dalimis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}(x) = -\frac{x^2}{1+x^2} P\big(|X-\mu| \geq x\big)\Big|_{0}^{\infty} +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} P\big(|X-\mu| \geq x\big) d\frac{x^2}{1+x^2} = \int_{0}^{\infty} P\big(|X-\mu| \geq x\big) d\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Tarkime, kad Y yra taip pat pasiskirstęs kaip ir X, be to, X ir Y – nepriklausomi. Kai $x > 0$, teisingos nelygybės

$$P\big(|X-Y| \geq x\big) = P\big(X-Y \geq x\big) + P\big(X-Y \leq -x\big) \geq$$

$$\geq P\big(X-\mu \geq x, Y-\mu \leq 0\big) + P\big(X-\mu \leq -x, Y-\mu \geq 0\big) =$$

$$= P\big(X-\mu \geq x\big)P(Y \leq \mu) + P(X-\mu \leq -x)P(Y \geq \mu) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} P\big(|X-\mu| \geq x\big).$$

Todėl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}(x) \leq 2 \int_{0}^{\infty} P\big(|X-Y| \geq x\big) d\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Vėl integruojame dalimis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\hat{F}(x) \le 2P\big(|X-Y| \ge x\big)\frac{x^2}{1+x^2}\bigg|_0^{\infty} -$$

$$- 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dP\big(|X-Y| \ge x\big) =$$

$$= -2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\Big(1-\tilde{F}(x)+\tilde{F}(-x+0)\Big) =$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\tilde{F}(x) - 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\tilde{F}(-x) =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\tilde{F}(x). \quad \Box$$

3 lema. *Jei μ yra atsitiktinio dydžio su pasiskirstymo funkcija F mediana ir $|\mu| < \tau$, tai egzistuoja teigiamas skaičius $c_2 = c_2(\mu, \tau)$, tenkinantis sąlygą*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF^{\star}(x) \le c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}(x).$$

Į r o d y m a s . Turime

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF^{\star}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}(x+a-\mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+\mu-a)^2}{1+(x+\mu-a)^2} d\hat{F}(x) \le$$

$$\le \int_{|x+\mu|<\tau} (x+\mu-a)^2 d\hat{F}(x) + \int_{|x+\mu|\ge\tau} d\hat{F}(x).$$

Pirmam integralui įvertinti pavartosime nelygybę

$$(x+\mu-a)^2 \le x^2 + 2x(\mu-a) + 2(\mu-a)^2 = x^2 + 2(\mu-a)(x+\mu+a).$$

Gausime

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF^\star(x) \leq \int_{|x+\mu|<\tau} x^2 d\hat{F}(x) +$$

$$+ 2(\mu - a) \int_{|x+\mu|<\tau} (x + \mu - a) d\hat{F}(x) + \int_{|x+\mu|\geq\tau} d\hat{F}(x).$$

Iš (1) lygybės

$$\int_{|x+\mu|<\tau} (x + \mu - a) d\hat{F}(x) = \int_{|x|<\tau} (x - a) dF(x) = a \int_{|x+\mu|\geq\tau} d\hat{F}(x).$$

Vadinasi,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF^\star(x) \leq \int_{|x+\mu|<\tau} x^2 d\hat{F}(x) +$$

$$+ \big(2a(\mu - a) + 1\big) \int_{|x+\mu|\geq\tau} d\hat{F}(x) \leq$$

$$\leq \big(1 + (|\mu| + \tau)^2\big) \int_{|x+\mu|<\tau} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}(x) +$$

$$+ \big(2\tau(|\mu| + \tau) + 1\big) \frac{1 + (\tau - |\mu|)^2}{(\tau - |\mu|)^2} \int_{|x+\mu|\geq\tau} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}(x) \leq$$

$$\leq \bigg\{ \Big(1 + (|\mu| + \tau)^2\Big) +$$

$$+ \big(2\tau(|\mu| + \tau) + 1\big) \frac{1 + (\tau - |\mu|)^2}{(\tau - |\mu|)^2} \bigg\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}(x) =$$

$$= c_2(\mu, \tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} d\hat{F}(x). \quad \square$$

4 lema. *Jei μ yra atsitiktinio dydžio su pasiskirstymo funkcija F ir charakteristine funkcija f, mediana μ ir $|\mu| < \tau$, tai egzistuoja teigiamas skaičius $c_3 = c_3(\mu, T, \tau)$ su sąlyga*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF^\star(x) \leq c_3 \int_0^T \big(1 - |f(t)|^2\big) dt.$$

Jei $f(t) \neq 0$, kai $|t| \leq T$, tai nelygybės antrojoje pusėje $1 - |f(t)|^2$ galima pakeisti dydžiu $2|\ln|f(t)||$.

Į r o d y m a s . Atsitiktinio dydžio $\tilde{X}$ charakteristinė funkcija yra

$$|f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\tilde{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx d\tilde{F}(x).$$

Iš čia išplaukia

$$\int_0^T \big(1 - |f(t)|^2\big) dt = \int_0^T \Big(\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) d\tilde{F}(x)\Big) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^T (1 - \cos tx) dt\Big) d\tilde{F}(x) = T \int_{-\infty}^{\infty} \Big(1 - \frac{\sin Tx}{Tx}\Big) d\tilde{F}(x).$$

Kadangi pagal II.2.2 lemą

$$\inf_x \left(1 - \frac{\sin Tx}{Tx}\right) \frac{1 + x^2}{x^2} \geq c(T),$$

tai

$$\int_0^T \big(1 - |f(t)|^2\big) dt \geq Tc(T) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} d\tilde{F}(x).$$

Iš čia ir iš 2 ir 3 lemų gauname įrodomosios lemos įvertį.

Žinome, kad visiems realiesiems y teisinga nelygybė $1 + y \leq e^y$. Paėmę bet kurį teigiamą u ir pažymėję $y = \ln u$, gauname nelygybę $1 - u \leq -\ln u$. Šios nelygybės pakanka paskutiniam lemos teiginiui įrodyti. $\Box$

3. NYKSTAMŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMŲ RIBINIAI DĖSNIAI

Grįšime prie nykstamųjų dydžių.

1 lema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_{nk} yra nykstami, tai tokie yra ir dydžiai X_{nk}^*.*

Į r o d y m a s . Iš 1.2 lemos (kai $h = 1$)

$$\max_k |a_{nk}| \leq \max_k \int_{|x|<\tau} |x| dF_{nk}(x) \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Todėl atsitiktiniams dydžiams X^*_{nk}

$$\max_k P(|X^*_{nk}| \geq \varepsilon) = \max_k P(|X_{nk} - a_{nk}| \geq \varepsilon) \leq \max_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon/2),$$

kai n yra pakankamai didelis. □

Išvada. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_{nk} yra nykstami, tai*

$$\max_k |f^*_{nk}(t) - 1| \to 0,$$

kai $n \to \infty$, tolygiai t atžvilgiu kiekviename baigtiniame t intervale.

