I SKYRIUS. ĮVADAS

1. PASISKIRSTYMO DĖSNIAI IR CHARAKTERISTINĖS FUNKCIJOS

Iš pradžių priminsime atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos ir charakteristinės funkcijos sąvokas. Atsitiktinio dydžio X reikšmių pasiskirstymą apibūdina jo pasiskirstymo funkcija, arba skirstinys, $F(x) = P(X < x)$. Ji, aišku, apibrėžta visiems realiesiems $x \in \mathbb{R}$. Su atsitiktiniu dydžiu siejama ir jo charakteristinė funkcija

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x),$$

taip pat apibrėžta visiems realiesiems t. Čia integralas suprantamas Lebego–Styltjeso (Henri Leon Lebesgue, 1875–1941; Thomas Jean Stieltjes, 1856–1894) prasme.

Išvardysime kai kurias charakteristinių funkcijų savybes.

1. $f(0) = 1$.
2. Visiems realiesiems t teisinga nelygybė $|f(t)| \leq 1$.
3. $f(t)$ yra tolygiai tolydi visoje realiųjų skaičių tiesėje.
4. Jei funkcija F turi k-ąjį momentą, tai charakteristinė funkcija turi k tolydžių išvestinių, be to, tas momentas yra lygus

$$MX^k = i^{-k} f^{(k)}(0).$$

Atvirkščias teiginys ne visada teisingas. Tačiau: jei $f(t)$ turi k-ąją išvestinę taške $t = 0$, tai visi momentai iki k-osios eilės egzistuoja, kai k yra lyginis, ir iki $(k - 1)$-osios eilės, kai k yra nelyginis. (Šio teiginio įrodymą galima rasti knygoje [12], 22 p.)

5. Jei atsitiktinis dydis X turi s momentų, tai

$$f(t) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(it)^k}{k!} MX^k + \theta \frac{|t|^s}{s!} M|X^s|, \quad |\theta| \leq 1,$$

ir

$$f(t) = \sum_{k=0}^{s} \frac{(it)^k}{k!} MX^k + o(|t|^s),$$

kai $t \to 0$.

6. Jei $f(t)$ yra atsitiktinio dydžio X charakteristinė funkcija, o a ir b – konstantos, tai atsitiktinio dydžio $aX + b$ charakteristinė funkcija yra $e^{ibt} f(at)$.

7. Jei atsitiktiniai dydžiai $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi, o $f_1(t)$, $\ldots, f_n(t)$ – jų charakteristinės funkcijos, tai sumos $X_1 + \ldots + X_n$ charakteristinė funkcija yra sandauga $f_1(t) \ldots f_n(t)$.

8. Tarp pasiskirstymo funkcijų ir charakteristinių funkcijų yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis.

9. Jei pasiskirstymo funkcijų seka $F_1(x), F_2(x), \ldots$ silpnai konverguoja į kurią nors pasiskirstymo funkciją $F(x)$ (kitaip tariant, konverguoja į $F(x)$ jos tolydumo taškuose), tai atitinkamų charakteristinių funkcijų seka $f_1(t), f_2(t), \ldots$ konverguoja į $F(x)$ atitinkančią charakteristinę funkciją. Tas konvergavimas yra tolygus kiekviename baigtiniame intervale.

10. Jei charakteristinių funkcijų seka $f_1(t), f_2(t), \ldots$ visiems t konverguoja į kurią nors funkciją $f(t)$, tolydžią taške $t = 0$, tai $f(t)$ yra charakteristinė funkcija; negana to, tada atitinkamų pasiskirstymo funkcijų seka silpnai konverguoja į $f(t)$ atitinkančią pasiskirstymo funkciją.

11. Jei charakteristinių funkcijų seka $f_1(t), f_2(t), \ldots$ konverguoja į charakteristinę funkciją $f(t)$ ir realiųjų skaičių seka $t_1, t_2, \ldots$ konverguoja į baigtinį skaičių t, tai $f_n(t_n)$ konverguoja į $f(t)$.

Mums ne kartą teks naudotis Helio (Eduard Helly, 1888–1943) bei Helio–Brėjaus (Bray) teoremomis.

1. (Helio kompaktiškumo teorema.) Jei H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ yra seka funkcijų, apibrėžtų realiųjų skaičių tiesėje, nemažėjančių ir aprėžtų

viena konstanta, tai iš tos sekos galima išskirti posekį, konverguojantį į kurią nors nemažėjančią funkciją pastarosios tolydumo taškuose.

2. (Helio–Brėjaus teorema.) Jei $H, H_1, H_2, \ldots$ yra apibrėžtos realiųjų skaičių tiesėje, nemažėjančios ir aprėžtos ta pačia konstanta, be to, seka H_n silpnai konverguoja į funkciją H, tai kiekvienai tolydžiai funkcijai g, tenkinančiai sąlygą $g(\pm\infty) = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dH_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dH(x),$$

kai $n \to \infty$. Jei, be to, $H_n(-\infty) \to H(-\infty)$, $H_n(\infty) \to H(\infty)$ (t.y. seka H_n pilnai konverguoja į H), tai kiekvienai tolydžiai aprėžtai funkcijai g yra teisingas perėjimas prie ribos po integralo ženklu.

Helio–Brėjaus teoremos antrojo teiginio įrodymą galima rasti, pvz., [7], 172–175 p. Pirmojo teiginio įrodymas nedaug skiriasi nuo jo. Jį galima rasti, pvz., knygoje [12].

Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymą, be pasiskirstymo ir charakteristinės funkcijų, nusako taip pat jo indukuotas tikimybinis matas. Tarkime, jog mūsų tikimybinė erdvė yra $\{\Omega, A, P\}$. Kiekvienai Borelio (Emil Borel, 1871–1956) aibei $B \subset \mathbb{R}$ pažymėkime $P_X(B) = P(X \in B) = P(X^{-1}(B))$. Tarp pasiskirstymo funkcijų, charakteristinių funkcijų ir indukuotų tikimybinių matų yra abipusiškai vienareikšmė atitiktis. Iš to trejeto kiekvienas nusako tą pačią matematinę sąvoką, kuri kartais vadinama atsitiktinio dydžio X *dėsniu*, arba *skirstiniu*, ir žymima (X) (nuo lotynų kalbos žodžio *lex* – dėsnis).

Jei $\mathcal{L}(X)$ yra atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo dėsnis, o a ir b – realieji skaičiai, tai visi dėsniai $\mathcal{L}(aX + b)$ sudaro *dėsnių tipą*.

Atsitiktinį dydį X su sąlyga $P(X = a) = 1$ vadiname *išsigimusiuoju*, o jo pasiskirstymo dėsnį ir charakteristinę funkciją – *išsigimusiais*. Tas dėsnis įeina į kiekvieną pasiskirstymo tipą. O visi išsigimusieji dėsniai sudaro vieną tipą.

1 teorema. *Charakteristinė funkcija yra išsigimusi tada ir tik tada, kai jos modulis lygus* 1 *dviem argumento reikšmėms* $h \neq 0$ *ir* $\alpha h \neq 0$, *kurių santykis* α *yra iracionalusis skaičius. Atskiru atveju charakteristinė funkcija* f *yra išsigimusi, jei* $|f(t)| = 1$ *kuriame nors neišsigimusiame intervale.*

Į r o d y m a s . Išsigimusio dėsnio $\mathcal{L}(a)$ charakteristinė funkcija $f(t) = e^{iat}$, t.y. $|f(t)| = 1$. Sąlyga yra būtina.

Įrodysime jos pakankamumą. Jei $|f(h)| = 1$, tai egzistuoja baigtinis skaičius a su sąlyga $f(h) = e^{iah}$. Todėl

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ih(x-a)} dF(x) = 1.$$

Iš čia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bigl(1 - \cos h(x-a)\bigr) dF(x) = 0.$$

Kadangi pointegralinė funkcija yra neneigiama, tai funkcijos F didėjimo taškuose x^* turi būti $\cos h(x^* - a) = 1$. Todėl skirtingiems didėjimo taškams x_1^* ir x_2^* skirtumas $x_1^* - x_2^*$ turi būti $2\pi/h$ kartotinis. Pakeitę h skaičiumi αh, gauname, kad ir $x_1^* - x_2^*$ yra $2\pi/(\alpha h)$ kartotinis. Tačiau tai yra negalima, jei α yra iracionalus. Vadinasi, gali būti tik vienas didėjimo taškas.

Iš čia taip pat išplaukia atskiras atvejis. $\square$

P a s t a b a . Jei $|f(h)| = 1$ kuriam nors $h \neq 0$, tai

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{itx_k}, \ t \in \mathbb{R};$$

čia $p_k \geq 0$ ir

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \ x_k = a + \frac{2\pi}{h} k.$$

Atvirkščias teiginys yra taip pat teisingas.

