II SKYRIUS. NEAPRĖŽTAI DALŪS DĖSNIAI

1. APIBRĖŽIMAS IR PAPRASČIAUSIOS SAVYBĖS

Kaip žinome, kelių charakteristinių funkcijų sandauga yra charakteristinė funkcija. Tačiau jei charakteristinė funkcija $f(t)$ yra dviejų funkcijų $f_1(t)$ ir $f_2(t)$ sandauga

$$f(t) = f_1(t) f_2(t),$$

tai tie dauginamieji gali ir nebūti charakteristinės funkcijos. Jei vis dėlto taip yra, tai jos vadinamos charakteristinės funkcijos dalikliais. Šiuo metu turime toli pažengusią charakteristinių funkcijų aritmetiką. Tiesa, ji žymiai skiriasi nuo sveikųjų skaičių aritmetikos. Šiame kurse teks spręsti vieną iš specialių tos teorijos uždavinių.

Charaktristinė funkcija $f(t)$ yra vadinama *neaprėžtai dalia*, jei kiekvienam sveikam teigiamam n ji yra kurios nors charakteristinės funkcijos n-asis laipsnis. Tai reiškia, kad kiekvienam n egzistuoja tokia charakteristinė funkcija $f_n(t)$, kad

$$f(t) = \big(f_n(t)\big)^n.$$

Funkciją $f_n(t)$ vienareikšmiškai apibrėžia funkcija $f(t)$. Jei $f(t) \neq 0$, tai egzistuoja $\ln f(t)$ ir yra baigtinis. Imama pagrindinė logaritmo reikšmė (lygi 0, kai =0). Taip yra nulinio taško aplinkoje. Vėliau pamatysime, kad $f(t) \neq 0$ visiems t. Todėl

$$f_n(t) = e^{(1/n)\ln f(t)}.$$

Atitinkamas pasiskirstymo funkcijas bei atitinkamus atsitiktinius dydžius taip pat vadinsime neaprėžtai daliais. Pasiskirstymo funkcijų atveju tai reiškia, kad tokia funkcija yra n vienodų pasiskirstymo funkcijų sąsūka. Atsitiktinių dydžių atveju toks dydis yra n vienodai pasiskirsčiusių nepriklausomų atsitiktinių dydžių suma.

P a v y z d ž i a i . 1. Imkime *išsigimusį dėsnį*

$$\varepsilon(x-a)=\begin{cases}0, & \text{kai} \quad x\le a,\\ 1, & \text{kai} \quad x>a;\end{cases}$$

čia a yra konstanta. Šio dėsnio charakteristinė funkcija yra e^{iat}. Iš karto matosi, kad ji neaprėžtai dali.

2. *Normaliojo dėsnio* charakteristinė funkcija

$$e^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

yra taip pat neaprėžtai dali.

3. *Puasono dėsnio* charakteristinė funkcija

$$e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

yra neaprėžtai dali. Imkime bendresnę charakteristinę funkciją

$$e^{iat+\lambda(e^{ibt}-1)}$$

(Puasono atsitiktinio dydžio tiesinės transformacijos charakteristinė funkcija). Ir ji yra neaprėžtai dali.

4. *Gama pasiskirstymo* tankio funkcija yra

$$p(x)=\begin{cases}0, & \text{kai} \quad x\le 0,\\ \frac{x^{\alpha}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}, & \text{kai} \quad x>0;\end{cases}$$

čia $\alpha>-1,\ \beta>0$. Jos charakteristinė funkcija

$$(1-\beta it)^{-\alpha}$$

yra neaprėžtai dali.

5. Sakome, kad atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal *neigiamą binominį dėsnį*, jei jis įgyja reikšmes $m = 0, 1, \ldots$ su tikimybėmis

$$P(X = m) = \binom{-v}{m}(-p)^m(1-p)^v = \binom{v+m-1}{m}p^m(1-p)^v;$$

čia $0 < p < 1,\ v > 0$. Jo charakteristinė funkcija

$$\left(\frac{1-p}{1-pe^{it}}\right)^v$$

yra neaprėžtai dali.

6. *Koši pasiskirstymas.* Tai absoliučiai tolydus pasiskirstymas su tankio funkcija

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}.$$

Jo charakteristinė funkcija

$$e^{i\mu t - \lambda|t|}$$

yra neaprėžtai dali.

7. Tirtosios I.6 skyrelyje charakteristinės funkcijos

$$\exp\left\{iat + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2}dK(x)\right\}$$

yra neaprėžtai dalios.

Jei kuris nors pasiskirstymo dėsnis yra neaprėžtai dalus, tai tokie yra ir kiti to tipo dėsniai.

Panagrinėsime neaprėžtai dalių charakteristinių funkcijų savybes. Iš pradžių parodysime, kad tokia funkcija visoje realiųjų skaičių tiesėje nevirsta nuliu. Ši savybė mums labai pravers, nes dažnai teks tokias funkcijas logaritmuoti.