Į r o d y m a s išplaukia iš 1 ir 1.3 lemų. □

2 lema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_{nk} yra nykstami, tai bet kuriems baigtiniams T ir visiems pakankamai dideliems n logaritmas $\ln f_{nk}(t)$ yra baigtinis, kai $|t| \leq T$, be to,*

$$\ln f_{nk}(t) = f_{nk}(t) - 1 + \theta_{nk} |f_{nk}(t) - 1|^2;$$

čia $|\theta_{nk}| \leq 1$. Analogiškas teiginys yra teisingas ir charakteristinėms funkcijoms f^*_{nk}.

Į r o d y m a s išplaukia iš 1.3 lemos ir nelygybės $|\ln(1+z) - z| \leq |z|^2$, teisingos, kai kompleksinis skaičius z tenkina nelygybę $|z| \leq 1/2$. □

3 lema. *Egzistuoja du teigiami skaičiai $c' = c'(T, \tau)$ ir $c'' = c''(T, \tau)$ su sąlygomis*

$$c' \max_{|t| \leq T} \big| f^*_{nk}(t) - 1 \big| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} dF^*_{nk}(x) \leq c'' \int_0^T \big| \ln |f_{nk}(t)| \big| dt$$

visiems pakankamai dideliems n.

Į r o d y m a s . Iš 1.2 lemos

$$|a_{nk}| = \Big| \int_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x) \Big| \le \int_{|x|<\tau} |x| dF_{nk}(x) \to 0$$

tolygiai k atžvilgiu, $1 \le k \le k_n$. Vadinasi,

$$|a_{nk}| < \tau/2,$$

kai n yra pakankamai didelis. Iš 2.1 lemos, kai $c' = c_1(\tau/2, T, \tau)$, gauname

$$c' \max_{|t|\le T} \big| f_{nk}^*(t) - 1 \big| \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}^*(x).$$

Iš nykstamumo ir 1.1 lemos išplaukia

$$|\mu X_{nk}| < \tau/2$$

bet kuriam $\tau > 0$, kai n yra pakankamai didelis. Pasinaudosime 2.4 lema, imdami $c'' = c_2(\tau/2, T, \tau)$. Gausime

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}^*(x) \le c'' \int_0^T \big| \ln |f_{nk}(t)| \big| dt. \quad \square$$

4 (aprėžtumo) lema. *Jei*

$$\prod_{k=1}^{k_n} \big| f_{nk}(t) \big| \to \big| f(t) \big|$$

ir f yra charakteristinė funkcija, tai egzistuoja teigiama konstanta c su sąlyga

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}^*(x) \le c$$

pakankamai dideliems n.

Į r o d y m a s . Tarkime, $|f(t)| > 0$, kai $|t| \le T$. Pagal 1 lemos išvadą pakankamai dideliems n funkcijos $\ln f_{nk}(t)$ yra apibrėžtos ir baigtinės srityje $|t| \le T$. Kadangi

$$\prod_{k=1}^{k_n} \big|f_{nk}(t)\big|^2 \to |f(t)|^2,$$

čia $|f(t)|^2$ yra charakteristinė funkcija, tai konvergavimas yra tolygus kiekviename baigtiniame t reikšmių intervale. Todėl

$$\sum_{k=1}^{k_n} \ln \big|f_{nk}(t)\big| \to \ln |f(t)|$$

tolygiai srityje $|t| \le T$. Pagal 3 lemą

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}^*(x) \le -c'' \int_0^T \sum_{k=1}^{k_n} \ln \big|f_{nk}(t)\big| dt.$$

Dešinioji šios nelygybės pusė turi baigtinę ribą, lygią

$$-c'' \int_0^T \ln \big|f(t)\big| dt. \quad \square$$

5 (palyginimo) lema. *Jei egzistuoja teigiama konstanta c su sąlyga*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}^*(x) \le c$$

visiems pakankamai dideliems n, tai

$$\sum_{k=1}^{k_n} \big\{ \ln f_{nk}^*(t) - \big(f_{nk}^*(t) - 1\big)\big\} \to 0$$

visiems t.

Į r o d y m a s . Tarkime, kad t yra bet kuris fiksuotas realusis skaičius. Iš 1 lemos išvados

$$\max_k \big|f_{nk}^*(t) - 1\big| \to 0,$$

o iš 2 lemos

$$\ln f^*_{nk}(t) = f^*_{nk}(t) - 1 + \theta_{nk}\big|f^*_{nk}(t) - 1\big|^2, |\theta_{nk}| \le 1,$$

kai n yra pakankamai didelis. Pagal 3 lemą

$$\sum_k \big|f^*_{nk}(t) - 1\big| \le \frac{1}{c'}\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}dF^*_{nk}(x) \le \frac{c}{c'},$$

kai n yr pakankamai didelis. Vadinasi,

$$\bigg|\sum_k \big\{\ln f^*_{nk}(t) - \big(f^*_{nk}(t) - 1\big)\big\}\bigg| \le \sum_k \big|f^*_{nk}(t) - 1\big|^2 \le \frac{c}{c'}\max_k |f^*_{nk}(t) - 1|.$$

Iš čia išplaukia lemos teiginys. $\square$

Susitarsime toliau vartoti tokius žymenis:

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{(-\infty,x)} \frac{y^2}{1+y^2}dF^*_{nk}(y),$$

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{k_n}\Big(a_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dF^*_{nk}(x)\Big),$$

$$\psi_n = \big(\alpha_n, \Psi_n\big)$$

(žr. II.2 skyrelį).

6 lema. *Jei nepriklausomų nykstamų atsitiktinių dydžių sumų S_n pasiskirstymo funkcijos konverguoja į ribinį dėsnį su charakteristine funkcija f, tai f yra neaprėžtai dali, be to,*

$$e^{\psi_n(t)} \to f(t),$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\Big\{\ln f^*_{nk}(t) - \Big(f^*_{nk}(t) - 1\Big)\Big\} = \ln \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) - \psi_n(t).$$

Į r o d y m a s . Pažymėkime ribinę pasiskirstymo funkciją F. Remiantis charakteristinių funkcijų savybėmis,

$$\prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t) \to f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x).$$

Iš 4 ir 5 lemų išplaukia, kad kiekvienam t

$$\sum_k \Big\{ \ln f^*_{nk}(t) - \big(f^*_{nk}(t) - 1\big) \Big\} \to 0 \tag{1}$$

Pastebėję, kad

$$f^*_{nk}(t) = e^{-ia_{nk}t} f_{nk}(t),$$

gauname

$$\begin{aligned}
&\ln f^*_{nk}(t) - \big(f^*_{nk}(t) - 1\big) = \\
&= \ln f^*_{nk}(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \big(e^{itx} - 1\big) dF^*_{nk}(x) = \\
&= \ln f_{nk}(t) - ia_{nk}t - it \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) - \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\Big) dF^*_{nk}(x).
\end{aligned}$$

Todėl

$$\sum_k \Big\{ \ln f^*_{nk}(t) - \big(f^*_{nk}(t) - 1\big) \Big\} = \ln \prod_k f_{nk}(t) - \psi_n(t).$$

Iš 4 lemos

$$\Psi_n(x) \le c < \infty$$

pakankamai dideliems n. Be to, funkcija Ψ_n yra nemažėjanti, tolydi iš kairės ir $\Psi_n(-\infty) = 0$. Vadinasi, pagal II.2.1 lemą $e^{\psi_n(t)}$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. Iš (1) išplaukia

$$e^{\psi_n(t)} \to f(t)$$

kiekvienam t. Pagal II.1.3 teoremą charakteristinė funkcija f yra neaprėžtai dali. □