2. TIPŲ KONVERGAVIMAS

Iš pasiskirstymo ir charakteristinių funkcijų ryšių galime teigti: jei $\mathcal{L}(X_n) \to (X)$, tai bet kuriems $a \neq 0, \ b$ gauname $\mathcal{L}(aX_n + b) \to \mathcal{L}(aX + b)$, nes iš $f_n \to f$ išplaukia, kad

$$e^{ibt} f_n(at) \to e^{ibt} f(at)$$

visiems $t \in \mathbb{R}$. Todėl galime sakyti, kad dėsnių sekos konvergavimas į dėsnį yra iš esmės tipų sekos konvergavimas į tipą. Negana to, jei žinoma dėsnių seka $\mathcal{L}(X_n)$, kuri gali būti ir nekonverguojanti, tai, keisdami koordinačių pradžią arba mastelį kartu su n, galbūt galime gauti konverguojančią seką $\mathcal{L}(a_n X_n + b_n)$. Tas praverčia, kai tiriame nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumas. Atitinkamai normuodami ir centruodami tas sumas, galime rasti ribinius dėsnius. Tuo mes užsiimsime vėliau, o dabar pamėginsime atsakyti į tokį klausimą. Tarkime, žinoma dėsnių seka $\mathcal{L}(X_n)$. Imkime $\mathcal{L}(a_n X_n + b_n)$ pavidalo konverguojančias sekas. Ar jų ribiniai dėsniai priklauso tam pačiam tipui? Į tai atsakys Chinčino (Aleksandr Chinčin, 1894–1959) teorema apie tipų konvergavimą.

1 lema. *Jei f yra charakteristinė funkcija, tai bet kuriam realiajam t*

$$1 - \mathrm{Re} f(2t) \leq 4(1 - \mathrm{Re} f(t)).$$

Į r o d y m a s . Pažymėkime F pasiskirstymo funkciją, atitinkančią f. Teisinga nelygybė

$$\begin{aligned} 1 - \cos 2y = 2\sin^2 y = 2(1-\cos y)(1+\cos y) \leq \\ \leq 4(1 - \cos y). \end{aligned}$$

Imkime lygybės

$$1 - f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx}) dF(x)$$

abiejų pusių realiąsias dalis

$$1 - \mathrm{Re} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) dF(x).$$

Todėl

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{Re} f(2t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos 2tx) dF(x) \leq \\ &\leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) dF(x) = \\ &= 4(1 - \mathrm{Re} f(t)). \quad \square \end{aligned}$$

2 lema. *Bet kuriems realiesiems t, h ir bet kuriai charakteristinei funkcijai f*

$$|f(t) - f(t+h)|^2 \leq 2(1 - \mathrm{Re} f(h)).$$

Į r o d y m a s . Iš Koši (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857) nelygybės

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t+h)|^2 &= \Big| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(1 - e^{ihx}) dF(x) \Big|^2 \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \int_{-\infty}^{\infty} |1 - e^{ihx}|^2 dF(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |1 - e^{ihx}|^2 dF(x). \end{aligned}$$

Tačiau

$$|1 - e^{iy}|^2 = \big(1 - \cos y\big)^2 + \sin^2 y = 2(1 - \cos y).$$

Todėl

$$|f(t) - f(t+h)|^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos hx) dF(x) = 2(1 - \mathrm{Re} f(h)). \quad \Box$$

3 lema. *Jei charakteristinių funkcijų seka $f_n(t)$ konverguoja į 1 intervale $(-T, T)$, tai ji konverguoja į 1 ir visoje realiųjų skaičių tiesėje.*

Į r o d y m a s . Iš nelygybės

$$|f_n(t) - f_n(2t)|^2 \leq 2|1 - \mathrm{Re} f_n(t)|$$

išplaukia, kad $f_n(2t) \to 1$, kai $|t| < T$. Vadinasi, $f_n(t) \to 1$, kai $|t| < 2T$. Lieka pavartoti indukciją. $\Box$

1 (Chinčino) teorema. *Tarkime, kad $X_n (n = 1, 2, \ldots)$ ir X yra atsitiktiniai dydžiai, a_n ir b_n – realieji skaičiai. Jei $\mathcal{L}(X_n)$ konverguoja į neišsigimusį dėsnį $\mathcal{L}(X)$ ir $\mathcal{L}(a_n X_n + b_n)$ taip pat konverguoja į neišsigimusį dėsnį $\mathcal{L}(X^*)$, tada dėsniai $\mathcal{L}(X)$ ir $\mathcal{L}(X^*)$ priklauso* *tam pačiam tipui. Negana to,* $\mathcal{L}(X^*) = \mathcal{L}(aX+b)$*, jei* $|a_n| \to |a|$*; jei* $a_n > 0$*, tai* $a_n \to a,\ b_n \to b$*.*

Tačiau kiekvienam baigtiniam b *ir kiekvienai sekai dėsnių* $\mathcal{L}(X_n)$ *egzistuoja skaičiai* $a_n \neq 0$ *ir* b_n *su sąlyga* $\mathcal{L}(a_nX_n + b_n) \to (b)$*.*

Vadinasi, turint seką dėsnių ir pakeitus pradžią, mastelį bei orientaciją, riboje galima gauti ne daugiau kaip vieną išsigimusį tipą. Tai parodo, kad išsigimęs tipas gali būti traktuojamas kaip kiekvieno tipo "išsigimusioji dalis".

Į r o d y m a s . Įrodysime pirmąją teoremos dalį.

Pažymėkime dydžių $X, X^*, X_n, X_n^* := a_nX_n + b_n$ charakteristines funkcijas atitinkamai $f,\ f^*,\ f_n,\ f_n^*$. Teisinga lygybė

$$f_n^*(t) = e^{ib_nt} f_n(a_nt).$$

Iš sekos a_n visada galime išskirti konverguojantį posekį a_{n_k}; jo riba a gali būti baigtinis skaičius arba $\pm\infty$.

Jei būtų $a = 0$, tai iš charakteristinių funkcijų tolygaus konvergavimo kiekviename baigtiniame intervale gautume

$$|f^*(t)| = \lim_{n_k\to\infty} |f_{n_k}^*(t)| = \lim_{n_k\to\infty} |f_{n_k}(a_{n_k}t)| = |f(0)| = 1.$$

Pagal 1.1 teoremą iš čia išplauktų, kad f^* yra išsigimusi, o tai prieštarautų mūsų prielaidai.

Tarkime dabar, kad $a_{n_k} \to \pm\infty$. Tada

$$|f(t)| = \lim_{n_k\to\infty} |f_{n_k}(t)| = \lim_{n_k\to\infty} \left| f_{n_k}^*\left(\frac{t}{a_{n_k}}\right)\right| = |f^*(0)| = 1.$$

Išeitų, kad f yra išsigimusi. Tas vėl prieštarautų mūsų prielaidai. Vadinasi, $a_{n_k} \to a$, kuris yra baigtinis ir nelygus 0.

Antra vertus, visiems t, pakankamai artimiems 0, tolydžios funkcijos $f(at)$ ir $f^*(t)$ nelygios 0, nes jos lygios 1, kai $t = 0$. Todėl

$$e^{ib_{n_k}t} = \frac{e^{ib_{n_k}t} f_{n_k}(a_{n_k}t)}{f_{n_k}(a_{n_k}t)} \to \frac{f^*(t)}{f(at)} \neq 0,$$

kai $n_k \to \infty$. Pagal 3 lemą ta riba egzistuoja ir visiems $t \in \mathbb{R}$. Todėl egzistuoja riba

$$b_{n_k} \to b = \frac{1}{it} \ln \frac{f^*(t)}{f(at)}.$$

Vadinasi,

$$f^*(t) = e^{ibt} f(at).$$

Lieka įrodyti, kad $|a_n| \to |a|$. Tarkime, kad konverguojantiems posekio a_{n_k} posekiams $a_{n_r} \to a'$ ir $a_{n_s} \to a''$. Tada $b_{n_r} \to b'$, $b_{n_s} \to b''$. Gauname

$$e^{ib't} f(a't) = e^{ib''t} f(a''t).$$

Pakeitus $a't$ skaičiumi t ir a''/a' skaičiumi c, kiekvienam t galioja $|f(t)|^2 = |f(ct)|^2$. Skaičių c galime parinkti taip, kad $|c| \leq 1$. Parodysime, kad $|c| = 1$. Jei būtų $|c| < 1$, tai, pakartotinai keisdami t skaičiumi $|ct|$, gautume

$$|f(t)|^2 = |f(ct)|^2 = \ldots = \lim |f(c^n t)|^2 = 1.$$

Iš čia išplauktų, kad f yra išsigimusi, o to negali būti.

Lieka įrodyti antrąjį teiginį. Paėmę skaičius c_n tokius didelius, kad būtų

$$P(|X_n| \geq c_n) < \frac{1}{n} \to 0,$$

gautume

$$P\left(\frac{|X_n|}{nc_n} \geq \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \to 0.$$

Iš karto išplaukia, kad

$$\mathcal{L}\left(\frac{X_n}{nc_n}\right) \to \mathcal{L}(0),$$

iš čia

$$\mathcal{L}\left(b + \frac{X_n}{nc_n}\right) \to \mathcal{L}(b). \quad \square$$

Pastebėsime, kad apsiriboję tik ”teigiamais” tipais, būtume gavę $a_n \to a,\ b_n \to b$. Tai paliekame panagrinėti patiems skaitytojams.