1 lema. *Jei $f(t)$ yra charakteristinė funkcija, tai ir funkcija $|f(t)|^2$ yra charakteristinė.*

Į r o d y m a s . Tarkime, kad $f(t)$ yra atsitiktinio dydžio X charakteristinė funkcija. Imkime atsitiktinį dydį Y, nepriklausomą nuo X ir taip pat pasiskirsčiusį (jis egzistuoja!). Tada

$$f_{X-Y}(t) = f_X(t)f_{-Y}(t) = f(t)f(-t) = f(t)\bar{f}(t) = |f(t)|^2. \quad \square$$

1 teorema. *Neaprėžtai dali charakteristinė funkcija neturi realiųjų šaknų, kitais žodžiais, $f(t) \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$.*

Į r o d y m a s . Tarkime, kad $f(t)$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. Tada kiekvienam natūraliajam n

$$|f_n(t)|^2 = |f(t)|^{2/n}$$

yra taip pat charakteristinė funkcija. Panagrinėkime funkciją

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} |f_n(t)|^2 = \lim_{n\to\infty} |f(t)|^{2/n}.$$

Kadangi $|f(t)| \leq 1$, tai ši riba egzistuoja ir yra lygi 0 arba 1: $g(t) = 1$, kai $f(t) \neq 0$, ir $g(t) = 0$, kai $f(t) = 0$. Funkcija $f(t)$ yra tolydi ir $f(0) = 1$, todėl $f(t) \neq 0$ kurioje nors taško $t = 0$ aplinkoje. Vadinasi, toje pačioje aplinkoje $g(t) = 1$.

Antra vertus, iš charakteristinių funkcijų savybių turime, kad $g(t)$ yra charakteristinė funkcija, nes ji yra charakteristinių funkcijų sekos riba, tolydi taške $t = 0$. Charakteristinė funkcija $g(t)$ turi būti tolydi visoje tiesėje. Kadangi ji gali įgyti tik dvi reikšmes: 1 ir 0, tai ji visur turi būti lygi 1. Iš čia išplaukia, kad $f(t) \neq 0$ visiems $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Išvada. *Jei $f(t)$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija, tai $(f(t))^{1/n} \to 1$, kai $n \to \infty$.*

Į r o d y m a s . Logaritmas $\ln f(t)$ egzistuoja ir yra baigtinis. Todėl $(f(t))^{1/n} = \exp(n^{-1} \ln f(t)) \to 1$, kai $n \to \infty$. $\square$

2 teorema. *Kelių neaprėžtai dalių charakteristinių funkcijų sandauga yra taip pat neaprėžtai dali charakteristinė funkcija.*

Kitaip tariant, neaprėžtai dalių charakteristinių funkcijų klasė yra uždara daugybos atžvilgiu.

Į r o d y m a s . Teoremą pakanka įrodyti tik dviem dauginamiesiems. Tarkime, kad $f(t)$ ir $g(t)$ yra neaprėžtai dalios charakteristinės funkcijos. Kiekvienam natūraliajam n egzistuoja dvi charakteristinės funkcijos $f_n(t)$ ir $g_n(t)$ su sąlyga

$$f(t) = f_n^n(t), \qquad g(t) = g_n^n(t).$$

Iš čia

$$f(t)g(t) = \big(f_n(t)g_n(t)\big)^n.$$

Kadangi dviejų charakteristinių funkcijų sandauga yra taip pat charakteristinė funkcija, tai $f(t)g(t)$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. □

1 išvada. *Jei $f(t)$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija, tai tokia yra ir $|f(t)|$.*

Į r o d y m a s . Aišku, $f(-t)$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. Pagal 2 teoremą $|f(t)|^2$ yra neaprėžtai dali. Todėl kiekvienam natūraliajam n

$$\big(|f(t)|^2\big)^{\frac{1}{2n}} = |f(t)|^{\frac{1}{n}}$$

yra charakteristinė funkcija. □

Pateiksime dar vieną 2 teoremos pritaikymą. Priminsime, kad Laplaso skirstinys yra absoliučiai tolydus su tankio funkcija

$$\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Jo charakteristinė funkcija yra

$$\frac{1}{1+t^2}$$

2 išvada. *Laplaso skirstinys yra neaprėžtai dalus.*

Į r o d y m a s . Laplaso skirstinio charakteristinė funkcija

$$\frac{1}{1+it}\frac{1}{1-it}$$

yra dviejų gama pasiskirstymų charakteristinių funkcijų su parametrais $\beta = 1, \beta = -1$ ir $\alpha = 1$ sandauga. Todėl ji yra neaprėžtai dali. □

3 teorema. *Jei charakteristinė funkcija yra neaprėžtai dalių charakteristinių funkcijų sekos riba, tai ji pati yra neaprėžtai dali.*

Ši teorema yra taip pat uždarumo teorema.

