Iš Lietuvos matematikos istorijos – 1

Jonas Kubilius

ANTANAS BARANAUSKAS IR MATEMATIKA

Matematikos ir informatikos institutas
Vilnius – 2001

TURINYS

Jonas Kubilius
Antanas Baranauskas ir matematika

SL 217. 2001.06.01. Apimtis 6 apsk.l. Tiražas 800 egz. Užsakymas Nr. 1248
Leido Matematikos ir informatikos institutas, Akademijos 4, LT–2600 Vilnius
Spausdino UAB „Mokslo aidai“, Goštauto 12, LT–2600 Vilnius

TURINYS

PRATARMĖ

Kiekvienas moksleivis žino Antaną Baranauską (1835–1902) buvus talentingu poetu, kurio nemirtingasis „Anykščių šilelis“ puošia mūsų poeziją. Kalbininkai prisimena jį tyrinėjus lietuvių kalbą. Tūlas muzikas pasakys jį komponavus dvasinių giesmių melodijas. Žinoma, jog domėjosi liaudies medicina, rinko vaistinguosius augalus. Ir nedaug kas girdėjo jį buvus ir matematiku, atidavusiu šiai mokslo šakai daugiau kaip dešimtį įtempto darbo metų.

Atrodytų, tolimos viena nuo kitos veiklos sritys. Tačiau tarp jų yra daug bendra. Kalbotyra yra ar tik ne tiksliausia tarp visų humanitarinių mokslų. Lenkų kalbininkas Janas Boduenas de Kurtenė (Jan Baudouin de Courtenay, 1845–1929) Baranausko kalbiniuose tyrinėjimuose įžvelgė jo dovaną matematiškai mintyti. Muzikos harmonijos taisyklės dvelkia matematika. O matematika išreiškia ne tik tiesą, bet ir griežto tobulumo grožį, kuris gali pasireikšti tik aukščiausiame mene. Matematikos uždavinio sprendimo struktūra neretai dvelkia dailumu, veikiančiu protą ir sielą, panašiai, kaip klasikinės simfonijos garsai.

Prancūzų poetas Polis Valery (Paul Valéry, 1871–1945) rašė: „Aš ne matematikos specialistas, o tik jos gerbėjas, nevykėlis, įsimylėjęs pačią gražiausią iš mokslinių disciplinų“. O žymusis vokiečių matematikas Karlas Vejerštrasas (Karl Weierstraß, 1815–1897) kalbėjo:„Matematikas, kuris nėra bent kiek poetas, negali būti tikras matematikas“.

Anglų matematikas, filosofas ir visuomenės veikėjas Bertranas Raselas (Betrrand Arture William Russel, 1872–1970) teigė, jog teisingai suprasta matematika išreiškia ne tik tiesą, bet ir aukščiausią dailumą, šaltą ir rūstų grožį.

Garsusis prancūzų matematikas ir fizikas, vienas iš reliatyvumo teorijos kūrėjų, Anri Puankarė (Henri Poincaré, 1854–1912) rašė apie matematiką: „Žmonės, susipažinę su jos paslaptimis, patiria pasigėrėjimą, panašų tam, kurį mums duoda tapyba ir muzika. Jie žavisi skaičių ir formų grakščia harmonija, gėrisi, kai koks nors naujas atradimas atveria netikėtas perspektyvas.“

O štai ką tvirtino kitas garsus vokiečių matematikas H. Veilis (Hermann Weyl, 1885–1955): „Matematika, greta kalbos ir muzikos, yra viena iš žmogaus proto laisvos kūrybinės jėgos pirminių išraiškų ir yra universalus pasaulio supratimo teorinėmis konstrukcijomis instrumentas. Ji turi būti žinojimo ir sugebėjimų esminis elementas, kurio mes turime mokyti, ir kultūros, kurią turime palikti būsimoms kartoms.“

Kitas žymus šio šimtmečio vokiečių matematikas H. Hasė (Helmut Hasse, 1898 – 1979) apie matematiką kalbėjo, kaip apie mokslą, meną ir jėgą.