3. BERNULIO EKSPERIMENTAI

Pirmosios ribinės teoremos buvo rastos nagrinėjant Bernulio eksperimentus. Tarkime, turime nepriklausomų vienodų eksperimentų se-ką. Atlikus kiekvieną eksperimentą, gali įvykti kuris nors įvykis su tikimybe p arba neįvykti su tikimybe $q = 1 - p$. Pažymėkime S_n įvykio įvykimų skaičių, atlikus n eksperimentų. Trivialumams išvengti tarkime, jog $0 < p < 1$. Nagrinėkime atsitiktinius dydžius X_k, nusakytus taip: $X_k = 1$, jei įvykis įvyksta, ir $X_k = 0$, jei jis neįvyksta. Tada

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad (n = 1, 2, \cdots);$$

čia X_k yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Kadangi $MX_k = p,\ MX_k^2 = p$, tai $DX_k = p - p^2 = pq$ ir

$$MS_n = \sum_{k=1}^{n} MX_k = np,$$
$$DS_n = \sum_{k=1}^{n} DX_k = npq.$$

Pirmoji tikimybių teorijos ribinė teorema buvo paskelbta 1713 metais. Ji teigia, jog S_n/n konverguoja pagal tikimybę į p, t.y. kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \to 0,$$

kai n tolsta į begalybę. Jos įrodymą rado J. Bernulis (Jacob Bernoulli, 1654–1705), tirdamas tikimybes

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Tikslindami tą analizę, A. de Muavras (Abraham de Moivre, 1667 –1754) atveju $p = 1/2$, o vėliau P. S. Laplasas (Pierre Simon Laplace, 1749–1827) bendru atveju gavo, kad

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy, \quad -\infty \leq x \leq \infty.$$

Pastarojoje formulėje konvergavimo greitis, kai tikimybė p maža, yra lėtas. S. D. Puasonas (Simeone Denis Poisson, 1781–1840) modifikavo Bernulio schemą, leisdamas tikimybei $p = p_n$ priklausyti nuo bandymų skaičiaus n, tačiau taip, kad $np_n \to \lambda > 0$. Pažymėję X_{nk} ir S_{nn} vietoje X_k ir S_n, matome, kad Puasono atvejis atitinka seką sumų

$$S_{nn} = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Čia kiekvienam n dėmenys X_{nk} yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę,

$$P(X_{nk} = 1) = \frac{\lambda}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Nagrinėdamas šias binomines tikimybes, S. D. Puasonas įrodė, kad

$$P(S_{nn} = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Tokiu būdu buvo rasti trys pagrindiniai pasiskirstymo dėsniai.

1^o. *Išsigimęs dėsnis* $\mathcal{L}(0)$, kurį atitinkanti pasiskirstymo funkcija turi tik vieną didėjimo tašką $x = 0$ ir kurio charakteristinė funkcija tapatingai lygi 1.

2^o. *Normalusis dėsnis* $\mathcal{N}(0, 1)$ su pasiskirstymo funkcija

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big) dy$$

ir charakteristine funkcija

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(itz - \frac{z^2}{2}\Big) dz = \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big).$$

3^o. *Puasono dėsnis* $\mathcal{P}(\lambda)$, kurio pasiskirstymo funkcija yra

$$F(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!},$$

o charakteristinė funkcija

$$f(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)};$$

čia $[x]$ reiškia skaičiaus x sveikają dalį, t. y. didžiausią sveiką skaičių, neviršijantį x.

P. S. Laplasas ir S. D. Puasonas savo dėsnius įrodė gana kruopščiais skaičiavimais. Charakteristinių funkcijų metodu jie gaunami labai paprastai.

1 lema. *Kiekvienam sveikam neneigiamam n ir kiekvienam realiajam y*

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} + \theta \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!} \quad |\theta| \leq 1.$$

Lema buvo įrodyta pagrindiniame tikimybių teorijos kurse ([7], antrojo leidimo 181–182 p.).

2 lema. *Jei z yra kompleksinis skaičius, $|z| \leq 1/2$, tai*

$$|\ln(1+z) - z| \leq |z|^2.$$

Ir ši lema buvo įrodyta pagrindiniame tikimybių teorijos kurse ([7], antrojo leidimo 205 p.)

1 teorema. *Bernulio schemos atveju*

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n - MS_n}{n}\right) \to \mathcal{L}(0),$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s . Taikysime charakteristinių funkcijų metodą. Tarkime, kad $|t| \leq T$; čia T yra bet kuris fiksuotas teigiamas skaičius.

Iš 1 ir 2 lemų gauname

$$M\exp\left(it\frac{S_n-np}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n}M\exp\left(it\frac{X_k-p}{n}\right)=$$
$$=\left(p\exp\left(\frac{itq}{n}\right)+q\exp\left(-\frac{itp}{n}\right)\right)^n=$$
$$=\left(p\left(1+\frac{itq}{n}+\theta\frac{T^2q^2}{2n^2}\right)+q\left(1-\frac{itp}{n}+\theta\frac{T^2p^2}{2n^2}\right)\right)^n=$$
$$=\left(1+\frac{B}{n^2}\right)^n\to 1. \quad \square$$

Čia ir toliau visur θ reiškia dydį, ne visada tą patį, tačiau moduliu neviršijantį 1, o B – dydį, kuris moduliu neviršija konstantos.

2 teorema. *Bernulio schemos atveju*

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n-MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right)\to\mathcal{N}(0,1),$$

kai $n\to\infty$.

Į r o d y m a s . Kaip ir 1 teoremos įrodyme, taikysime charakteristinių funkcijų metodą.

$$M\exp\left(it\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\right)=\prod_{k=1}^{n}M\exp\left(it\frac{X_k-p}{\sqrt{npq}}\right)=$$
$$=\left(p\exp\left(\frac{itq}{\sqrt{npq}}+q\exp\left(\frac{-itp}{\sqrt{npq}}\right)\right)\right)^n=$$
$$=\left(p\left(1+\frac{itq}{\sqrt{npq}}-\frac{t^2q}{2np}+\theta\frac{T^3q^{3/2}}{6n^{3/2}p^{3/2}}\right)+\right.$$
$$\left.+q\left(1-\frac{itp}{\sqrt{npq}}-\frac{t^2p}{2nq}+\theta\frac{T^3p^{3/2}}{n^{3/2}q3/2}\right)\right)^n=$$
$$=\left(1-\frac{t^2}{2n}+\frac{BT^3}{n^{3/2}}\right)^n\to\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad \square$$

3 teorema. *Bernulio schemos atveju*

$$\mathcal{L}(S_{nn}) \to \mathcal{P}(\lambda),$$

kai $n \to \infty$.

Į r o d y m a s . Vėl vartojame charakteristines funkcijas:

$$\begin{aligned} M\exp(itS_{nn}) &= \prod_{k=1}^{n} M\exp(itX_{nk}) = \\ &= \big(p_n\exp(it) + q_n\big)^n = \\ &= \left(1 + \frac{\lambda}{n}\big(\exp(it) - 1\big) + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)^n \to \\ &\to \exp\Big(\lambda\big(e^{it} - 1\big)\Big). \quad \square \end{aligned}$$

Remiantis šiomis trimis ribinėmis teoremomis, buvo išskirti trys pirmieji ribinių dėsnių tipai.

1^o. Išsigimęs tipas išsigimusių dėsnių $\mathcal{L}(a)$ su charakteristine funkcija $f(t) = e^{iat}$.

2^o. Normalusis tipas normaliųjų dėsnių $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ su charakteristine funkcija

$$f(t) = \exp\left(iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right);$$

3^o. Puasono tipas Puasono dėsnių $P(\lambda, a, b)$ su charakteristine funkcija

$$f(t) = \exp\Big(iat + \lambda\big(e^{ibt} - 1\big)\Big).$$

Mūsų įrodytąsias teoremas galima apibendrinti, pasinaudojus teorema apie tipų konvergavimą.

4. PIRMIEJI BENDRESNI REZULTATAI

Po pirmųjų teoremų apie Bernulio eksperimentus ilgą laiką, net iki 1935 metų, buvo apsiribojama dar gana specialiais ribiniais dėsniais: konvergavimu į $\mathcal{L}(0)$ (kada teisingas didžiųjų skaičių dėsnis) ir konvergavimu į normalųjį dėsnį $\mathcal{N}(0,1)$. Klasikinę problemą galima formuluoti taip.

Tarkime,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių X_k suma. Reikia rasti sąlygas, kada

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n - MS_n}{n}\right) \to \mathcal{L}(0), \quad \mathcal{L}\left(\frac{S_n - MS_n}{DS_n}\right) \to \mathcal{N}(0,1).$$

Pirmuoju atveju turi egzistuoti dėmenų X_k vidurkiai, antruoju – dispersijos. Kad suprastintume užrašymą, dėmenis centruosime jų vidurkiais. Centruotų dydžių vidurkiai yra 0, o dispersijos sutampa su pirmykščių dydžių dispersijomis. Todėl šiame skyrelyje laikysime $MX_k = 0,\ MS_n = 0$. Žymėsime

$$f_k(t) = Me^{itX_k},\ \sigma_k^2 = DX_k,\ B_n^2 = DS_n.$$

Taip pat susitarsime atmesti trivialų atvejį, kai visi dėmenys yra išsigimę.

Iš pradžių panagrinėsime atvejį, kai dėmenys yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę.