Į r o d y m a s . Tarkime, kad neaprėžtai dalių charakteristinių funkcijų seka $f^{(k)}(t),\ k = 1, 2, \ldots$ (čia viršutinis indeksas yra funkcijų sekos numeris, o ne išvestinė), konverguoja į charakteristinę funkciją $f(t)$:

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(t). \tag{1}$$

Kaip žinome, $|f^{(k)}(t)|^2$ ir $|f(t)|^2$ yra realiosios charakteristinės funkcijos. Imkime bet kurį natūralųjį n. Tada

$$\lim_{k\to\infty} |f^{(k)}(t)|^{2/n} = |f(t)|^{2/n}.$$

Iš charakteristinių funkcijų ribinių teoremų išplaukia, kad $|f(t)|^{2/n}$ yra charakteristinė funkcija; vadinasi, $|f(t)|^2$ yra neaprėžtai dali. Todėl ji neturi realiųjų šaknų. Kadangi $\ln f(t)$ egzistuoja ir yra baigtinis, tai galime apibrėžti n-ąją šaknį

$$f_n(t) = \big(f(t)\big)^{\frac{1}{n}} = \exp\Big\{\frac{1}{n}\ln f(t)\Big\}. \tag{2}$$

Rašome taip pat

$$f_n^{(k)}(t) = \big(f^{(k)}(t)\big)^{\frac{1}{n}} = \exp\Big\{\frac{1}{n}\ln f^{(k)}(t)\Big\}. \tag{3}$$

Iš (1), (2), (3) išplaukia

$$\lim_{k\to\infty} f_n^{(k)}(t) = f_n(t). \tag{4}$$

Pastaroji funkcija yra tolydi taške $t = 0$. Charakteristinės funkcijos $f^{(k)}(t)$ yra pagal prielaidą neaprėžtai dalios; todėl $f_n^{(k)}(t)$ yra taip pat charakteristinės funkcijos. Iš (4) ir charakteristinių funkcijų ribinių teoremų darome išvadą, kad $f_n(t)$ yra taip pat charakteristinė funkcija. Vadinasi, $f(t)$ yra neaprėžtai dali. $\square$

Išvada. *Jei $f(t)$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija, tai kiekvienam teigiamam α tokia yra ir $f^\alpha(t)$.*

Į r o d y m a s . Kiekvienam teigiamam racionaliajam skaičiui p/q laipsnis $f^{p/q}(t)$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. Kadangi galime rasti teigiamų racionaliųjų skaičių seką r_n, konverguojančią į α, tai pagal 3 teoremą $\big(f(t)\big)^{r_n}$ riba $f^\alpha(t)$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. $\square$

P a s t a b a . Jei α_1 ir α_2 yra du neneigiami skaičiai, $\alpha_1+\alpha_2 = 1$, o $F_1(x)$ ir $F_2(x)$ – pasiskirstymo funkcijos, tai $\alpha_1 F_1(x)+\alpha_2 F_2(x)$ yra taip pat pasiskirstymo funkcija. Iš čia išplaukia, kad tas pat teisinga ir charakteristinėms funkcijoms. Vadinasi, jei α_1 ir α_2 yra neneigiami skaičiai, $\alpha_1+\alpha_2 = 1$, o $f_1(t)$ ir $f_2(t)$ — charakteristinės funkcijos, tai ir $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$ yra charakteristinė funkcija.

4 teorema. *Jei $g(t)$ yra charakteristinė funkcija, tai kiekvienam neneigiamam α funkcija $f(t) = \exp\{\alpha(g(t)-1)\}$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija.*

Į r o d y m a s . Tarkime, kad n yra bet kuris natūralusis skaičius, $n > \alpha$. Imame charakteristinę funkciją

$$\Big(1-\frac{\alpha}{n}\Big)\cdot 1 + \frac{\alpha}{n}\cdot g(t).$$

Jos laipsnis

$$\Big(1+\frac{\alpha}{n}\big(g(t)-1\big)\Big)^n$$

taip pat yra charakteristinė funkcija. Tas pats pasakytina ir apie ribą

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{\alpha}{n}\big(g(t) - 1\big)\Big)^n.$$

Iš čia ir iš neaprėžtai dalių charakteristinių funkcijų apibrėžimo išplaukia, kad $f(t)$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. □

Paminėsime be įrodymo dar porą teoremų.

5 (struktūros) teorema. *Charakteristinė funkcija yra neaprėžtai dali tada ir tik tada, kai ji yra Puasono tipo charakteristinių funkcijų sekos riba.*

6 (Finečio) teorema. *Charakteristinė funkcija f(t) yra neaprėžtai dali tada ir tik tada, kai ji yra pavidalo*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \exp\big\{\alpha_n\big(g_n(t) - 1\big)\big\};$$

čia α_n yra teigiami skaičiai, o $g_n(t)$ — charakteristinės funkcijos.