1 teorema. *Nepriklausomų kiekvienoje serijoje ir nykstamų atsitiktinių dydžių sumų ribinių skirstinių klasė sutampa su neaprėžtai dalių dėsnių klase.*

Į r o d y m a s . 1. Tarkime, kad F yra bet kuri neaprėžtai dali pasiskirstymo funkcija, o f – jos charakteristinė funkcija. Tada bet kuriam n

$$f_n(t) = \big(f(t)\big)^{1/n} = \exp\big\{n^{-1}\ln f(t)\big\}$$

yra taip pat charakteristinė funkcija. Vadinasi,

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t);$$

čia $f_{nk}(t) = f_n(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Todėl sumų

$$\sum_{k=1}^{n} X_{nk},$$

pasiskirstymo funkcijos, kai X_{nk} yra atsitiktinis dydis su charakteristine funkcija f_{nk}, konverguoja į F. Dydžiai X_{nk} yra nykstami, nes

$$\big(f(t)\big)^{1/n} \to 1$$

tolygiai t atžvilgiu kiekviename baigtiniame intervale. Galime pasinaudoti 1.3 lema.

2. Tarkime, kad X_{nk} $(k = 1, \ldots, k_n; n = 1, \ldots, n)$ yra nykstami ir nepriklausomi kiekvienoje serijoje dydžiai ir

$$P\biggl(\sum_{k=1}^{k_n} < x\biggr) \to F(x)$$

kiekviename pasiskirstymo funkcijos F tolydumo taške. Iš 6 lemos išplaukia, kad F yra neaprėžtai dali. $\square$

Gali pasitaikyti, kad atsitiktinių dydžių sumų

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$$

pasiskirstymai neturi ribinio dėsnio, tačiau egzistuoja seka konstantų b_n $(n = 1, 2, \ldots)$, kad $S_n - b_n$ turi ribinį pasiskirstymą. Pastarosios sumos charakteristinė funkcija yra

$$e^{-ib_n t} \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t).$$

Ji tik dauginamuoju $\exp(-ib_n t)$ skiriasi nuo anksčiau tirtos sumos charakteristinės funkcijos. Jei ψ_n yra neaprėžtai dalios charakteristinės funkcijos logaritmas, tai ir $-ib_n t + \psi_n(t)$ turi tą pačią savybę. Peržvelgę 1 teoremos įrodymą, galime lengvai įsitiktinti, kad teisinga tokia teorema.

2 teorema. *Tarkime, kad X_{nk} yra nykstami, kiekvienoje serijoje nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Sumų $S_n - b_n$ su konstantomis b_n ribinių dėsnių klasė sutampa su neaprėžtai dalių dėsnių klase.*

Nykstamų dydžių schemą galime apibendrinti. Tarkime,

$$X_{nk} \ (k = 1, \ldots, k_n; 1 \ n = 1, 2, \ldots)$$

yra atsitiktiniai dydžiai. Jei egzistuoja konstantos

$$l_{nk} \ (k = 1, \ldots, k_n; \ n = 1, 2, \ldots),$$

kad

$$\max_{1 \le k \le k_n} P\big(|X_{nk} - l_{nk}| \ge \varepsilon\big) \to 0 \tag{2}$$

kiekvienam fiksuotam ε, tai tokius dydžius vadiname *asimptotiškai pastoviais.*

Kitais žodžiais, atsitiktiniai dydžiai X_{nk} yra asimptotiškai pastovūs, jei egzistuoja konstantos l_{nk} su sąlyga, kad atsitiktiniai dydžiai $X_{nk} - l_{nk}$ yra nykstami.

Remiantis asimptotiško pastovumo apibrėžimu,

$$\min_{1 \le k \le k_n} P\big(|X_{nk} - l_{nk}| < \varepsilon\big) > \frac{1}{2}$$

bet kuriam ε ir pakankamai dideliems n. Todėl iš medianos apibrėžimo išplaukia

$$\left|\mu X_{nk} - l_{nk}\right| < \varepsilon$$

visiems pakankamai dideliems n. Todėl, jei (2) sąlyga yra teisinga kokiems nors l_{nk}, tai ji bus teisinga ir l_{nk} pakeitus dydžiais μX_{nk}.

Aišku, kad 1 ir 2 teoremose nykstamumo sąlygą galime pakeisti asimptotiško pastovumo sąlyga.

4. KOVERGAVIMO Į KONKRETŲ DĖSNĮ KRITERIJUS

Kaip ir anksčiau, tirsime seką serijų nykstamų atsitiktinių dydžių X_{nk} $(k = 1, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots)$. Dydžius kiekvienoje serijoje laikysime nepriklausomais. n-osios serijos narių sumą žymėsime S_n. Tų dydžių pasiskirstymo funkcijas žymėsime F_{nk}, o charakteristines funkcijas f_{nk}. Vartosime 3 skyrelyje įvestus žymenis Ψ_n, ψ_n, α_n, (α, Ψ).

1 teorema. *Sumų S_n pasiskirstymo funkcijos silpnai konverguoja į neaprėžtai dalią pasiskirstymo funkciją su charakteristine funkcija*

$$f = e^{(\alpha, \Psi)} \tag{1}$$

tada ir tik tada, kai Ψ_n pilnai konverguoja į Ψ, o α_n konverguoja į α, kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s . 1. Tarkime, kad tiriamųjų sumų pasiskirstymo dėsniai silpnai konverguoja į ribinį pasiskirstymą su (1) charakteristine funkcija. Iš 3.6 lemos išplaukia

$$e^{\psi_n(t)} \to f(t) = e^{\psi(t)}, \quad \psi = (\alpha, \Psi).$$

3.6 lemoje buvo apibrėžtos ir funkcijos $\psi_n = (\alpha_n, \Psi_n)$. Todėl

$$\psi_n(t) \to \psi(t).$$

Pagal II.2.2 teoremą Ψ_n pilnai konverguoja į Ψ, o $\alpha_n \to \alpha$.

2. Tarkime, kad Ψ_n pilnai konverguoja į Ψ, α_n — į α. Tada pagal II.2.2 teoremą

$$\psi_n \to \psi.$$

Kadangi Ψ_n pilnai konverguoja į Ψ, tai

$$\Psi_n(\infty) = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x) \to \Psi(\infty) < \infty.$$

Pasinaudoję 3.5 lema ir 3.6 lemos lygybe

$$\sum_k \left\{ \ln f^*_{nk}(t) - \bigl(f^*_{nk}(t) - 1\bigr) \right\} = \ln \prod_k f_{nk}(t) - \psi_n(t),$$

gauname

$$\ln \prod_k f_{nk}(t) - \psi_n(t) \to 0,$$

$$\prod_k f_{nk}(t) \to e^{\psi(t)} = f(t)$$

kiekvienam t. Iš čia išplaukia sąlygos pakankamumas. $\square$

Šią teoremą nesunku apibendrinti.