1 teorema. *Jei dėmenys yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, turi vidurkius, tai*

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{n}\right) \to \mathcal{L}(0).$$

Į r o d y m a s . Jei f yra dėmenų charakteristinė funkcija, tai S_n/n charakteristinė funkcija pagal 3.1 ir 3.2 lemas

$$M\exp\left(it\frac{S_n}{n}\right) = \left(f\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n =$$
$$= \left(1 + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \to 1. \quad \square$$

2 teorema. *Jei dėmenys yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę ir turi dispersijas, tai*

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{B_n}\right) \to \mathcal{N}(0,1).$$

Į r o d y m a s . Kadangi $B_n^2 = n\sigma_1^2 > 0$, tai vėl pagal 3.1 ir 3.2 lemas

$$\begin{aligned} M\exp\left(it\frac{S_n}{B_n}\right) &= \left(f\left(\frac{t}{B_n}\right)\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{\sigma_1^2}{2B_n^2}t^2 + o\left(\frac{\sigma_1^2}{B_n^2}t^2\right)\right)^n = \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \to \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Atsisakysime prielaidos, kad atsitiktiniai dydžiai yra vienodai pasiskirstę. Iš pradžių panagrinėsime paprastą atvejį.

3 teorema. *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai X_k yra nepriklausomi, turi antruosius momentus ir*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} MX_k^2 \to 0.$$

Tada

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{n}\right) \to \mathcal{L}(0).$$

Į r o d y m a s . Pagrindiniame tikimybių teorijos kurse šią teoremą įrodėme, pasinaudoję Bjenemė–Čebyšovo (Jules Bienaymé, 1796–1878; Pafnutij Čebyšov, 1821–1894) nelygybe. Dabar įrodysime ją charakteristinių funkcijų metodu. Turime

$$f_k(t) = 1 + \theta\frac{1}{2}t^2 MX_k^2, \quad |\theta| \le 1.$$

Iš čia, jei $|t| \le T$,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln f_k\left(\frac{t}{n}\right) = B\frac{T^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} M|X_k|^2 \to 0,$$

kai $n \to \infty$. $\square$.

Išvada. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_k yra nepriklausomi, aprėžti ir centruoti vidurkiais, tai*

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{n}\right) \to \mathcal{L}(0),$$

kai $n \to \infty$.

4 teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_k yra nepriklausomi, turi trečiuosius momentus ir*

$$\frac{1}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n} M|X_k|^3 \to 0,$$

tai

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{B_n}\right) \to \mathcal{N}(0,1).$$

Į r o d y m a s . Kadangi

$$f_k(t) = 1 - \frac{t^2}{2}\sigma_k^2 + \frac{\theta}{6}t^3 M|X_k|^3,$$

tai

$$\sum_{k=1}^{n} \ln f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) = -\frac{t^2}{2} + B\frac{T^3}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n} M|X_k|^3 \to -\frac{t^2}{2}. \quad \square$$

Išvada. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_k yra nepriklausomi, aprėžti ir $B_n \to \infty$, tai*

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{B_n}\right) \to \mathcal{N}(0,1).$$

Į r o d y m a s . Jei $|X_k| \le c$, tai

$$\frac{1}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n} M|X_k|^3 \le \frac{c}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n} MX_k^2 = \frac{c}{B_n} \to 0. \quad \square$$

Tarkime, kad turime seką serijų atsitiktinių dydžių X_{nk} ($k = 1, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots$) ir dydžiai kiekvienoje serijoje yra nepriklausomi. Pažymėkime

$$S_{nn} = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}, \ \ B_{nn} = \sum_{k=1}^{n} DX_{kn}.$$

Tegul dydžiai yra centruoti vidurkiais. Teisingos teoremos.

5 teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_{nk} turi antruosius momentus ir*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} MX_{nk}^2 \to 0,$$

tai

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_{nn}}{n}\right) \to \mathcal{L}(0).$$

Į r o d y m a s toks pat kaip ir 3 teoremos, tik reikia indeksus k pakeisti dvigubais indeksais nk. $\square$

6 teorema. *Jei atsitiktiniai dydžiai X_{nk} turi trečiuosius momentus ir*

$$\frac{1}{B_{nn}^3}\sum_{k=1}^{n} M|X_{nk}|^3 \to 0,$$

tai

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_{nn}}{B_{nn}}\right) \to \mathcal{N}(0, 1).$$

Į r o d y m a s toks pat kaip ir 4 teoremos. $\square$

5. KLASIKINĖ RIBINĖ TEOREMA

4 skyrelio teoremose buvo reikalaujama, kad egzistuotų momentai aukštesnės eilės, negu reikia patiems teiginiams formuluoti. Mėginsime susilpninti tuos reikalavimus.

Iš pradžių įrodysime keletą pagalbinių teiginių.

1 lema. *Jei dydžiai X_n konverguoja į X pagal tikimybę, tai jų atitinkamos pasiskirstymo funkcijos F_{X_n} konverguoja į dydžio X pasiskirstymo funkciją F_X jos tolydumo taškuose.*

Į r o d y m a s . Bet kuriems realiesiems x, x'

$$\{X < x'\} = \{X_n < x,\ X < x'\} \cup \{X_n \geq x,\ X < x'\} \subset$$
$$\subset \{X_n < x\} \cup \{X_n > x,\ X < x'\},$$

todėl

$$P(X < x') \leq F_{X_n}(x) \leq F_{X_n}(x) + P(X_n \geq x,\ X < x').$$

Kadangi $X_n \to X$ pagal tikimybę, tai, kai $x' < x$,

$$P(X_n \geq x,\ X < x') \leq P(|X_n - X| \leq x - x') \to 0,$$

vadinasi,

$$F_X(x') \leq \liminf F_{X_n}(x),$$

kai $x' < x$. Analogiškai, sukeitę vietomis X ir X_n, x ir x', gautume

$$\limsup F_{X_n}(x) \leq F_X(x''),$$

kai $x < x''$. Todėl, kai $x' < x < x''$,

$$F_X(x') \leq \liminf F_{X_n}(x) \leq \limsup F_{X_n}(x) \leq F_X(x'').$$

Jei x yra F tolydumo taškas, tai, leidę $x' \uparrow x$ ir $x'' \downarrow x$, gauname

$$F_X(x) = \lim F_{X_n}(x). \quad \square$$

2 lema. *Jei* $X_n - X'_n$ *konverguoja pagal tikimybę į* 0 *ir* $F_{X'_n}(x)$ *konverguoja į* $F_X(x)$ *pastarosios tolydumo taškuose, tai ir* $F_{X_n}(x)$ *konverguoja į* $F_X(x)$ *jos tolydumo taškuose.*

Į r o d y m a s . Įrodoma taip pat kaip ir 1 lemą, tik imama X'_n vietoje X ir x', x'' laikoma funkcijos F_X tolydumo taškais. $\square$

3 lema. *Jei* $X_n - X'_n$ *konverguoja pagal tikimybę į* 0 *arba* $P(X_n \neq X'_n) \to 0$ *ir* $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$, *tai ir* $\mathcal{L}(X'_n) \to \mathcal{L}(X)$.

Į r o d y m a s išplaukia iš 2 lemos. $\square$

Mums prireiks dar kai kurių žinių. Sakysime, kad atsitiktinis dydis X yra *simetriškas* (nulio atžvilgiu), jei $P(X \leq x) = P(X \geq -x)$ visiems x, t.y. $F(x+0) = 1 - F(-x)$. Su tokiais dydžiais kartais patogiau operuoti. Jų charakteristinės funkcijos yra realios. Kiekvienam atsitiktiniam dydžiui X galima priskirti vadinamąjį *simetrizuotą* atsitiktinį dydį $X^s = X - X'$; čia X' yra nepriklausomas nuo X atsitiktinis dydis, tačiau turįs tą patį pasiskirstymą.

4 lema. *Jei* f *yra atsitiktinio dydžio* X *charakteristinė funkcija, tai simetrizuoto dydžio* X^s *charakteristinė funkcija yra* $|f|^2$.