2. NEAPRĖŽTAI DALIŲ CHARAKTERISTINIŲ FUNKCIJŲ KANONINĖ IŠRAIŠKA

Tarkime, kad α yra realusis skaičius, $\Psi(x)$ — nemažėjanti funkcija, apibrėžta visoje tiesėje $\mathbb{R}$. Pažymėkime

$$\psi(t) = \psi(t, \alpha, \Psi) := i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty} v(x,t)\,d\Psi(x);$$

čia

$$v(x,t) := \Big(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\Big)\frac{1+x^2}{x^2}.$$

Pastaroji funkcija nėra apibrėžta taške $x = 0$. Kadangi

$$e^{itx} - 1 = itx - \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{\theta}{6}|tx|^3,\ \ |\theta| \le 1,$$

tai nulinio taško aplinkoje

$$(1)\qquad \begin{aligned} v(x,t) &= \Big(it\frac{x^3}{1+x^2} - \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{\theta}{6}|tx|^3\Big)\frac{1+x^2}{x^2} = \\ &= itx - \frac{1}{2}t^2(1+x^2) + \frac{\theta}{6}|tx^3|(1+x^2) \end{aligned}$$

ir

$$\lim_{x\to 0} v(x,t) = -\frac{1}{2}t^2.$$

Todėl susitarsime laikyti

$$v(0,t) = \lim_{x\to 0} v(x,t) = -\frac{1}{2}t^2.$$

Dabar funkcija $v(x,t)$ yra apibrėžta visiems $x \in \mathbb{R}$ ir yra tolydi x atžvilgiu.

Parodysime, kad integralas $\psi(t)$ egzistuoja visiems $t \in \mathbb{R}$. Iš (1), kai $|x| \leq 1$,

$$|v(x,t)| \leq |t| + t^2 + \frac{1}{3}|t|^3,$$

o kai $|x| > 1$,

$$|v(x,t)| \leq \Big(|e^{itx} - 1| + \frac{|tx|}{1+x^2}\Big)\frac{1+x^2}{x^2} \leq$$

$$\leq \Big(2 + \frac{|tx|}{1+x^2}\Big)\frac{1+x^2}{x^2} = 2\Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big) + \frac{|t|}{|x|} \leq 4 + |t|.$$

Kadangi pointegralinė funkcija yra tolydi ir aprėžta, tai integralas $\psi(t)$ egzistuoja visiems realiesiems t.

Monotoniška funkcija Ψ kiekviename taške x turi ribas $\Psi(x-0)$ ir $\Psi(x+0)$. Tačiau funkcija $\psi(t)$ nepriklauso nuo funkcijos $\Psi(x)$ reikšmių trūkio taškuose; svarbus tik trūkių didumas. Kad būtų konkrečiau, Ψ susitarsime laikyti tolydžia iš kairės visuose taškuose. Taip pat egzistuoja $\Psi(-\infty)$ ir $\Psi(\infty)$. Susitarsime taip pat, kad $\Psi(-\infty) = 0$. Jei būtų kitaip, tai funkciją $\Psi(x)$ galėtume pakeisti funkcija $\Psi(x) - \Psi(-\infty)$. Nuo to integralas nepasikeistų.

1 lema. *Funkcija $e^{\psi(t)}$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija.*

Į r o d y m a s . Pažymėkime

$$e^{\psi(t)} = f_1(t)f_2(t)f_3(t);$$

čia

$$f_1(t) = \exp\left\{i\alpha t - \frac{t^2}{2}\big(\Psi(+0) - \Psi(0)\big)\right\},$$
$$f_2(t) = \exp\Big\{\int_{x>0} v(x,t)d\Psi(x)\Big\},$$
$$f_3(t) = \exp\Big\{\int_{x<0} v(x,t)d\Psi(x)\Big\}.$$

Parodysime, kad $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ yra neaprėžtai dalios charakteristinės funkcijos.

Pirmoji iš jų yra normaliojo dėsnio charakteristinė funkcija (jei $\Psi(x)$ yra tolydi taške $x = 0$, tai ji virsta išsigimusio dėsnio charakteristine funkcija).