2 teorema. *Tarkime, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ yra konstantų seka. Sumų $S_n - b_n$ pasiskirstymai silpnai konverguoja į neaprėžtai dalų dėsnį su charakteristine funkcija $f = e^{(\alpha, \Psi)}$ tada ir tik tada, kai Ψ_n pilnai konverguoja į Ψ, o $\alpha_n - b_n \to \alpha$.*

Iš pastarosios išplaukia dar viena teorema.

3 teorema. *Konstantų seka b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ su sąlyga, kad sumų $S_n - b_n$ pasiskirstymai silpnai konverguotų į neaprėžtai dalų ribinį dėsnį, egzistuoja tada ir tik tada, kai $\Psi_n(x)$ pilnai konverguoja į aprėžtą nemažėjančią funkciją $\Psi(x)$.*

Jei $S_n - b_n$ skirstiniai silpnai konverguoja į ribinį skirstinį, tai $b_n = \alpha_n - \alpha + o(1)$; čia α yra bet kuris realusis skaičius.

1, 2 ir 3 teoremose nykstamumo sąlygą galima pakeisti asimptotinio pastovumo sąlyga. Tada funkcijas $F_{nk}(x)$ reikia pakeisti funkcijomis $F_{nk}(x+\mu_{nk})$; čia μ_{nk} yra dydžio X_{nk} mediana. Be to, sumas S_n reikia pakeisti sumomis

$$S_n - \sum_{k=1}^{k_n} \mu_{nk}.$$

1 ir 2 teoremų sąlygas galime ir kitaip suformuluoti. Naujosios formuluotės kartais patogesnės taikymams. Kai $\varepsilon > 0$, žymėsime sutrumpinimus:

$$M_{nk}(\varepsilon) = \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x), \quad M_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} M_{nk}(\varepsilon),$$

$$D_{nk}(\varepsilon) = \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - M_{nk}^2(\varepsilon), \quad D_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} D_{nk}(\varepsilon).$$

4 teorema. *Sumų S_n pasiskirstymai silpnai konverguoja į neaprėžtai dalų pasiskirstymą su charakteristine funkcija $f = exp\{(\alpha, \Psi)\}$ tada ir tik tada, kai*

$$\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \to \int_{(-\infty,x)} \frac{1+y^2}{y^2} d\Psi(y), \quad \text{jei} \quad x < 0,$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{k_n} \big(1 - F_{nk}(x)\big) \to \int_{[x,\infty)} \frac{1+y^2}{y^2} d\Psi(y), \quad \text{jei} \quad x > 0,$$

kiekviename funkcijos Ψ tolydumo taške;

(3) $$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} D_n(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} D_n(\varepsilon) = \Psi(+0) - \Psi(0);$$

(4) $$M_n(\tau) \to \alpha + \int_{|x|<\tau} x d\Psi(x) - \int_{|x|\geq\tau} \frac{1}{x} d\Psi(x)$$

kiekvienam fiksuotam $\tau > 0$ su sąlyga, kad $\pm\tau$ yra funkcijos Ψ tolydumo taškai.

Į r o d y m a s . Pagal 1 teoremą mums reikės įrodyti, kad (2), (3) ir (4) sąlygos kartu yra ekvivalenčios sąlygoms:

(5) Ψ_n pilnai konverguoja į Ψ,

(6) $\alpha_n \to \alpha$.

1. Iš pradžių parodysime, kad (5) sąlyga yra ekvivalenti dviem sąlygoms — (7) ir (8) kartu:

$$\tag{7} \begin{gathered} \sum_k F^*_{nk}(x) \to \int_{(-\infty,x)} \frac{1+y^2}{y^2} d\Psi(y), \text{ kai } \quad x<0, \\ \sum_k \big(1-F^*_{nk}(x)\big) \to \int_{[x,\infty)} \frac{1+y^2}{y^2} d\Psi(y), \text{ kai } \quad x>0, \end{gathered}$$

kiekviename funkcijos Ψ tolydumo taške;

$$\tag{8} \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_k\int_{|x|<\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}dF^*_{nk}(x) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\sum_k\frac{x^2}{1+x^2}dF^*_{nk}(x) = \\ &= \Psi(+0)-\Psi(0). \end{aligned}$$

Tas ekvivalentumas išplaukia iš Helio teoremos, pastebėjus, kad

$$\begin{gathered} \sum_k F^*_{nk}(x) = \int_{(-\infty,x)} \frac{1+y^2}{y^2} d\Psi_n(y), \quad \text{kai} \quad x<0, \\ \sum_k \big(1-F^*_{nk}(x)\big) = \int_{[x,\infty)} \frac{1+y^2}{y^2} d\Psi_n(y,), \quad \text{kai} \quad x>0, \\ \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) = \int_{|x|<\varepsilon} d\Psi_n(x). \end{gathered}$$

2. Parodysime, kad (2) ir (7) sąlygos yra ekvivalenčios. Pažymėkime

$$a_n = \max_k |a_{nk}|.$$

Iš nykstamumo sąlygos ir 1.2 lemos

$$a_n \le \max_k \int_{|x|<\tau} |x| dF_{nk}(x) \to 0 \tag{9}$$

kiekvienam $\tau > 0$. Be to,

$$F_{nk}(x) \le F_{nk}^*(x + a_n) \le F_{nk}(x + 2a_n).$$

Todėl (7) sąlyga yra ekvivalenti analogiškai sąlygai, kurioje F_{nk}^* yra pakeista funkcija F_{nk}, t. y. (2) sąlygai.

Tuo pačiu parodėme, kad (5) sąlyga yra ekvivalenti (2) ir (8) sąlygai kartu.

3. Tarkime, kad (2) sąlyga teisinga. Panagrinėsime

$$\sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}^*(x) - D_n(\varepsilon) = V_n - W_n;$$

čia

$$V_n = \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} (x - a_{nk})^2 dF_{nk}(x) - D_n(\varepsilon),$$
$$W_n = \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} (x - a_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}^*(x),$$

$0 < \varepsilon < \tau$.

Iš pradžių įvertinsime V_n. Pakėlę pointegralinį dvinarį kvadratu ir įstatę $D_n(\varepsilon)$ išraišką, gauname

$$V_n = \sum_k \left\{ a_{nk}^2 \int_{|x|<\varepsilon} dF_{nk}(x) - 2a_{nk} \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) + \right.$$
$$\left. + \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 \right\}.$$

Pirmasis integralas lygus $1 - P(|X_{nk}| \geq \varepsilon)$. Prisiminę a_{nk} išraišką, rasime

$$
\begin{aligned}
V_n &= \sum_k \left\{ \left(a_{nk} - \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 - a_{nk}^2 P\big(|X_{nk}| \geq \varepsilon\big) \right\} \leq \\
&\leq \sum_k \left(\int_{\varepsilon \leq |x| < \tau} x dF_{nk}(x) \right)^2 \leq \\
&\leq \tau \sum_k \int_{|x|<\tau} |x| dF_{nk}(x) \cdot \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{nk}(x) \leq \\
&\leq \tau a_n \sum_k P\big(|X_{nk}| \geq \varepsilon\big).
\end{aligned}
$$

Jei tenkinama (2) sąlyga, tai suma yra aprėžta. Iš nykstamumo sąlygos išplaukia $a_n \to 0$. Vadinasi, $V_n \to 0$.