Į r o d y m a s . Turime

$$f_{X-X'}(t) = f_X(t) f_{-X'}(t) = f(t)\bar{f}(t) = |f(t)|^2. \quad \square$$

Atsitiktinius dydžius dažnai tenka centruoti. Tam tinka atsitiktinio dydžio vidurkis. Tačiau jis ne visada egzistuoja. Todėl vartojama *mediana*, kuri visada egzistuoja. Visada galima rasti bent vieną baigtinį skaičių μX su sąlyga

$$P(X \leq \mu X) \geq \frac{1}{2}, \ P(X \geq \mu X) \geq \frac{1}{2}.$$

5 lema. *Kiekvienam* $\varepsilon > 0$ *teisinga nelygybė*

$$\frac{1}{2} P(X - \mu X \geq \varepsilon) \leq P(X^s \geq \varepsilon)$$

ir

$$\frac{1}{2}P(|X-\mu X|\geq\varepsilon)\leq P(|X^s|\geq\varepsilon).$$

Į r o d y m a s . Kadangi $X^s = X - X'$ (čia X ir X' yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę), tai medianą $\mu = \mu X$ atitinka lygi mediana $\mu = \mu X'$ ir

$$\begin{aligned}P(X^s\geq\varepsilon) &= P((X-\mu)-(X'-\mu)\geq\varepsilon)\geq\\ &\geq P(X-\mu\geq\varepsilon,\ X'-\mu\leq 0)=\\ &= P(X-\mu\geq\varepsilon)\ P(X'-\mu\leq 0)\geq\\ &\geq\frac{1}{2}P(X-\mu\geq\varepsilon).\end{aligned}$$

Tai įrodo pirmąją nelygybę. Pakeiskime joje X dydžiu $-X$. Iš abiejų nelygybių išplauktų antroji lemos nelygybė. $\square$

1 teorema. *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai turi pirmuosius momentus, kurie lygūs* 0*. Teisingas teiginys:*

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{n}\right)\to\mathcal{L}(0) \tag{2}$$

tada ir tik tada, kai

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geq n}dF_k(x)\to 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<n}x\,dF_k(x)\to 0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{|x|<n}x^2dF_k(x)-\left(\int_{|x|<n}x\,dF_k(x)\right)^2\right)\to 0. \tag{5}$$

Į r o d y m a s . Pažymėkime

$$X_{nk}=\begin{cases}\mathrm{X}_k, & \text{jei } |X_k|<n,\\ 0, & \text{jei } |X_k|\geq n;\end{cases}$$

$$S_{nn} = \sum_{k=1}^{n} X_{nk}.$$

Tada (3), (4), (5) sąlygas galime perrašyti

$$\sum_{k=1}^{n} P\big(|X_{nk}| \geq n\big) \to 0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M|X_{nk}|\text{ö}0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_{nk} \to 0, \tag{8}$$

kai $n \to \infty$.

1^o. P a k a n k a m u m a s . Tarkime, kad teiginiai (6), (7), (8) teisingi. Pagal (8) iš 4.5 teoremos gauname

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_{nn} - MS_{nn}}{n}\right) \to \mathcal{L}(0).$$

Iš (7) sąlygos išplaukia, kad

$$\frac{1}{n} MS_{nn} \to 0.$$

Pagal 3 lemą

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_{nn}}{n}\right) \to \mathcal{L}(0).$$

Iš (6) sąlygos gauname, kad

$$P\left(\frac{S_{nn}}{n} \neq \frac{S_n}{n}\right) \to 0.$$

Pagal 3 lemą (2) teiginys yra teisingas.

2^o. B ū t i n u m a s . Tarkime, (2) teiginys teisingas. Įrodysime, kad tada teisingi (6), (7) ir (8) teiginiai.

Teiginys (2) yra ekvivalentus teiginiui, kad S_n/n konverguoja į 0 pagal tikimybę, arba teiginiui, kad

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{t}{n}\right) \to 1$$

tolygiai kiekviename baigtiniame intervale. Tarkime, n yra pakankamai didelis, kad $\ln|\varphi_n(t)|$ būtų aprėžtas intervale $[-T, T]$. Iš 5 ir 7 lemų gauname

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P\left(\left|\frac{X_k - \mu X_k}{n}\right| \geq \frac{1}{T}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P\left(\left|\frac{X_k^s}{n}\right| \geq \frac{1}{T}\right) \leq$$
$$\leq -\frac{7}{T}\int_0^T \ln|\varphi_n(t)|^2 dt \to 0.$$

Kadangi

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1}$$

konverguoja pagal tikimybę į 0, tai $\mu X_n/n \to 0$. Todėl iš mūsų įrodyto sąryšio, kai $T > 1$, išplaukia (6). Iš čia išplaukia $\mathcal{L}(S_{nn}/n) \to \mathcal{L}(0)$. Pagal 7 lemos pirmąją nelygybę

$$2\sum_{k=1}^{n} D\left(\frac{X_{nk}}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} D\left(\frac{X_{nk}^s}{n}\right) \leq -3\ln|\varphi_n(1)|^2 \to 0.$$

Vadinasi, (8) teiginys teisingas. Pagal 4.3 teoremą

$$\frac{S_{nn} - MS_{nn}}{n}$$

konverguoja į 0 pagal tikimybę. Todėl

$$\frac{MS_{nn}}{n} = \frac{S_{nn}}{n} - \frac{S_{nn} - MS_{nn}}{n} \to 0.$$

(7) teiginys taip pat teisingas. $\square$

Atkreipsime dėmesį, kad nereikalavome vidurkio egzistavimo ir centravimo.

Panagrinėsime normalųjį ribinį dėsnį.

6 lema. Teisingos nelygybės

$$\begin{aligned} &1-\cos y \le \frac{y^2}{2}, \ \textit{kai}\ y \in \mathbb{R},\\ &1-\cos y \ge \frac{11}{24}y^2, \ \textit{kai}\ |y| \le 1,\\ &1-\frac{\sin y}{y} > \frac{1}{7}, \ \textit{kai}\ |y| \ge 1. \end{aligned}$$

Į r o d y m a s . Imkime nelygybę

$$\left|e^{iy}-1-iy\right| \le \frac{y^2}{2}.$$

Reiškinio po modulio ženklu realioji dalis taip pat tenkina tą nelygybę:

$$\left|\cos y - 1\right| \le \frac{y^2}{2}.$$

Iš alternuojančių eilčių savybių išplaukia

$$\begin{aligned} 1-\cos y = 1-\Big(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\dots\Big) \ge \\ \ge \frac{y^2}{2}\Big(1-\frac{y^2}{12}\Big) \ge \frac{11}{24}y^2, \end{aligned}$$

kai $|y| \le 1$.

Įrodysime trečiąją nelygybę. Pažymėkime $h(y) = 1-\sin y/y$. Kai $|y| \ge 7/6$,

$$h(y) > 1-\frac{1}{\frac{7}{6}} = \frac{1}{7}.$$

Tarkime, kad $1 \le |y| < 7/6$. Turime

$$h(y) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{y^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Ši eilutė yra alternuojanti. Todėl

$$h(y) > \frac{y^2}{6}\left(1 - \frac{y^2}{20}\right) > \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\left(\frac{7}{6}\right)^2}{20}\right) > \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}.$$

$\square$

P a s t a b a . Buvo galima buvo parodyti, kad $h(y) > 1 - \sin y = 0.158... > 1/7$, kai $|y| \geq 1$.

7 lema. *Jei F yra pasiskirstymo funkcija, o f – ją atintinkanti charakteristinė funkcija, tai teigiamiems u*

$$\int_{|x|<1/u} x^2 dF(x) \leq \frac{3}{u^2}\big(1 - \mathrm{Re} f(u)\big),$$

$$\int_{|x|\geq 1/u} dF(x) \leq \frac{7}{u}\int_0^u \big(1 - \mathrm{Re} f(t)\big) dt.$$

Jei u yra pakankamai artimas 0, tai antrojoje nelygybėje $1 - \mathrm{Re} f(t)$ galime pakeisti $-\ln \mathrm{Re} f(t)$.

Į r o d y m a s . Turime

$$1 - \mathrm{Re} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx) dF(x). \tag{1}$$

Kadangi pointegralinė funkcija yra neneigiama, tai pagal 6 lemos 2 nelygybę gauname

$$1 - \mathrm{Re} f(u) \geq \int_{|x|<1/u} (1 - costx) dF(x)) \geq$$

$$\geq \frac{11u^2}{24}\int_{|x|<1/u} x^2 dF(x).$$

Pirmoji nelygybė įrodyta.

Antrajai įrodyti integruojame (1) abi puses pagal t nuo 0 iki u ir dalijame iš u ir pritaikome 6 lemos trečiąją nelygybę:

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\int_0^u \big(1-\mathrm{Re}f(t)\big)dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(1-\frac{\sin ux}{ux}\Big)dF(x) \geq \\ &\geq \int_{|x|\geq 1/u}\Big(1-\frac{\sin ux}{ux}\Big)dF(x) \geq \\ &\geq \frac{1}{7}\int_{|x|\geq 1/u} dF(x).\end{aligned}$$

Iš žinomos nelygybės $1+v \leq e^v$, teisingos visiems realiesiems v, gauname $1-a \leq -\ln a$, kai $a > 0$. Todėl mūsų įrodomos lemos teiginys yra teisingas. $\square$

Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kurių pasiskirstymo funkcijos yra $F_1, F_2, \ldots$, charakteristinės funkcijos $f_1, f_2, \ldots$ Sakykime, kad atsitiktiniai dydžiai yra centruoti vidurkiais (o pastarieji egzistuoja). Dispersijas (kai jos egzistuoja) žymėsime $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$, o jų sumą

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

Pačių atsitiktinių dydžių sumą žymėsime

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

2 teorema.

$$\mathcal{L}\Big(\frac{S_n}{B_n}\Big) \to \mathcal{N}(0,1) \tag{6}$$

ir

$$\max_{k\leq n} \frac{\sigma_k}{B_n} \to 0 \tag{7}$$

tada ir tik tada, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\Lambda_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geq \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) \to 0 \tag{8}$$

Pakankamumą įrodė V. Lindebergas (Jarl Waldemar Lindeberg, 1876–1932), būtinumą – V. Feleris (William Feller, 1906–1970). Pirmąją dalį jau nagrinėjome pagrindiniame tikimybių teorijos kurse.