Panagrinėsime $f_2(t)$. Paėmę bet kurį $\varepsilon \in (0,1)$, suskaidykime intervalą $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$ taškais

$$\varepsilon = x_{n0} < x_{n1} < \ldots < x_{nk_n} = \frac{1}{\varepsilon}$$

į dalis taip, kad

$$\max_k \big(x_{nk} - x_{n,k-1}\big) \to 0,$$

kai $n \to 0$. Parinkime taškus $y_{nk} \in [x_{n,k-1}, x_{nk}),\ k = 1, \ldots, k_n$. Tada

$$\exp\Big\{\sum_{k=1}^{k_n} v(y_{nk},t)\big[\Psi(x_{nk}) - \Psi(x_{n,k-1})\big]\Big\} =$$
$$= \prod_{k=1}^{k_n} \exp\Big\{-\frac{it}{y_{nk}}\big[\Psi(x_{nk}) - \Psi(x_{n,k-1})\big] +$$
$$+ \big(e^{ity_{nk}} - 1\big)\frac{1+y_{nk}^2}{y_{nk}^2}\big[\Psi(x_{nk}) - \Psi(x_{n,k-1})\big]\Big\}$$

yra apibendrintojo Puasono dėsnio charakteristinių funkcijų sandauga, t.y. neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. Antra vertus, iš Styltjeso integralo apibrėžimo išplaukia, kad tos charakteristinės funkcijos konverguoja į

$$I_\varepsilon(t) = \exp\Big\{ \int_{[\varepsilon,1/\varepsilon)} v(x,t)d\Psi(x)\Big\},$$

kai $n \to \infty$. Vadinasi, $I_\varepsilon(t)$ yra neaprėžtai dalių charakteristinių funkcijų sekos riba. Parodysime, kad ji yra tolydi taške $t = 0$. Kadangi

$$v(x,0) = 0,$$
$$|v(x,t)| \le \Big(|tx| + \frac{|tx|}{1+x^2}\Big)\frac{1+x^2}{x^2} = |t|\frac{x^2+2}{|x|},$$

tai

$$\Big| \int_{[\varepsilon,1/\varepsilon)} v(x,y)d\Psi(x)\Big| \le K|t|$$

su konstanta K, nepriklausančia nuo t. Iš čia išplaukia, kad $I_\varepsilon(t)$ yra tolydi taške $t = 0$. Pagal 1.3 teoremą ji yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija.

Pereidami prie ribos, kai $\varepsilon \to 0$, analogiškai gauname, kad $f_2(t)$ yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija.

Lygiai taip pat įrodome, kad toks pat teiginys teisingas ir funkcijai $f_3(t)$. Lieka pritaikyti 1.2 teoremą. $\square$

Mums prireiks dar kelių funkcijų. Pažymėkime

$$w(x) = \Big(1 - \frac{\sin x}{x}\Big)\frac{1+x^2}{x^2};$$

ji apibrėžta visiems $x \ne 0$. Taške $x = 0$ apibrėšime papildomai

$$w(0) = \lim_{x\to 0} w(x)$$

(vėliau matysime, kad $w(0) = 1/6$). Dar pažymėkime

$$\Lambda(x) = \int_{(-\infty,x)} w(y)d\Psi(y),$$
$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}d\Lambda(x).$$

Parodysime, kad tos funkcijos yra apibrėžtos visiems realiesiems x ir t ir panagrinėsime jų savybes bei ryšius su α, ψ, Ψ. Tam prireiks dviejų lemų.

2 lema. *Visiems realiesiems x teisingos nelygybės*

$$0 < c_1 \le w(x) \le c_2;$$

čia c_1 ir c_2 yra konstantos.

Į r o d y m a s . Dideliems x nelygybės gaunamos tiesiog iš w apibrėžimo. Tarkime, kad $|x| \ge \pi$. Tada

$$\begin{aligned} w(x) &\le \big(1 + \frac{1}{\pi}\big)\big(1 + \frac{1}{\pi^2}\big), \\ w(x) &\ge 1 - \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Mažiems x įrodinėsime kitaip. Išskleidę $\sin x$ eilute, gauname

$$\begin{aligned} w(x) &= \Big(1 + \frac{1}{x^2}\Big) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{(2k+1)!} = \\ &= \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{2k} \Big(\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k+3)!}\Big). \end{aligned}$$

Kai $|x| < \pi$, tai $(k+1)$-ojo ir k-ojo narių santykio absoliutus didumas lygus

$$\frac{x^2}{(2k+4)(2k+5)} \frac{(2k+4)(2k+5) - 1}{(2k+2)(2k+3) - 1}.$$

Šis reiškinys neviršija

$$\frac{\pi^2}{(2k+2)(2k+3) - 1} \le \frac{\pi^2}{19} < 1.$$

Eilutė yra alternuojanti. Todėl

$$\frac{1}{6} \le w(x) \le \frac{1}{6} + x^2 \Big(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\Big) = \frac{1}{6} + \frac{19\pi^2}{120}. \quad \square$$

3 lema. *Funkcijos Λ ir λ apibrėžtos visiems x ir t. Be to,*

$$\Psi(x) = \int_{(-\infty,x)} \frac{d\Lambda(y)}{w(y)},$$
$$\lambda(t) = \psi(t) - \int_0^1 \frac{\psi(t+h)+\psi(t-h)}{2} dh.$$

Tarp funkcijų Ψ ir Λ bei λ ir Λ yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis.