Tirsime W_n. Pertvarkome

$$
\begin{aligned}
W_n &= \sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} (x - a_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \right. \\
&\left. - \int_{|x-a_{nk}|<\varepsilon} (x - a_{nk})^2 dF_{nk}(x) \right\} = \\
&= \sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon, |x-a_{nk}| \geq \varepsilon} (x - a_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \right. \\
&\left. - \int_{|x-a_{nk}|<\varepsilon, |x| \geq \varepsilon} (x - a_{nk})^2 dF_{nk}(x) \right\}.
\end{aligned}
$$

Pakankamai dideliems n iš (9) gauname $a_n < \varepsilon/2$. Todėl

$$
\begin{aligned}
\big|W_n\big| &\leq 2 \sum_k \int_{\varepsilon/2 < |x| \leq 2\varepsilon} \big(x - a_{nk}\big)^2 dF_{nk}(x) \leq \\
&\leq 18\varepsilon^2 \sum_k P\big(|X_{nk}| \geq \varepsilon/2\big).
\end{aligned}
$$

Kadangi (2) sąlyga teisinga, tai $W_n \to 0$, kai $n \to \infty$, vadinasi, ir $V_n - W_n \to 0$, kai $n \to \infty$, t. y.

$$\sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF^*_{nk}(x) - D_n(\varepsilon) \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Todėl, kai (2) teisinga, (3) sąlyga yra ekvivalenti tokiai

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|<\varepsilon} x^2 fF^*_{nk}(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \int_{|x|<\varepsilon} x^2 fF^*_{nk}(x) =$$

(10)$= \Psi(+0) - \Psi(0)$.

Kadangi teisingos nelygybės

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2} \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF^*_{nk}(x) \le \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) \le \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF^*_{nk}(x),$$

tai (10) sąlyga ekvivalenti (8) sąlygai.

Vadinasi, esant (2) teisingai, (3) ir (8) sąlygos yra ekvivalenčios.

Surašysime gautų ekvivalentumų schemą

$$(5) \iff (7)\&(8), \quad (2) \iff (7), \quad (2)\&(3) \iff (2)\&(8)$$

Iš čia matome, kad (2)&(3) $\iff$ (5).

4. Tarkime, kad (2) ir (3) sąlygos teisingos. Parodysime, kad tada (4) ir (6) sąlygos yra ekvivalenčios. Tam savo ruožtu pakanka įrodyti, kad

$$\text{(11)} \qquad \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) \to \int_{|x|>\tau} \frac{d\Psi(x)}{x} - \int_{|x|<\tau} x d\Psi(x)$$

kiekvienam fiksuotam teigiamam τ su sąlyga, kad $\pm\tau$ yra funkcijos Ψ tolydumo taškai. Pasinaudosime lygybe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) = \int_{|x|<\tau} x dF^*_{nk}(x) -$$

$$- \int_{|x|<\tau} \frac{x^3}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) + \int_{|x|\ge\tau} \frac{x}{1+x^2} dF^*_{nk}(x).$$

Iš (5) sąlygos, ekvivalenčios (2) ir (3) sąlygoms, ir Helio teoremos gauname

$$\sum_k \int_{|x|<\tau} \frac{x^3}{1+x^2} dF_{nk}^*(x) \to \int_{|x|<\tau} x d\Psi(x),$$

$$\sum_k \int_{|x|\geq\tau} \frac{x}{1+x^2} dF_{nk}^*(x) \to \int_{|x|\geq\tau} \frac{d\Psi(x)}{x}.$$

Lieka įrodyti, kad

$$\sum_k \int_{|x|<\tau} x dF_{nk}^*(x) \to 0.$$

Sumuojamasis integralas lygus

$$\int_{|x-a_{nk}|<\tau} (x-a_{nk}) dF_{nk} = \int_{|x|<\tau} - \int_{|x|<\tau, |x-a_{nk}|\geq\tau} +$$
$$+ \int_{|x|\geq\tau, |x-a_{nk}|<\tau}.$$

Pirmasis integralas, kaip jau esame matę, yra lygus

$$a_{nk} P\big(|X_{nk}| \geq \tau\big).$$

Antrasis integralas absoliučiuoju didumu

$$\leq (\tau + a_{nk}) \int_{\tau - a_{nk} \leq |x| < \tau} dF_{nk}(x) \leq (\tau + a_n) P(\tau - a_n \leq |X_{nk}| < \tau).$$

Trečiojo integralo absoliutusis didumas

$$\leq \tau \int_{\tau \leq |x| \leq \tau + a_n} dF_{nk}(x) = \tau P(\tau \leq |X_{nk}| < \tau + a_n).$$

Todėl

$$\left| \sum_k \int_{|x|<\tau} x dF_{nk}^*(x) \right| \leq a_n \sum_k P(|X_{nk}| \geq \tau) +$$
$$+ (\tau + a_n) \sum_k P(\tau - a_n \leq |X_{nk}| < \tau) +$$
$$+ \tau \sum_k P(\tau \leq |X_{nk}| < \tau + a_n).$$

Iš (2) ir (9) išplaukia, kad nelygybės dešinioji pusė konverguoja nulin. □

5 teorema. *Tarkime,* b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *yra konstantų seka. Sumų* $S_n - b_n$ *pasiskirstymai silpnai koverguoja į neaprėžtai dalų dėsnį su charakteristine funkcija* $\exp\{(\alpha, \Psi)\}$ *tada ir tik tada, kai tenkinamos* 4 *teoremos* (2), (3) *sąlygos ir sąlyga*

$$M_n(\tau) - b_n \to \alpha + \int_{|x|<\tau} x d\Psi(x) - \int_{|x|\geq\tau} \frac{d\Psi(x)}{x}$$

bet kuriam fiksuotam $\tau > 0$*, kai* $\pm\tau$ *yra funkcijos* Ψ *tolydumo taškai.*

Į r o d y m a s išplaukia iš 2 teoremos ir tokių faktų, gautų 4 teoremos įrodyme: a) (2) ir (3) sąlygos yra ekvivalenčios (5) sąlygai; b) jei tenkinamos (2) ir (3) sąlygos, tai teisingas (11) teiginys. □

Iki šiol vartojome neaprėžtai dalių charakteristinių funkcijų Levi-Chinčino kanoninę išraišką. Panagrinėsime dabar Levi kanoninę išraišką.

6 teorema. *Konstantų seka* b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *su sąlyga, kad* $S_n - b_n$ *skirstiniai silpnai konverguotų į neaprėžtai dalų pasiskirstymo dėsnį, užrašytą Levi kanonine formule su funkcija* L *ir konstanta* σ^2*, egzistuoja tada ir tik tada, kai tenkinamos sąlygos*

$$\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \to L(x), \quad \text{kai} \quad x < 0,$$
$$\sum_{k=1}^{k_n} \big(F_{nk}(x) - 1\big) \to L(x), \quad \text{kai} \quad x > 0,$$

kiekviename funkcijos L *tolydumo taške ir*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} D_n(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} D_n(\varepsilon) = \sigma^2.$$

Ši teorema išplaukia iš 5 teoremos ir ryšių tarp L ir Ψ.