Į r o d y m a s . 1^o. P a k a n k a m u m a s . Tarkime, kad teisinga (8) sąlyga. Egzistuoja tokia pakankamai lėtai mažėjanti seka $\varepsilon_n \downarrow 0$, kad

$$\frac{1}{\varepsilon_n^2} \Lambda_n(\varepsilon_n) \to 0$$

ir tuo labiau

$$\frac{1}{\varepsilon_n} \Lambda_n(\varepsilon_n) \to 0, \ \Lambda_n(\varepsilon_n) \to 0.$$

Šiam teiginiui įrodyti pakanka nagrinėti tokią seką $n_k \uparrow \infty$, kad

$$\Lambda_n\Big(\frac{1}{k}\Big) < \frac{1}{k^3},$$

kai $n \geq n_k$, o po to

$$\varepsilon_n = \frac{1}{k},$$

kai $n_k \leq n < n_{k+1}$.

Gausime nelygybę

$$\max_{k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{B_n^2} \leq \max_{k \leq n} \frac{1}{B_n^2} \int_{|x| \geq \varepsilon_n B_n} x^2 dF_k(x) + \varepsilon_n^2 \leq$$

$$\leq \Lambda_n(\varepsilon_n) + \varepsilon_n^2 \to 0.$$

Pažymėkime $X_{nk} = X_k$ arba 0 priklausomai nuo to, ar $|X_k| < \varepsilon_n B_n$, ar $|X_k| \geq \varepsilon_n B_n$. Kadangi

$$P\Big(\frac{S_{nn}}{B_n} \neq \frac{S_n}{B_n}\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} P(X_{nk} \neq X_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geq \varepsilon_n B_n} dF_k(x) \leq \frac{1}{\varepsilon_n^2} \Lambda_n(\varepsilon_n) \to 0,$$

tai pagal 3 lemą pakanka įrodyti, kad

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_{nn}}{B_n}\right) \to \mathcal{N}(0,1).$$

Kadangi X_k yra centruoti vidurkiais, tai

$$|MX_{nk}| = \left| \int_{|x| < \varepsilon_n B_n} x dF_k(x) \right| = \left| \int_{|x| \geq \varepsilon_n B_n} x dF_k(x) \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon_n B_n} \int_{|x| \geq \varepsilon_n B_n} x^2 dF_k(x).$$

Todėl

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} |MX_{nk}| \leq \frac{\Lambda_n(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \to 0.$$

Pažymėję $B_{nn}^2 = DS_{nn}$, gauname

$$1 - \frac{B_{nn}^2}{B_n^2} = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geq \varepsilon_n B_n} x^2 dF_k(x) + \frac{1}{B_n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} |MX_{nk}| \right)^2 \leq$$
$$\leq \Lambda_n(\varepsilon_n) + \frac{\Lambda_n^2(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2} \to 0.$$

Todėl pakanka parodyti, kad

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_{nn} - MS_{nn}}{B_{nn}}\right) \to \mathcal{N}(0,1).$$

‘ Tačiau tai išplaukia iš teiginių

$$\frac{1}{B_{nn}^3} \sum_{k=1}^{n} M|X_{nk} - MX_{nk}|^3 = \frac{2\varepsilon_n B_n}{B_{nn}^3} \sum_{k=1}^{n} M\big(X_{nk} - MX_{nk}\big)^2 \leq$$
$$= 2\varepsilon_n \frac{B_n}{B_{nn}} \to 0.$$

2^o. B ū t i n u m a s . Tarkime, teiginiai (7) ir (8) teisingi. Turime

$$f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) = 1 - \theta_k \frac{T^2}{2}\frac{\sigma_k^2}{B_n^2}.$$

Iš čia pagal (8)

$$\max_{k\le n}\left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) - 1\right| \to 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) - 1\right|^2 \to 0.$$

Todėl pakankamai dideliems n egzistuoja $\ln f_k(t/B_n)$ ir

$$M\exp\left(it\frac{S_n}{B_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \to \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

galima parašyti pavidalu

$$\sum_{k=1}^{n}\ln f_k\left(\frac{t}{B_n}\right) \to -\frac{t^2}{2}.$$

Kadangi $\ln z = z - 1 + \theta|z-1|^2,\ |\theta| \le 1$, kai $|z-1| \le 1/2$, tai

$$\left|\frac{t^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(1 - f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right)\right| \to 0.$$

Pereidami prie realiųjų dalių, gauname

$$\frac{t^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<\varepsilon B_n}\left(1 - \cos\frac{tx}{B_n}\right)dF_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\ge\varepsilon B_n}\left(1 - \cos\frac{tx}{B_n}\right)dF_k(x) + o(1).$$

Kadangi pagal 7 lemą

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<\varepsilon B_n} \left(1 - \cos \frac{tx}{B_n}\right) dF_k(x) \le \frac{t^2}{2B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) =$$
$$= \frac{t^2}{2B_n^2} \left(B_n^2 - \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x)\right) =$$
$$= \frac{t^2}{2}\big(1 - \Lambda_n(\varepsilon)\big)$$

ir

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge\varepsilon B_n} \left(1 - \cos \frac{tx}{B_n}\right) dF_k(x) \le 2 \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge\varepsilon B_n} dF_k(x) \le$$
$$\le \frac{2}{\varepsilon^2 B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\ge\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) \le \frac{2}{\varepsilon^2},$$

tai

$$\frac{t^2}{2}\Lambda_n(\varepsilon) \le \frac{2}{\varepsilon^2} + o(1).$$

Imdami formulėje

$$0 \le \Lambda_n(\varepsilon) \le \frac{2}{t^2}\left(\frac{2}{\varepsilon^2} + o(1)\right),$$

iš pradžių $n \to \infty$, o po to $t \to \infty$, gauname, kad $\Lambda_n(\varepsilon) \to 0$. O tai ir reikėjo įrodyti. □

6. APRĖŽTŲJŲ DISPERSIJŲ ATVEJIS

Dar daugiau apibendrinsime gautąsias ribines teoremas. Metodiniais sumetimais iš pradžių panagrinėsime specialią atsitiktinių dydžių klasę. Iš čia paaiškės, kaip reikia elgtis bendresniais atvejais.

Nagrinėsime seką serijų atsitiktinių dydžių

$$X_{n1}, \ldots, X_{nk_n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

laikydami kiekvienos serijos atsitiktinius dydžius nepriklausomais. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai tenkina sąlygą (A):

1^o. Jie turi dispersijas DX_{nk}.

2^o. $MX_{nk} = 0$.

3^o. $\max_{k \le k_n} DX_{nk} \to 0$, kai $n \to \infty$.

4^o. $\sum_{k=1}^{n} DX_{nk} \le c$; čia c – baigtinė konstanta.

Antroji iš tų sąlygų nėra esminė. Vietoje dydžių X_{nk} galėtume nagrinėti dydžius $X_{nk} - MX_{nk}$.

Susitarsime dydžių X_{nk} pasiskirstymo funkcijas žymėti F_{nk}, o charakteristines funkcijas — f_{nk}.

Sumos

$$S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n}$$

charakteristinė funkcija yra $f_{n1}(t) \ldots f_{nk_n}(t)$. Jei tos funkcijos nevirsta nuliu, tai galima kalbėti apie šio reiškinio logaritmą. Sandauga virs suma. Kai teisinga sąlyga (A) ir n pakankamai didelis, tai iš tikrųjų yra galima. Pažymėkime

$$\tau_n(t) = \sum_k \big(f_{nk}(t) - 1\big).$$

1 (palyginimo) lema. *Jei teisinga sąlyga* (A)*, tai* $\ln f_{nk}(t)$ *visiems* t *egzistuoja ir yra baigtinis, kai* $n \ge n_t$*; be to,*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \ln f_{nk}(t) - \tau_n(t) \to 0$$

kiekvienam fiksuotam t*, kai* $n \to \infty$*.*

P a s t a b a . Užuot tyrę logaritmų sumą, galime nagrinėti paprastesnę sumą $\tau_n(t)$. Iš čia ir lemos pavadinimas.