Į r o d y m a s . Iš 2 lemos išplaukia, kad $\Lambda(x)$ apibrėžta visiems x, nemažėjanti ir aprėžta, nes

$$\Lambda(x) \le c_2 \Psi(\infty).$$

Turime

$$\Psi(x) = \int_{(-\infty,x)} \frac{d\Lambda(y)}{w(y)}$$

(priminsime, kad $\Psi(-\infty) = 0$).

Apskaičiuosime integralą

$$\psi(t) - \int_0^1 \frac{\psi(t+h)+\psi(t-h)}{2} dh =$$

$$= \int_0^1 dh \int_{-\infty}^{\infty} \left(v(x,t) - \frac{v(x,t+h)+v(x,t-h)}{2} \right) d\Psi(x).$$

Pointegralinis reiškinys lygus

$$e^{itx} \left(1 - \frac{e^{ihx}+e^{-ihx}}{2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} = e^{itx}(1-\cos hx) \frac{1+x^2}{x^2}$$

(kai $x = 0$, jį apibrėžiame iš tolydumo). Galime integruoti po integralo ženklu h atžvilgiu. Gauname

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} w(x) d\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Lambda(x) = \lambda(t).$$

Atkreipsime dėmesį, kad $\Lambda(x)/\Lambda(\infty)$ yra pasiskirstymo funkcija. Ją atitinka charakteristinė funkcija $\lambda(t)/\Lambda(\infty)$. $\square$

1 (vienaties) teorema. *Tarp funkcijų ψ ir dvejetų (α, Ψ) yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis $\psi \longleftrightarrow (\alpha, \Psi)$.*

P a s t a b a . Todėl dažnai rašoma $\psi = (\alpha, \Psi)$.

Į r o d y m a s . Tiesiog iš funkcijos ψ apibrėžimo išplaukia, kad α ir Ψ vienareikšmiškai nusako ψ. Antra vertus, ψ vienareikšmiškai nusako λ, ši Λ, o pastaroji Ψ. Iš funkcijos ψ apibrėžimo turime, jog ψ ir Ψ vienareikšmiškai nusako skaičių α. $\square$

Panagrinėsime dabar funkcijų e^{ψ} savybes.

2 (konvergavimo) teorema. *Tarkime, kad*

$$\psi_n = (\alpha_n, \Psi_n).$$

a) *Jei $\alpha_n \to \alpha$ ir Ψ_n pilnai konverguoja į Ψ, kai $n \to \infty$, tai*

$$\psi_n \to \psi = (\alpha, \Psi).$$

b) *Jei $\psi_n(t) \to \psi(t)$ ir $\psi(t)$ yra tolydi taške $t = 0$ funkcija, tai egzistuoja tokia reali konstanta α ir tokia aprėžta nemažėjanti funkcija $\Psi(x)$, apibrėžta visoje tiesėje, tolydi iš kairės ir tenkinanti sąlygą $\Psi(-\infty) = 0$, kad $\alpha_n \to \alpha, \Psi_n$ pilnai konverguoja į Ψ ir*

$$\psi = (\alpha, \Psi).$$

Į r o d y m a s . a) Šis teiginys išplaukia iš Helio–Brėjaus teoremos.

b) Antrojo teiginio įrodymas kiek ilgesnis. Tolydi taške $t = 0$ funkcija $e^{\psi(t)}$ yra neaprėžtai dalių charakteristinių funkcijų sekos riba. Todėl ji yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. Iš 1.1 teoremos $e^{\psi(t)} \neq 0$ visiems $t \in \mathbb{R}$. Todėl funkcija $\psi(t)$ yra baigtinė ir $\psi_n(t) \to \psi(t)$ tolygiai kiekviename baigtiniame intervale. Pažymėkime

$$\lambda_n(t) = \psi_n(t) - \int_0^1 \frac{\psi_n(t+h) + \psi_n(t-h)}{2} dh.$$

Šių funkcijų seka konverguoja į funkciją

$$\lambda(t) = \psi(t) - \int_0^1 \frac{\psi(t+h) + \psi(t-h)}{2} dh.$$

Priskirkime funkcijoms $\lambda(t)$ ir $\lambda_n(t)$ funkcijas $\Lambda(x)$ ir $\Lambda_n(x)$:

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Lambda(x),$$
$$\lambda_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Lambda_n(x).$$

Iš charakteristinių funkcijų savybių išplaukia, kad Λ_n silpnai konverguoja į Λ. Kadangi $\lambda_n(0) \to \lambda(0)$ ir

$$\lambda_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Lambda_n(x), \quad \lambda(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Lambda(x),$$

tai $\Lambda_n(-\infty) \to \Lambda(-\infty)$ ir $\Lambda_n(\infty) \to \Lambda(\infty)$. Vadinasi, Λ_n pilnai konverguoja į Λ. Iš lygybių

$$\Psi_n(x) = \int_{(-\infty,x)} \frac{d\Lambda_n(y)}{w(y)}, \quad \Psi(x) = \int_{(-\infty,x)} \frac{d\Lambda(y)}{w(y)},$$