Matematika yra sritis, pilna stebuklingų netikėtinumų tam, kas į ją prasiskverbia. Atradimo džiaugsmas, kai problema yra išspręsta, kai matoma spinduliuojanti stebėtino grožio tiesos šviesa.

Galime būtų parašyti daug matematiką aukštinančių sakinių.

Paprastai žmonės būna gabūs daugeliui sričių, o pasirinktoji kūrybos sritis priklauso nuo išsilavinimo, susiklosčiusių aplinkybių, o kartais ir nuo atsitiktinių priežasčių. Tarp įvairių kūrybos rūšių, matyt, esama didesnio ryšio ir panašumo, negu paprastai manoma. Ateities mokslas, giliau ištyręs paties sudėtingiausio žmogaus organo – smegenų veiklą, tikriausiai geriau atskleis ir kūrybinio proceso mechanizmą bei paaiškins ryšius tarp įvairių jo rūšių.

Apie A. Baranausko matematinius tyrinėjimus žinome iš jo paties [4,6] ir Eizenacho gimnazijos mokytojo Karlo Hosfeldo (Carl Hossfeld) [18] publikacijų bei laiškų. Matematikos klausimais A. Baranauskas susirašinėjo su Aleksandru Dambrausku – Adomu Jakštu (1860–1938) [8], lenkų kalbininku Janu Boduenu de Kurtenė (Jan Baudouin de Courtenay, 1845–1929) [7] ir vokiečių kalbininku Hugu Vėberiu (Hugo Weber, 1832–1904). Pastarasis, matematines laiškų vietas išvertęs į vokiečių kalbą, parodydavo K. Hosfeldui. Tie laiškai buvo saugomi Leipcigo universitete. Lietuvių kalbininkas Kazys Alminauskis (vėliau, kaip ir daugelis lietuvių išeivių, sutrumpinęs pavardę į Almino) prieškario metais padarė jų kopijas ir publikavo Lietuvoje [1]. Suspėta publikuoti ne visi laiškai, tačiau Lietuvių literatūros institute saugomos nepublikuotų laiškų kopijos. Gaila tik, kad K. Alminauskis kai kuriuose laiškuose praleido dalį matematikos dalykų. Jam rūpėjo tik kalbos klausimai. Tiesa, kai kurių jis jau ir nerado. Mat, dalį skaičiavimų bei matematinių samprotavimų H. Vėberis atkirpdavo nuo laiškų ir perduodavo K. Hosfeldui. Galimas dalykas, ne visi jie buvo grąžinti H. Vėberiui. Tačiau ir išlikusių dabar atstatyti negalima, nes Antrojo pasaulinio karo pabaigoje Leipcigo universitete buvę A. Baranausko laiškai, kaip ir kita mokslo medžiaga bei knygos, sudegė. Iš laiškų A. Jakštui [8] nusimetė geometriniai brėžiniai. Keletas A. Baranausko matematinių laiškų yra publikuota [9]. Būtų pravartu turėti ir korespondentų atsakymus A. Baranauskui. Išskyrus keletą A. Jakšto laiškų nuorašų, apie kitus laiškus nežinoma. Krokuvoje yra išlikęs A. Baranausko rankaštis [5], kurio turinys artimas [4].

Apie A. Baranausko matematinius darbus plačiausiai dar prieš Pirmąjį pasaulinį karą buvo rašęs A. Jakštas [13]. Šituo straipsniu daugiausia rėmėsi ir kiti vėliau rašiusieji. Tarpukario Lietuvoje apie A. Baranauską matematiką rašė Mykolas Biržiška [10], Viktoras Biržiška [11], A. Jakštas [21], Juozas Tumas [46]. Pokario metais apie jį buvo užsiminta autoriaus [24], Aleksandro Baltrūno [2], Reginos Mikšytės [39].