Į r o d y m a s . Kadangi atsitiktinių dydžių X_{nk} vidurkiai yra 0, tai

$$f_{nk}(t) = 1 - \frac{\theta_{nk}}{2} t^2 DX_{nk}, \quad |\theta_{nk}| \le 1.$$

Todėl

$$\max_k \left| f_{nk}(t) - 1 \right| \le \frac{t^2}{2} \max_k DX_{nk} \to 0,$$

kai $n \to \infty$, ir

$$\sum_k \left| f_{nk}(t) - 1 \right| \le \frac{t^2}{2} \sum_k DX_{nk} \le \frac{ct^2}{2}.$$

Pakankamai dideliems $n \ge n_t$

$$\left| f_{nk}(t) - 1 \right| \le \frac{1}{2}.$$

Vadinasi, $\ln f_{nk}(t)$ egzistuoja ir yra baigtinis. Be to, iš nelygybės

$$|\ln(1+z) - z| \le |z|^2,$$

teisingos, kai kompleksinis skaičius z tenkina nelygybę $|z| \le 1/2$, išplaukia

$$\begin{aligned} \ln f_{nk}(t) &= \ln\Big(1 + \big(f_{nk}(t) - 1\big)\Big) = \\ &= f_{nk}(t) - 1 + \theta'_{nk} \left| f_{nk}(t) - 1 \right|^2, \quad |\theta'_{nk}| \le 1. \end{aligned}$$

Iš čia

$$\begin{aligned} &\Big| \sum_k \ln f_{nk}(t) - \tau_n(t) \Big| \le \sum_k \left| f_{nk}(t) - 1 \right|^2 \le \\ &\le \max_k \left| f_{nk}(t) - 1 \right| \cdot \sum_k \left| f_{nk}(t) - 1 \right| \le \\ &\le \frac{ct^2}{2} \max_k \left| f_{nk}(t) - 1 \right| \to 0, \end{aligned}$$

kai $n \to \infty$. $\square$

Parašysime funkciją $\tau_n(t)$ kitu pavidalu. Kadangi $MX_{nk} = 0$, tai

$$\tau_n(t) = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \big(e^{itx} - 1\big) dF_{nk}(x) =$$

$$= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \big(e^{itx} - 1 - itx\big) dF_{nk}(x).$$

Pažymėkime

$$K_n(x) = \sum_k \int_{-\infty}^{x} y^2 dF_{nk}(y).$$

Iš sąlygos (A) išplaukia, kad K_n yra apibrėžta visiems $x \in \mathbb{R}$, nemažėjanti, tolydi iš kairės ir

$$K_n(-\infty) = 0, \quad K_n(\infty) \leq c < \infty.$$

Dabar funkciją $\tau_n(t)$ galėsime parašyti pavidalu

$$\tau_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(e^{itx} - 1 - itx\big) \frac{1}{x^2} dK_n(x).$$

Pointegralinis reiškinys taške $x = 0$ nėra apibrėžtas. Susitarsime, kad jis tame taške lygus

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} = -\frac{t^2}{2}.$$

Tada pointegralinis reiškinys yra tolydi funkcija visoje tiesėje.

Toliau raidėmis K ir τ su indeksais arba be jų susitarsime žymėti funkcijas

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(e^{itx} - 1 - itx\big) \frac{1}{x^2} dK(x);$$

čia $K(x)$ yra tolydi iš kairės, nemažėjanti funkcija, $K(-\infty) = 0$, $K(\infty) \leq c$. Visada $\tau(0) = 0$.

2 lema. *Funkcija $\tau(t)$ yra tolydi, du kartus diferencijuojama. Jos išvestinės*

$$\tau'(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} \big(e^{itx} - 1\big) \frac{1}{x} dK(x),$$

$$\tau''(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dK(x).$$

Į r o d y m a s . Mums pravers Lebego (Henri Leon Lebesgue, 1875–1941) teorema apie perėjimą prie ribos po integralo ženklu ir nelygybės

$$\left|e^{iu}-1\right| \leq |u|, \quad \left|e^{iu}-1-iu\right| \leq \frac{u^2}{2},$$

teisingos visiems realiesiems u. Imkime

$$\tau(t+h)-\tau(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{itx}\big(e^{ihx}-1\big)-ihx\Big)\frac{1}{x^2}dK(x).$$

Pointegralinės funkcijos pirmasis dauginamasis moduliu

$$\begin{aligned}&\leq \left|e^{itx}ihx-ihx\right|+\frac{1}{2}h^2x^2=\\&=\left|e^{itx}-1\right||hx|+\frac{1}{2}h^2x^2\leq |hx||tx|+\frac{1}{2}h^2x^2.\end{aligned}$$

Iš Lebego teoremos išplaukia, kad $\tau(t+h)-\tau(t)\to 0$, kai $h\to 0$. Tirkime dabar

$$\frac{\tau(t+h)-\tau(t)}{h}=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{itx}\frac{e^{ihx}-1}{h}-ix\Big)\frac{1}{x^2}dK(x).$$

Pointegralinė funkcija moduliu $\leq |t|+|h|/2$. Remdamiesi Lebego teorema, vėl galime pereiti prie ribos po integralo ženklu. Gausime, kad egzistuoja funkcijos τ išvestinė ir kad ji lygi

$$\tau'(t)=i\int_{-\infty}^{\infty}\big(e^{itx}-1\big)\frac{1}{x}dK(x).$$

Vėl imkime

$$\frac{\tau'(t+h)-\tau'(t)}{h}=i\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{e^{ihx}-1}{h}\frac{1}{x}dK(x).$$

Pointegralinė funkcija moduliu ≤ 1. Todėl egzistuoja antroji išvestinė

$$\tau''(t)=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dK(x). \quad \square$$

Mums dar prireiks specialaus tipo charakteristinių funkcijų. Jei atsitiktinis dydis pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį, t.y. įgyja reikšmes $k = 0, 1, \ldots$ ir k įgyja su tikimybe $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$, tai jo charakteristinė funkcija, kaip žinome, yra

$$e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Dydžio $aX + b$ charakteristinė funkcija yra

$$\exp\Big\{ibt + \lambda\big(e^{iat} - 1\big)\Big\}.$$

Ji vadinama *apibendrintojo Puasono dėsnio* charakteristine funkcija. Visos tos funkcijos priklauso vienam tipui.

3 lema. *Kiekviena funkcija e^{τ} yra charakteristinė. Ją atitinkąs atsitiktinis dydis turi antrąjį momentą. To dydžio vidurkis lygus* 0, *o dispersija lygi* $K(\infty) = -\tau''(0)$.

Į r o d y m a s. Imkime intervalą $[-N, N)$. Suskaidykime jį taškais

$$-N = x_{n0} < x_{n1} < \ldots < x_{nk_n} = N.$$

Pažymėkime

$$\lambda_{nk} = \frac{1}{x_{nk}^2}\Big(K(x_{nk}) - K(x_{n,k-1})\Big), \quad b_{nk} = -\lambda_{nk} x_{nk}, \quad a_{nk} = x_{nk}$$

ir sudarykime reiškinius

$$\exp\Big\{\sum_k \big[itb_{nk} + \lambda_{nk}\big(e^{ita_{nk}} - 1\big)\big]\Big\}.$$

Kiekvienas toks reiškinys yra Puasono tipo charakteristinių funkcijų sandauga, taigi charakteristinė funkcija. Kai $n \to \infty$, jis konverguoja į

$$\exp\Big\{\int_{[-N,N)} \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} dK(x)\Big\}.$$

Pastaroji funkcija yra tolydi taške $t = 0$, todėl ji yra charakteristinė.

Imkime dabar $N \to \infty$. Riba bus e^τ. Tai vėl bus charakteristinė funkcija, nes ji yra tolydi taške $t = 0$.

Lengva suskaičiuoti, kad

$$\left(e^{\tau(t)}\right)'\Big|_{t=0} = e^{\tau(t)}\tau'(t)\ |_{t=0} = 0,$$

$$\left\{e^{\tau(t)}\right\}''\Big|_{t=0} = \left[e^{\tau(t)}(\tau'(t))^2 + e^{\tau(t)}\tau''(t)\right]_{t=0} =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} dK(x) = -K(\infty). \quad \square$$

4 (vienaties) lema. *Funkcija τ vienareikšmiškai nusako K, ir atvirkščiai.*

Į r o d y m a s . Kadangi

$$-\tau''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dK(x), \quad K(-\infty) = 0, \quad K(\infty) < \infty$$

ir K tik pastoviu daugikliu skiriasi nuo pasiskirstymo funkcijos, tai iš charakteristinių funkcijų savybių išplaukia, jog $-\tau''(t)$ vienareikšmiškai nusako K. Atvirkščias teiginys yra trivialus. $\square$

5 lema. *Kiekviena funkcija e^τ yra atsitiktinių dydžių, tenkinančių sąlygą (A), ribinio dėsnio charakteristinė funkcija.*

Į r o d y m a s . Tarkime, $X_{nk} (k = 1, \ldots, n)$ yra vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, kurių charakteristinė funkcija yra $e^{\tau/n}$. Kadangi funkciją τ/n atitinka K/n, tai $DX_{nk} = K(\infty)/n$ ir $MX_{nk} = 0$. Sumos $S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nn}$ charakteristinė funkcija yra e^τ. Sąlyga (A) yra tenkinama. $\square$

6 (konvergavimo) lema. *Tarkime, sąlyga (A) yra tenkinama. Jei funkcijos K_n silpnai konverguoja į K, tai $\tau_n \to \tau$. Atvirkščiai, jei $\tau_n \to \ln f$, tai K_n silpnai konverguoja į K.*

Į r o d y m a s . Pirmasis teiginys išplaukia iš Helio–Brėjaus teoremos. Įrodysime atvirkščią teiginį. Kadangi dydžiai $K_n(\infty)$ yra tolygiai aprėžti, tai iš kompaktiškumo teoremos išplaukia, jog egzistuoja seka K_{n_k}, silpnai konverguojanti į kurią nors funkciją K su sąlyga $K(\infty) \leq c$. Todėl $\tau_{n_k} \to \tau = \ln f$. Iš vienaties lemos gauname, kad $\tau = \ln f$ vienareikšmiškai nusako K. Vadinasi, K_n turi silpnai konverguoti į K. Jei taip nebūtų, tai iš K_n būtų galima išskirti posekį, konverguojantį į K^*, kuris nesutaptų su K. $\square$

Iš šių lemų išplaukia tokia ribinė teorema.