2 lemos ir Helio–Brėjaus teoremos gauname, kad Ψ_n pilnai konverguoja į Ψ. Iš tos pačios Helio–Brėjaus teoremos išplaukia

$$\alpha_n \to \psi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} v(x,t) d\Psi(x)$$

visiems t. Todėl egzistuoja riba $\lim \alpha_n = \alpha$. Iš pirmojo teoremos teiginio gauname

$$\psi = (\alpha, \Psi). \quad \square$$

3 teorema. *Funkcija f yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija tada ir tik tada, kai ją galima parašyti pavidalu* e^{ψ}*; čia* $\psi = (\alpha, \Psi)$*. Atvaizdavimas yra vienareikšmis.*

Į r o d y m a s . 1. Sąlygos pakankamumas buvo įrodytas 1 lemoje.

2. Įrodysime būtinumą. Tarkime, kad f yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija. Pagal 1.1 teoremą $f(t) \neq 0$ visiems t. Imkime jos logaritmą $\ln f(t)$; kaip paprastai, imama pagrindinė logaritmo reikšmė. Pagal neaprėžtai dalios charakteristinės funkcijos apibrėžimą kiekvienam natūraliajam n egzistuoja charakteristinė funkcija $f_n(t)$ su sąlyga $f(t) = f_n^n(t)$. Aišku, kad $f_n(t) \to 1$, kai $n \to \infty$. Todėl

$$\ln f(t) = n \ln f_n(t) = n \ln\Big(1 + \big(f_n(t) - 1\big)\Big) =$$
$$= n\big(f_n(t) - 1\big)\big(1 + o(1)\big) = \lim_{n\to\infty} \Big(n\big(f_n(t) - 1\big)\Big).$$

Pažymėkime F_n pasiskirstymo funkciją, atitinkančią f_n. Gausime

$$\ln f(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n\big(e^{itx} - 1\big) dF_n(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big\{ it \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nx}{1+x^2} dF_n(x) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\Big) n dF_n(x) \Big\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \psi_n(t);$$

čia

$$\psi_n = (\alpha_n, \Psi_n),$$
$$\alpha_n = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF_n(x),$$
$$\Psi_n(x) = n \int_{(-\infty,x)} \frac{y^2}{1+y^2} dF_n(y).$$

Iš 2 teoremos ir sąlygos $\psi_n(t) \to \ln f(t)$ bei funkcijos $\ln f(t)$ tolydumo taške $t = 0$ išplaukia, kad egzistuoja skaičius α ir funkcija Ψ, išsiskiriantys savybėmis $\alpha_n \to \alpha, \Psi_n \to \Psi$ ir $\ln f(t) = (\alpha, \Psi)$. $\square$

Formulė

$$f(t) = \exp\left\{i\alpha t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi(x)\right\}$$

paprastai vadinama *Levi–Chinčino formule*, o funkcija Ψ – *Levi–Chinčino spektrine funkcija.*

P a v y z d ž i a i . 1. *Išsigimusio dėsnio* su charakteristine funkcija e^{iat} atveju

$$\alpha = a, \quad \Psi(x) \equiv 0.$$

2. *Normaliojo dėsnio* su charakteristine funkcija $e^{iat-\sigma^2t^2/2}$ atveju

$$\alpha = a, \quad \Psi(x) = \sigma^2\varepsilon(x).$$

3. *Apibendrintojo Puasono dėsnio* su charakteristine funkcija

$$e^{iat+\lambda\left(e^{ibt}-1\right)}$$

atveju

$$\alpha = a + \frac{b\lambda}{1+b^2}, \quad \Psi(x) = \frac{b^2\lambda}{1+b^2}\varepsilon(x-b).$$

4. *Gama pasiskirstymo* su charakteristine funkcija

$$(1-\beta it)^{-\alpha'}$$

atveju

$$\alpha = \alpha'\int_0^{\infty}\frac{e^{-y/\beta}}{1+y^2},$$

$$\Psi(x) = \varepsilon(x)\alpha'\int_0^{x}\frac{ye^{-y/\beta}}{1+y^2}dy.$$

5. *Neigiamo binominio dėsnio* su charakteristine funkcija

$$\left(\frac{1-p}{1-pe^{it}}\right)^{v}$$

atveju

$$\alpha = v\varepsilon(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^k}{1+k^2},$$

$$\Psi(x) = \varepsilon(x)v\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(1-p)^k}{1+k^2}\varepsilon(x-k).$$

6. *Koši pasiskirstymo* su charakteristine funkcija

$$e^{i\mu t-\lambda|t|}$$

atveju

$$\alpha = \mu, \quad \Psi(x) = \frac{\lambda}{\pi}\arctan x + \frac{\lambda}{2}.$$