1985 m. Lietuvoje buvo plačiai paminėtos 150-osios A. Baranausko gimimo metinės. Jau anksčiau buvau domėjęsis matematikos istorija Lietuvoje. Buvau šiek tiek susipažinęs ir su A. Baranausko matematine veikla. Organizatorių paskatintas ir bendradarbių padedamas, surinkau faktiškai visą tada prieinamą medžiagą: jo matematines publikacijas, laiškus. Išnagrinėjau ir parašiau nedidelę studiją [25] bei porą populiarių straipsnių [26, 27]. Apie jį rašė taip pat Eugenijus Manstavičius [35] ir R. Mikšytė [39, 40].

Ne vienas iš kolegų ir leidėjų paskatino parašyti populiarią knygelę moksleiviams ir šiaip besidomintiems matematika skaitytojams, nušviečiančią tą A. Baranausko veiklos sritį.

Rašydamas šią knygelę, aš naudojausi minėtuoju savo straipsniu. Turėjau galvoje papasakoti ne tik apie A. Baranausko matematinę veiklą, bet ir plačiau apžvelgti tuos matematikos klausimus, kurie su ja turi ryšio, bei populiarinti matematiką. Stengiausi remtis matematikos žiniomis, kurių mokoma vidurinėje mokykloje. Tik nedaug kur tenukrypau nuo tos nuostatos, mėgindamas paaiškinti tuos papildomus dalykus, kurių prireikė. Knygelės gale yra pateiktas sąrašas A. Baranausko darbų, nurodyta kai kuri literatūra apie jį ir knygos, kuriose plačiau pasakojama apie čia nagrinėjamus klausimus. Tekste tie veikalai nurodomi laužtiniuose skliaustuose.

Knygelės rankraštį perskaitė kolegos E. Gečiauskas ir M. Sapagovas, pateikę vertingų pastabų. Už jas nuoširdžiai dėkoju.

1. PAŽINTIS SU MATEMATIKA

Šių dienų jaunuoliui kelias į didžiąją matematiką gana paprastas. Baigei vidurinę mokyklą, įstojai į aukštąją, pasirinkęs matematiko specialybę. Visame kelyje dar rasi įvairiausių progų papildomai lavintis: matematikos būreliai, olimpiados, neakivaizdinės mokyklos, vasaros stovyklos, žurnalai ir knygos. Tave globos, patars, paskatins. Tik dirbk! Ir jei pasirodei darbštus ir talentingas, pasiūlys stoti į doktorantūrą, kur vėl turėsi vadovų bei patarėjų.

Seniai pastebėta, kad matematiniai gabumai dažniausiai pasireiškia ankstyvoje jaunystėje. Pagrindiniai matematikos atradimai taip pat daromi jauname amžiuje. Prancūzas Evaristas Galua (Evariste Galois, 1811 10 26 – 1832 05 31), žuvęs turėdamas vos dvi dešimtis metų, sukūrė vėliau jo vardu pavadintą teoriją, kuri rado daugybę taikymų matematikoje ir kitose srityse. Ta teorija padėjo jam atsakyti į klausimą, kada algebrinė lygtis yra išsprendžiama radikalais.

Pirmojo laipsnio algebrinei lygčiai išspręsti užtenka sudėties, atimties, daugybos ir dalybos veiksmų. Kvadratinei lygčiai spręsti reikia dar ir kvadratinės šaknies traukimo. O kubinėms ir ketvirtojo laipsnio lygtims spręsti reikalinga dar ir kubinė šaknis. Su aukštesniųjų laipsnių lygtimis viskas buvo sudėtingiau. Vis nesisekė rasti būdo joms spręsti bendruoju atveju. Pagaliau norvegas Nylsas Abelis (Niels Henrik Abel, 1802–1829), taip pat jaunas miręs, įrodė, jog aukštesnio kaip ketvirtojo laipsnio lygčių šaknis bendruoju atveju negalima išreikšti tų lygčių koeficientais, pavartojus baigtinį skaičių kartų keturis pagrindinius aritmetikos veiksmus ir sveikųjų laipsnių šaknies traukimą. Trumpiau sakoma: negalima išspręsti radikalais. Tačiau kai kada – galima. E. Galua rado kriterijų, kada tokių veiksmų pakanka.