5. KONVERGAVIMO Į NORMALŲJĮ DĖSNĮ SĄLYGOS

Tirsime vėl seką serijų nykstamų atsitiktinių dydžių, kurie yra nepriklausomi kiekvienoje serijoje. Vartosime tuos pačius žymenis, kaip ir 4 skyrelyje.

Normaliojo dėsnio su vidurkiu a ir dispersija σ^2 charakteristinės funkcijos Levi-Chinčino kanoninėje formulėje

$$\alpha = a,$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x \leq 0, \\ \sigma^2, & \text{kai} \quad x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Konvergavimo į normalųjį dėsnį būtinas ir pakankamas sąlygas galime gauti iš 4.4 teoremos. Tik jas šiuo specialiu atveju galima gerokai suprastinti. Tačiau 4.4 teoremos įrodymas yra gana ilgas. Jei mums rūpėtų tik normalusis atvejis, galėtumėme apseiti be tos teoremos, o pasiremti tik 4.1 teorema. Iš jos išplaukia sumų S_n pasiskirstymo funkcijų konvergavimo į normalųjį dėsnį su vidurkiu a ir dispersija σ^2 būtinos ir pakankamos sąlygos:

$$\Psi_n(x) \text{ pilnai konverguoja į } \Psi(x), \tag{2}$$

$$\alpha_n \to a, \tag{3}$$

kai $n \to \infty$. Iš šio rezultato gausime tokią teoremą.

1 teorema. *Dydžiai X_{nk} yra nykstami ir sumų S_n pasiskirstymai konverguoja į normalųjį pasiskirstymą $N(a, \sigma^2)$ tada ir tik tada, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$ yra teisingos sąlygos*

$$\sum_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0, \tag{4}$$

$$D_n(\varepsilon) \to \sigma^2, \tag{5}$$

$$M_n(\varepsilon) \to a, \tag{6}$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s . P a k a n k a m u m a s. Tarkime, kad tenkinamos (4), (5), (6) sąlygos. Iš (4) išplaukia

$$\max_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \leq \sum_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$$

kiekvienam ε, kai $n \to \infty$. Vadinasi, dydžiai X_{nk} yra nykstami.

Mums lieka įrodyti, jog (2), (3) teisingos.

Pradėsime nuo (2) sąlygos.

Iš pradžių įrodysime, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$I_n(\varepsilon) = \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF^*_{nk}(x) \to \sigma^2. \tag{7}$$

Panagrinėsime du reiškinius

$$U_1 = \sum_k \Big\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF^*_{nk}(x) - \\ - \int_{|x|<\varepsilon} \big(x - a_{nk}\big)^2 dF_{nk}(x) \Big\}, \tag{8}$$

$$U_2 = \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} \big(x - a_{nk}\big)^2 dF_{nk}(x) - D_n(\varepsilon). \tag{9}$$

Parodysime, kad $U_1 \to 0,\ U_2 \to 0$, kai $n \to \infty$. Tada iš (5) išplauks (7).

Perrašysime pirmąjį reiškinį

$$U_1 = \sum_k \Big\{ \int_{|x-ank|<\varepsilon} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x) - \int_{|x|<\varepsilon} \big(x-a_{nk}\big)^2 dF_{nk}(x) \Big\}.$$

Intervalas $|x - a_{nk}| < \varepsilon$ yra sąjunga dviejų nepersidengiančių aibių: $\big\{x : |x - a_{nk}| < \varepsilon,\ |x| < \varepsilon\big\}$ ir $\big\{x : |x - a_{nk}| < \varepsilon,\ |x| \geq \varepsilon\big\}$. Panašiai galime išreikšti ir sritį $\big\{x : |x| < \varepsilon\big\}$ kaip sąjungą dviejų nepersidengiančių aibių $\{|x| < \varepsilon, |x - a_{nk}| < \varepsilon\}$ ir $\{x : |x| < \varepsilon,\ |x - a_{nk}| \geq \varepsilon\}$. Todėl

$$U_1 = \sum_k \Big\{ \int_{\substack{|x-a_{nk}|<\varepsilon \\ |x|\geq\varepsilon}} \big(x - a_{nk}\big)^2 dF_{nk}(x) - \\ - \int_{\substack{|x|<\varepsilon \\ |x-a_{nk}\geq\varepsilon}} \big(x - a_{nk}\big)^2 dF_{nk}(x) \Big\}.$$

Kadangi dydžiai X_{nk} yra nykstami, tai pagal 1.2 lemą

$$\max_k |a_{nk}| \leq \max_k \int_{|x|<\tau} |x| dF_{nk}(x) \to 0, \tag{10}$$

kai $n \to \infty$. Kai n yra pakankamai didelis, tai visiems k

$$\big\{x:\ |x - a_{nk}| < \varepsilon,\ |x| \geq \varepsilon\big\} \subset \big\{x:\ \varepsilon \leq |x| < 2\varepsilon\big\},$$
$$\big\{x:\ |x| < \varepsilon,\ |x - a_{nk}| \geq \varepsilon\big\} \subset \big\{x:\ \frac{\varepsilon}{2} \leq |x| < \varepsilon\big\}.$$

Iš čia ir (4) išplaukia

$$U_1 \leq \int_{\frac{\varepsilon}{2}\leq|x|<\varepsilon} \big(x - a_{nk}\big)^2 dF_{nk}(x) \leq 9\varepsilon^2 \sum_k P\Big(|X_{nk}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big) \to 0$$

kiekvienam $\varepsilon > 0$.

Pereisime prie U_2. Pakėlę pointegralinį reiškinį kvadratu ir įstatę $D_n(\varepsilon)$ išraišką, gauname

$$U_2 = \sum_k \Big\{ - 2a_{nk} \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) + a_{nk}^2 \int_{|x|<\varepsilon} dF_{nk}(x) + \\ + \Big(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \Big)^2 \Big\} = \\ = \sum_k \Big\{ \Big(a_{nk} - \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \Big)^2 - a_{nk}^2 + a_{nk}^2 \int_{|x|<\varepsilon} dF_{nk}(x) \Big\}.$$

Tarkime, kad $\varepsilon < \tau$. Tada

$$|U_2| = \left| \sum_k \left\{ \left(\int_{\varepsilon \le |x| < \tau} x dF_{nk}(x) \right)^2 - a_{nk}^2 \int_{|x| \ge \varepsilon} dF_{nk}(x) \right\} \right| \le$$

$$\le \tau^2 \sum_k \int_{|x| \ge \varepsilon} dF_{nk}(x) + \max_k a_{nk}^2 \sum_k P\big(|X_{nk}| \ge \varepsilon\big) \to 0$$

pagal (4). Atvejis $\varepsilon \ge \tau$ tiriamas analogiškai. Todėl (7) sąlyga yra teisinga.

Pažymėkime

$$H_n(\varepsilon) = \sum_k \int_{|x| < \varepsilon} \frac{x^2}{1 + x^2} dF_{nk}^*(x). \tag{11}$$

Parodysime, kad bet kuriam $\varepsilon > 0$

$$H_n(\varepsilon) \to \sigma^2. \tag{12}$$

Tarkime, kad $0 < \delta < \varepsilon$. Tada

$$\frac{1}{1 + \delta^2} \sum_k \int_{|x| < \delta} x^2 dF_{nk}^*(x) \le H_n(\varepsilon) \le \sum_k \int_{|x| < \varepsilon} x^2 dF_{nk}^*(x).$$

Pasinaudoję (7) formule, gauname

$$\frac{\sigma^2}{1 + \delta^2} \le \liminf H_n(\varepsilon) \le \limsup H_n(\varepsilon) \le \sigma^2.$$

Pereikime prie ribos, kai $\delta \searrow 0$. Gausime (12).