Levi–Chinčino formulę parašysime kitu pavidalu. Pažymėkime

$$\sigma^2 = \Psi(+0) - \Psi(0),$$

$$L(x) = \begin{cases} \int_{(-\infty,x)} \frac{1+y^2}{y^2} d\Psi(y), & \text{kai } x < 0, \\ -\int_{(x,\infty)} \frac{1+y^2}{y^2} d\Psi(y), & \text{kai } x > 0. \end{cases}$$

Funkcija L apibrėžta visoje skaičių tiesėje, išskyrus tašką $x = 0$, nemažėja pustiesėse $(-\infty, 0)$ ir $(0, \infty)$ ir tenkina sąlygas: $L(-\infty) = 0$, $L(\infty) = 0$. Ji yra tolydi tuose ir tik tuose taškuose, kuriuose yra tolydi Ψ; visur tolydi iš kairės. Kiekvienam $\delta > 0$

$$\int_{(-\delta,\delta)\setminus\{0\}} x^2 dL(x) < \infty.$$

Antra vertus, neneigiama konstanta σ^2 ir bet kuri funkcija L, turinti ką tik nurodytas savybes, vienareikšmiškai nusako Ψ, taigi ir neaprėžtai dalią charakteristinę funkciją. Galime suformuluoti tokią teoremą.

4 teorema. *Funkcija f yra neaprėžtai dali charakteristinė funkcija tada ir tik tada, kai ją galima parašyti pavidalu*

$$f(t) = \exp\left\{i\alpha t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{(-\infty,\infty)\setminus\{0\}}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)dL(x)\right\};$$

čia: α *– reali konstanta,* σ^2 *– neneigiama konstanta, funkcija* L *nemažėja intervaluose* $(-\infty, 0), (0, \infty)$*, tolydi iš kairės ir*

$$L(-\infty) = 0, \quad L(\infty) = 0, \quad \int_{(-\delta,\delta)\setminus\{0\}} x^2 dL(x) < \infty$$

bet kuriems baigtiniams $\delta > 0$*. Išraiška yra vienareikšmė.*

Ši neaprėžtai dalios charakteristinės funkcijos išraiška vadinama *Levi formule*, o L — *Levi spektrine funkcija.*

P a v y z d ž i a i . Vartosime anksčiau įvestus žymenis.

1. *Išsigimusio dėsnio* atveju

$$\alpha = a, \quad \sigma^2 = 0, \quad L(x) \equiv 0.$$

2. *Normaliojo dėsnio* atveju

$$\alpha = a, \quad \sigma^2 = \sigma^2 (\text{tas pats}), \quad L(x) \equiv 0.$$

Panagrinėsime specialų atvejį, kai

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\Psi(x) < \infty.$$

Tada

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t) d\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi(x) + it \int_{-\infty}^{\infty} x d\Psi(x).$$

Pažymėję

$$a = \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} x d\Psi(x),$$
$$K(x) = \int_{(-\infty,x)} (1+y^2) d\Psi(y),$$

gauname

$$\psi(t) = iat + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2} dK(x).$$

Neaprėžtai dali charakteristinė funkcija e^ψ turi pirmąjį momentą a ir $K(\infty) < \infty$ (pakanka paimti pirmąsias dvi išvestines taške $t = 0$). Atvirkščiai, jei neaprėžtai dali charakteristinė funkcija e^ψ turi antrąjį momentą (tuo pačiu ir pirmąjį), tai

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\Psi(x) < \infty.$$

Taigi aprėžtų dispersijų atveju ribinių dėsnių klasė sutampa su poklasiu neaprėžtai dalių dėsnių, turinčių antruosius momentus.

5 teorema. *Funkcija f yra neaprėžtai dali, turinti baigtinę dispersiją charakteristinė funkcija tada ir tik tada, kai*

$$f(t) = \exp\left\{i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - itx\right)\frac{1}{x^2}dK(x)\right\};$$

čia: γ yra reali konstanta, K — nemažėjanti aprėžta funkcija, tolydi iš kairės ir tenkinanti sąlygą $K(-\infty) = 0$. Atvaizdavimas yra vienintelis. Pointegralinė funkcija laikoma lygia $-t^2/2$, kai $x = 0$.

P a v y z d ž i a i . Vartosime jau anksčiau įvestus žymenis.

1. *Išsigimusio dėsnio* atveju

$$\gamma = a, \quad K(x) \equiv 0.$$

2. *Normaliojo dėsnio* atveju

$$\gamma = a, \quad K(x) = \sigma^2\varepsilon(x).$$

3. *Apibendrintojo Puasono dėsnio* atveju

$$\gamma = a + \frac{\lambda}{b}, \quad K(x) = \lambda b^2\varepsilon(x - b).$$