Kai kitam prancūzų matematikui Aleksiui Klero (Alexis Claude Clairaut, 1713–1765) buvo vos 16 metų, jis parašė darbą apie erdvines kreives.

Tai buvo diferencialinės geometrijos erdvėje pradžia. Tokių pavyzdžių istorija žino daugybę.

Tai nereiškia, kad vyresnio amžiaus matematikai nieko vertingo nesukuria. Anaiptol, daugelis jų būna aktyvūs ir sulaukę garbingo amžiaus, jei nuo jaunų dienų sistemingai užsiiminėjo matematine veikla.

Kitaip susiklostė A. Baranausko gyvenimas: neturėta nei sąlygų, nei, atrodo, paskatų užsiiminėti matematika. Ir nors veržtasi į mokslą, bet pačios matematikos sistemingai beveik nesimokyta.

Manau, kad skaitytojas yra susipažinęs su pagrindiniais A. Baranausko biografijos faktais iš lietuvių literatūros istorijos vadovėlio ar kurios nors kitos knygos. Todėl čia paminėsiu tik vieną kitą.

Antanas Baranauskas gimė 1835 m. sausio 17 d. Anykščiuose. 1845–1848 metais mokėsi Anykščių valsčiaus mokykloje. Jis pats pasakoja, jog jam ypač sekėsi aritmetika. Pramokęs skaičiuoti iki bilijono, sudėties, atimties, daugybos. Toliau aritmetikos, pradedant dalyba, mokęsis savarankiškai iš vadovėlio.

Po daugelio metų jis savo laiškuose pasakojo, jog buvęs nugirdęs uždavinį: kiek už 100 rublių galima nupirkti jaučių, karvių ir veršiukų, jei už jautį reikia mokėti 10 rublių, už karvę – 5 rublius, o veršiukas kainuoja pusę rublio, kad iš viso būtų nupirkta 100 galvų. Matematikos kalba, tai gana paprastas neapibrėžtinių lygčių uždavinys. Pažymėję x perkamų jaučių skaičių, y – karvių ir z – veršiukų, gauname dvi lygtis

$$\begin{aligned} &10x + 5y + 0.5z = 100, \\ &x + y + z = 100. \end{aligned}$$

Lygtys dvi, o nežinomųjų – trys. Jei $x,\ y,\ z$ galėtų būti bet kurie skaičiai, tai ši lygčių sistema turėtų be galo daug sprendinių. Tačiau mūsų atveju jie turi būti sveiki neneigiami skaičiai. Todėl ji turi tik vieną sprendinį. Tik kaip jį rasti? Baranauskas tų lygčių teorijos, žinoma, nemokėjo. Jų ir šiandien nesimokoma vidurinėje mokykloje. Savo laiškuose A. Baranauskas rašo, jog porą savaičių kamavęsis, kol radęs, kad galima nupirkti 1 jautį, 9 karves ir 90 veršiukų. Galima atspėti, kaip jis sprendė: paprasčiausiai parinkinėjo skaičius, kol rado tinkamus. Tik gerokai vėliau, tas dvi lygtis suvedė į vieną su dviem nežinomaisiais. Sužinojęs iš labiau prasilavinusių matematikoje žmonių apie tokių uždavinių sprendimo metodus, sudarinėjęs atitinkamas neapibrėžtines lygtis, jas sprendęs ir net sudaręs dideles lenteles analogiškoms lygtims spręsti.