1 teorema. *Tarkime, atsitiktiniai dydžiai X_{nk} tenkina sąlygą (A). Tada sumų S_n ribinių pasiskirstymų klasė sutampa su klase dėsnių, kurių charakteristinė funkcija yra pavidalo*

$$e^{\tau} = \exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - itu\right) \frac{1}{u^2} dK(u) \right\};$$

čia K yra tolydi iš kairės, nemažėjanti funkcija, $K(-\infty) = 0,\ K(\infty) \leq c < \infty$.

Sumos S_n pasiskirstymo funkcija silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją, atitinkančią charakteristinę funkciją e^{τ} su K, tada ir tik tada, kai

$$K_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{(-\infty,u)} y^2 dF_{nk}(y)$$

silpnai konverguoja į K. Jei sąlygą

$$\sum_{k=1}^{k_n} DX_{nk} \leq c < \infty$$

pakeistume sąlyga

$$\sum_{k=1}^{k_n} DX_{nk} \to DX < \infty,$$

tai K_n silpną konvergavimą į K reiktų pakeisti pilnuoju K_n konvergavimu į K.

Į r o d y m a s . Pirmasis teiginys išplaukia iš 5, palyginimo ir konvergavimo lemų.

Iš čia ir iš konvergavimo lemos išplaukia antrasis teiginys. Specialusis atvejis gaunamas iš

$$K_n(\infty) = \sum_{k=1}^{k_n} DX_{n_k} \to DX = K(\infty). \quad \square$$

Praplėsime įrodytąją teoremą. Iki šiol darėme prielaidą, kad $MX_{nk} = 0$. Tačiau lengva jos atsisakyti. Pažymėkime

$$\begin{aligned} &a_{nk} = MX_{nk}, \\ &\hat{F}_{nk}(x) = F_{nk}(x + a_{nk}), \\ &\hat{f}_{nk}(t) = e^{-ita_{nk}} f_{nk}(t). \end{aligned}$$

Tada įrodytieji rezultatai tinka taip pat, tik reikia F_{nk} ir f_{nk} visur pakeisti funkcijomis $\hat{F}_{nk}, \hat{f}_{nk}$. Gauname ribinių dėsnių klasę su charakteristinėmis funkcijomis

$$(1) \qquad \exp\left\{iat + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - itu\right) \frac{1}{u^2} dK(u)\right\} = e^{\tau}.$$

Ribinio dėsnio vidurkis yra a. Funkcija τ vienareikšmiškai nusako a ir K, ir atvirkščiai. Konvergavimo lemoje sąlygą "K_n silpnai konverguoja į K" reikia papildyti sąlyga "$a_n \to a$". Tą patį reikia padaryti ribinėje teoremoje: imti

$$a_n = \sum_{k=1}^{k_n} a_{nk}$$

ir F_{nk} pakeisti funkcija $\hat{F}_{nk}$. Gausime tokią teoremą.

2 teorema. *Jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai X_{nk} tenkina sąlygą (A) be 2^o teiginio, tai sumų S_n ribinių pasiskirstymų klasė sutampa su klase dėsnių, kurių charakteristinės funkcijos yra* (1) *pavidalo; čia K yra nemažėjanti, tolydi iš kairės funkcija, $K(-\infty) = 0, K(\infty) \leq c < \infty$.*

Sumos S_n pasiskirstymo funkcija silpnai konverguoja į dėsnį su charakteristine funkcija (1) *tada ir tik tada, kai*

$$K_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{(-\infty,u)} y^2 dF_{nk}(y + a_{nk})$$

silpnai konverguoja į K,

$$\sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} \to a.$$

Jei sąlygą

$$\sum_{k=1}^{k_n} DX_{nk} \leq c < \infty$$

pakeistume sąlyga

$$\sum_{k=1}^{k_n} DX_{nk} \to DX < \infty,$$

tai silpnąjį K_n konvergavimą į K reiktų pakeisti pilnuoju K_n konvergavimu į K. $\square$

Panagrinėsime porą atskirų atvejų.

K o n v e r g a v i m a s   į   n o r m a l ų j į   d ė s n į . Normalųjį dėsnį $\mathcal{N}(0,1)$ atitinka funkcija

$$K(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq 0, \\ 1, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$$

3 teorema (konvergavimo į normalųjį dėsnį kriterijus). *Tarkime, $X_{n1}, \ldots, X_{nk_n}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turį dispersijas, $MX_{nk} = 0$,*

$$\sum_{k=1}^{k_n} DX_{nk_n} = 1$$

kiekvienam n. Jei šios sąlygos yra tenkinamos, tai S_n pasiskirstymo dėsniai konverguoja į

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

$$\max_k \ DX_{nk} \to 0 \tag{2}$$

tada ir tik tada, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\Lambda_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \to 0. \tag{3}$$

Į r o d y m a s . Standartinį normalųjį dėsnį $\mathcal{N}(0,1)$, kaip matėme, atitinka funkcija

$$K(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } u \leq 0, \\ 1, & \text{kai } u > 0, \end{cases}$$

ir funkcija $\tau(t) = -t^2/2$. Jei dydžiai X_{nk} tenkina sąlygą (A), tai sumų S_n pasiskirstymo dėsniai konverguoja į $\mathcal{N}(\prime, \infty)$ tada ir tik tada, kai

$$K_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{(-\infty, u)} y^2 dF_{nk}(y) \to K(u),$$

kitaip tariant, teisinga (3) sąlyga.

1. Tarkime, kad dydžiai X_{nk} tenkina teoremos sąlygą (A) ir (3). Tada

$$\max_k \ DX_{nk} = \max_k \int_{-\infty}^{\infty} y^2 dF_{nk(y)} \leq$$
$$\leq \varepsilon^2 + \max_k \int_{|x| \geq \varepsilon} y^2 dF_{nk}(y) \leq \varepsilon^2 + \Lambda_n(\varepsilon).$$

Vadinasi, tenkinama (2) sąlyga, kartu dydžiai X_{nk} tenkina sąlygą (A). Iš 1 teoremos išplaukia, kad S_n ribinis dėsnis yra $\mathcal{N}(0,1)$.

2. Tarkime, dydžiai X_{nk} tenkina teoremos sąlygas bei (2). Jei S_n pasiskirstymo dėsniai konverguoja į $\mathcal{N}(0,1)$, tai pagal 1 teoremą teisinga (3) sąlyga. $\square$

K o n v e r g a v i m a s į P u a s o n o d ė s n į . Puasono dėsnį atitinka

$$\tau(t) = i\lambda t + \lambda\big(e^{it} - 1 - it\big) = \lambda\big(e^{it} - 1\big)$$

su

$$K(u) = \begin{cases} 0, & \text{kai } u \le 1, \\ \lambda, & \text{kai } u > 1. \end{cases}$$

Iš 2 teoremos išplaukia tokia teorema.

4 teorema (konvergavimo į Puasono dėsnį kriterijus). *Tarkime, X_{nk} $(k = 1, \dots, k_n)$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turį dispersijas, ir*

$$\max_k \ DX_{nk} \to 0, \qquad \sum_{k=1}^{k_n} DX_{nk} \to \lambda.$$

Tada sumų S_n pasiskirstymo dėsniai konverguoja į Puasono dėsnį su parametru λ tada ir tik tada, kai kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1| \ge \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x + a_{nk}) \to 0,$$

kai $n \to \infty$; čia $a_{nk} = MX_{nk}$.

Nagrinėjome specialią atsitiktinių dydžių klasę, kai tenkinama sąlyga (A). Bendruoju atveju dispersijos gali ir neegzistuoti, gali nebūti ir vidurkių. Tačiau ir tada galima elgtis panašiai, tik bus papildomų sunkumų. Užuot centravę atsitiktinius dydžius vidurkiais, centruojame juos vadinamaisiais nupjautiniais vidurkiais. Anksčiau apibrėžtos funkcijos K_n gali neturėti savybės $K_n(\infty) \le c < \infty$. Todėl nebus galima taikyti Helio teoremos. Dėl tos priežasties jas teks pakeisti funkcijomis

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{(-\infty,x)} \frac{y^2}{1+y^2} d\hat{F}_{nk}(y);$$

čia $\hat{F}_{nk}$ bus pasiskirstymo funkcija atsitiktinio dydžio X_{nk}, centruoto nupjautiniais vidurkiais. Gausime ribinius dėsnius, kurių charakteristinės funkcijos bus sudėtingesnės.

Ši bendresnė teorija buvo sukurta daugelio matematikų pastangomis. Minėtinos A. Kolmogorovo (Andrej Kolmogorov, 1903–1987), P. Levi (Paul Lévy, 1886–1971), B. de Finečio (Bruno de Finetti), G. Bavlio, A. Chinčino, J. Marcinkievičiaus (Józef Marcinkiewicz, 1910–1940), B. Gnedenkos (Boris Gnedenko, 1912–1996), V. Dioblino (Waldemar Doeblin) pavardės. Galutinę formą rezultatams suteikė B. Gnedenka.