Dabar įrodysime, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \int_{|x| \ge \varepsilon} \frac{x^2}{1 + x^2} dF_{nk}^*(x) \to 0. \tag{13}$$

Pastaroji suma yra ne didesnė už sumą

$$\sum_k \int_{|x| \ge \varepsilon} dF_{nk}^*(x) = \sum_k P\big(|X_{nk} - a_{nk}| \ge \varepsilon\big).$$

Kiekvienam ε ir visiems pakankamai dideliems n

$$\max_k |a_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Todėl

$$\sum_k P\big(|X_{nk} - a_{nk} \geq \varepsilon\big) \leq \sum_k P\big(|X_{nk} \geq \frac{\varepsilon}{2}\big) \to 0.$$

(13) sąlyga įrodyta.

Iš (11), (12), (13) ir (1) išplaukia (2). Lieka gauti (3). Įrodysime, kad

$$\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) \to 0. \tag{14}$$

Pastarąjį reiškinį perrašysime

$$\sum_k \int_{|x|<\tau} x dF^*_{nk}(x) - \sum_k \int_{|x|<\tau} \frac{x^3}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) +$$
$$+ \sum_k \int_{|x|\geq\tau} \frac{x}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) = I_1 - I_2 + I_3.$$

Parodysime, kad $I_1 \to 0,\ I_2 \to 0,\ I_3 \to 0$. Iš čia išplauks (14). Pagal (2) ir Helio teoremą

$$I_2 = \int_{|x|<\tau} x d\Psi_n(x) \to \int_{|x|<\tau} x d\Psi(x) = 0,$$

$$I_3 = \int_{|x|>\tau} \frac{1}{x} d\Psi_n(x) \to \int_{|x|>\tau} \frac{1}{x} d\Psi(x) = 0.$$

Lieka ištirti I_1. Kadangi

$$I_1 = \sum_k \int_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x + a_{nk}) = \sum_k \int_{|-a_{nk}|<\tau} dF_{nk}(x) =$$
$$= \sum_k \Big\{ \int_{\substack{|x-a_{nk}|<\tau \\ |x|<\tau}} + \int_{\substack{|x-a_{nk}|\geq\tau \\ |x|<\tau}} \Big\} (x - a_{nk}) dF_{nk}(x),$$

tai

$$I_1 = \sum_k \left\{ \int_{|x|<\tau} - \int_{\substack{|x|<\tau \\ |x-a_{nk}\geq\tau}} + \int_{\substack{|x|\geq\tau \\ |x-a_{nk}|<\tau}} \right\} (x-a_{nk}) dF_{nk}(x).$$

Iš (4) ir (10)

$$\begin{aligned} |I_1| \leq & \left| \sum_k \int_{|x|<\tau} (x-a_{nk}) dF_{nk}(x) \right| + \\ & + \sum_k \int_{\substack{|x|<\tau \\ |x-a_{nk}|\geq\tau}} |Ix-a_{nk}| dF_{nk}(x) + \\ & + \sum_k \int_{\substack{|x|\geq\tau \\ |x-a_{nk}|<\tau}} |x-a_{nk}| dF_{nk}(x) \leq \left| \sum_k a_{nk} \int_{|x|\geq\tau} dF_{nk}(x) \right| + \\ & + 2\tau \sum_k P\Big(|X_{nk}| \geq \frac{\tau}{2}\Big) + \tau \sum_k P(|X_{nk}| \geq \tau) \to 0. \end{aligned}$$

Taigi (14) įrodėme. Iš čia ir (6) išplaukia (3).

B ū t i n u m a s . Tarkime, kad dydžiai X_{nk} yra nykstami ir jų sumų S_n pasiskirstymai konverguoja į normalųjį pasiskirstymą $N(a, \sigma^2)$. Reikia įrodyti, kad tada teisingos (3), (4), (5) sąlygos.

Kaip sakėme skyrelio pradžioje, tada teisingi teiginiai (2) ir (3). Pasinaudoję (1), gauname

$$\begin{aligned} & \sum_k \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) = \\ & = \sum_k \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{(-\infty,-\varepsilon)} - \int_{\varepsilon,\infty)} \right\} \frac{x^2}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) \to \\ & \to \sigma^2 - \sigma^2 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Funkcija $x^2/(1+x^2)$ didėja, kai x^2 didėja. Todėl

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) \geq \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \int_{|x|\geq\varepsilon} dF^*_{nk}(x)$$

ir kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \int_{|x|\geq\varepsilon} dF^*_{nk}(x) \to 0. \tag{15}$$

Kadangi visiems $\varepsilon > 0$ ir k, kai n yra pakankamai didelis,

$$\{x : |x| \geq \varepsilon\} \subset \Big\{x : \big|x - a - nk\big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big\},$$

tai pagal (15)

$$\sum_k P(|X_{nk}| \geq \varepsilon) \leq \sum_k P\Big(|X_{nk} - a_{nk}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big) =$$
$$= \sum_k \int_{|x|\geq\frac{\varepsilon}{2}} dF^*_{nk}(x) \to 0$$

Taigi (5) sąlyga įrodyta.

Įrodinėdami pakankamumą, radome, kad iš (4) išplaukia $U_1 \to 0$ ir $U_2 \to 0$. Todėl (5) sąlyga bus įrodyta, įrodžius (7). Iš (2) išplaukia, kad (12) sąlyga teisinga.

Kai $\delta > 0,\ \delta < \varepsilon$, gauname

$$0 \leq I_n(\varepsilon) - H_n(\varepsilon) = \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^4}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) =$$
$$= \sum_k \Big\{ \int_{|x|<\delta} + \int_{\delta\leq|x|<\varepsilon} \Big\} \frac{x^4}{1+x^2} dF^*_{nk}(x).$$

Iš čia

$$0 \leq I_n(\varepsilon) - H_n(\varepsilon) \leq$$
$$\leq \delta^2 \sum_k \int_{|x|<\delta} \frac{x^2}{1+x^2} dF^*_{nk}(x) + \varepsilon^4 \sum_k \int_{|x|\geq\delta} dF^*_{nk}(x).$$

Kaip matėme, iš (4) išplaukia (15). Todėl, perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, turime

$$0 \leq \liminf \big(I_n(\varepsilon) - H_n(\varepsilon)\big) \leq \limsup \big(I_n(\varepsilon) - H_n(\varepsilon)\big) \leq \delta^2\sigma^2.$$

Pereiname prie ribos, kai $\delta \searrow 0$. Gauname

$$0 \leq \liminf \big(I_n(\varepsilon) - H_n(\varepsilon)\big) \leq \limsup \big(I_n(\varepsilon) - H_n(\varepsilon)\big) \leq 0.$$

Prisiminę (12), matome, kad (7) teisinga. Iš čia išplaukia (5).

Lieka įrodyti (6). Iš (3) matome, kad (6) sąlyga bus įrodyta, įrodžius

$$\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF_{nk}^*(x) \to 0.$$

Tačiau šis teiginys, kaip matėme įrodydami pakankamumą, išplaukia iš (2) ir jau mūsų įrodyto (4) teiginio. □

Įrodytąją teoremą galima ir kitaip suformuluoti. Jai įrodyti mums pravers paprasta lema.

1 lema. *Tarkime,* $0 < \delta < \varepsilon$. *Tada*

$$\big|D_n(\varepsilon) - D_n(\delta)\big| \leq \varepsilon(2\varepsilon + \delta) \sum_k P\big(|X_{nk}| \geq \delta\big).$$

Į r o d y m a s . Lygybės

$$D_{nk}(\varepsilon) - D_{nk}(\delta) = \int_{\delta \leq |x| < \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \\ - \big(M_{nk}(\varepsilon) - M_{nk}(\delta)\big) \cdot \big(M_{nk}(\varepsilon) - M_{nk}(\delta)\big)$$

pirmasis narys yra ne didesnis už

$$\varepsilon^2 \int_{|x| \geq \delta} dF_{nk}(x) = \varepsilon^2 P\big(|X_{nk}| \geq \delta\big),$$

o antrasis absoliučiuoju didumu neviršija

$$\Big| \int_{\delta \leq |x| < \varepsilon} x dF_{nk}(x) \Big| \Big| \int_{|x| \leq \varepsilon} x dF_{nk}(x) + \int_{|x| \leq \delta} x dF_{nk}(x) \Big| \leq \\ \leq \varepsilon P\big(\big|X_{nk}\big| \geq \delta\big)(\varepsilon + \delta).$$

Sudėję abu įverčius ir susumavę pagal k, gauname lemos nelygybę. □

2 teorema. *Dydžiai X_{nk} yra nykstami ir sumų S_n pasiskirstymo dėsniai silpnai konverguoja į $N(a, \sigma^2)$ tada ir tik tada, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$ teisinga* (3) *sąlyga ir bent vienam $\tau > 0$ sąlygos*

(16) $$D_n(\tau) \to \sigma^2,$$

(17) $$M_n(\tau) \to a.$$

Į r o d y m a s . Šių sąlygų būtinumas išplaukia iš 1 teoremos. Todėl pakanka įrodyti, kad iš (1) sąlygos bet kuriam $\varepsilon > 0$ ir bent vienam $\tau > 0$ iš (16) ir (17) sąlygų išplaukia, jog (4) ir (5) sąlygos teisingos visiems $\varepsilon > 0$.

Tarkime, $0 < \varepsilon \le \tau$. Pagal 1 lemą

$$\big|D_n(\tau) - D_n(\varepsilon)\big| \le \tau(2\tau + \varepsilon) \sum_k P\big(\big|X_{nk}\big| \ge \varepsilon\big) \to 0.$$

Sukeitę ε ir τ vietomis, tokį pat rezultatą gautume ir tada, kai $0 < \tau \le \varepsilon$.

Analogiškai įrodome

$$\big|M_n(\tau) - M_n(\varepsilon)\big| \le \sum_k \int_{\min(\varepsilon,\tau) \le |x| < \max(\varepsilon,\tau)} |x| dF_{nk}(x) \le$$
$$\le \max(\varepsilon, \tau) \sum_k P\big(\big|X_{nk}\big| \ge \min(\varepsilon, \tau)\big) \to 0. \quad \square$$

3 teorema. *Tarkime, kad sumų S_n pasikirstymo dėsniai konverguoja į neišsigimusį ribinį dėsnį. Ribinis dėsnis yra normalusis ir dydžiai X_{nk} nykstami tada ir tik tada, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$ teisinga* (3) *sąlyga.*

Į r o d y m a s . Pakanka įrodyti, kad iš šios sąlygos ir sumų S_n pasiskirstymų konvergavimo į neišsigimusį ribinį dėsnį išplaukia, jog ribinis dėsnis yra normalusis, nes dydžių nykstamumas yra akivaizdus.

Kadangi nykstamų dydžių suma konverguoja į ribinį dėsnį, tai iš 4.5 teoremos išplaukia, kad Levi spektrinė funkcija $L(x) = 0$, kai $x \neq 0$. Ribinis dėsnis yra neaprėžtai dalus, neišsigimęs. Todėl jis yra normalusis. $\square$

4 teorema. *Dydžiai X_{nk} yra nykstami ir egzistuoja konstantų seka b_n $(n = 1, 2, \ldots,)$ su sąlyga, kad sumų $S_n - b_n$ pasiskirstymai konverguoja į $N(0,1)$, tada ir tik tada, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$ teisinga (1) sąlyga ir kuriam nors $\tau > 0$*

$$D_n(\tau) \to 1.$$

Jei tos sąlygos yra tenkinamos, tai

$$b_n = M_n(H) + o(1);$$

čia H yra bet kuris teigiamas skaičius. Šią lygybę tenkina visos galimos konstantos b_n.

Į r o d y m a s išplaukia iš 4.6 ir šio skyrelio 2 teoremų. $\square$

P a s t a b a . Ši teorema yra teisinga, kai joje žodžius *"kuriam nors $\tau > 0$"* pakeičiame žodžiais *"kiekvienam $\tau > 0$"*.

Pastarosiose teoremose (3) sąlygą galima suformuluoti ir kitaip. Tačiau iš pradžių įrodysime paprastą nelygybę.

2 lema. *Jei skaičiai c_k $(k = 1, \ldots, n)$ tenkina nelygybes $0 \leq c_k \leq 1$, tai*

$$1 - \sum_{k=1}^{n} c_k \leq \prod_{k=1}^{n} (1 - c_k).$$

Į r o d y m a s . Kai $n = 1$, ši nelygybė yra triviali. Tarkime, kad ji teisinga, kai turime n skaičių. Tada

$$1 - \sum_{k=1}^{n+1} c_k \leq \prod_{k=1}^{n} (1 - c_k) - c_{n+1} \leq \prod_{k=1}^{n} (1 - c_k) \cdot (1 - c_{n+1}). \quad \square$$

P a s t a b a. (1) *sąlyga yra ekvivalenti sąlygai*

$$P\big(\max_k |X_{nk}| \geq \varepsilon\big) \to 0.$$

Į r o d y m a s . Pažymėkime

$$p_{nk} = P\big(|X_{nk}| \geq \varepsilon\big).$$

Tada

$$P\big(\max_k |X_{nk}| \geq \varepsilon\big) = 1 - P\big(\max_k |X_{nk}| < \varepsilon\big) =$$
$$= 1 - \prod_k P\big(|X_{nk}| < \varepsilon\big) = 1 - \prod_k (1 - p_{nk}).$$

Mūsų teiginys išplaukia iš nelygybių

$$1 - \exp\Big\{-\sum_k p_{nk}\Big\} \leq 1 - \prod_k (1 - p_{nk}) \leq \sum_k p_{nk}.$$

Pirmoji iš jų gaunama iš nelygybės

$$1 - p_{nk} \leq e^{-p_{nk}},$$

o antroji — iš 2 lemos. $\square$