Nors troško mokslo, bet tėvų materialinė padėtis neleido jo norams išsipildyti. Tiesa, porą metų (1851–1853) mokėsi Rumšiškių raštininkų mokykloje, tačiau neką ten teišmoko. Vėliau trejetą metų dirbo įvairiose vietovėse raštininku.

Pagaliau 1856 m. rudenį už skolintus 10 rublių (yra ir kitokių versijų) nusipirkęs Telšių progimnazijos 4 klasių pažymėjimą, pateko į Varnių kunigų seminariją, kurioje matematika nebuvo dėstoma. Nebuvo dėstoma ji ir Peterburgo dvasinėje akademijoje, kurioje mokėsi 1858–1862 metais. Iš savo kolegų, kurie buvo mokęsi progimnazijose ar gimnazijose, Varniuose ir ypač Peterburgo akademijoje šį tą sužinojo apie algebrą. Išgirdęs, kad „dauginant pliusą pliusu ir minusą minusu, gaunamas pliusas ir tiktai nevienodi ženklai padarą minusą“, ilgai sukęs galvą, kol supratęs reikalo esmę. Beje, ir mums, kurie ne formaliai mokėmės matematikos mokykloje, ši taisyklė kėlė nemaža rūpesčių.

A. Baranauskas ne viename laiške savo korespondentams kalba apie potraukį matematikai. Kalba, kad jei ne tėvų neturtas, jis būtų ko gero, atsidėjęs matematikai.

Dvasinei akademijai rūpėjo paruošti sau būsimų dėstytojų. Tokiam darbui buvo parinktas ir A. Baranauskas. Jis buvo porai metų pasiųstas į Miuncheno universitetą. Pabuvojo ir Romoje bei Belgijoje. Čia A. Baranauskas, be savo tiesioginių pareigų, domėjosi ir matematika [43]. Po poros metų grįžęs į Peterburgą, metus dėstė akademijoje, o vėliau buvo perkeltas į Kauno kunigų seminariją ir aštuoniolika metų dėstė homiletiką (pamokslų teoriją), lietuvių kalbą ir dogminę teologiją. 1884 m. buvo paskirtas Žemaičių pavyskupiu. Nutrūko jo tiesioginiai kontaktai su klierikais lietuviais. Daugelio baramas ir ujamas už lietuvių kalbą, imasi savo mėgstamosios matematikos, jo žodžiais, nieko bendro neturinčios su politika, niekam neužkliūvančios, be to, gerai lavinančios protą, saugančios nuo tinginiavimo ir protinio sustingimo. Jam buvo jau beveik 50 metų. Amžius aiškiai nepalankus matematikai.

2. SKAIČIŲ LAIPSNIAVIMAS

A. Baranauskas savo laiškuose pasakoja, jog nedideles matematikos žinias papildęs iš A. Davydovo ir A. Malynino bei K. Burenino algebros ir iš kažkokio trumpo geometrijos vadovėlių. Tai galėjo būti tuo laiku populiarios A. Davydovo bei A. Malynino ir K. Burenino knygos [7,8,9]. Skaitęs ir sprendęs uždavinius nuo pirmojo puslapio, kol priėjęs skaičių laipsniavimą. Šis veiksmas taip patraukęs jo dėmesį, kad tolesnė algebra pasidariusi nebeįdomi. Atsidėjęs skaičių laipsnių tyrinėjimui, griebęsis sudarinėti kvadratų, kubų, o vėliau ir aukštesnių laipsnių lenteles. Ir šiame, atrodo, mechaniškame darbe galima įžvelgti A. Baranausko išradingumą. Užuot kėlęs iš eilės skaičius kvadratu ar aukštesniu laipsniu, jis tyrė dviejų gretimų natūraliųjų skaičių laipsnių skirtumus. Antai, dviejų gretimų natūraliųjų skaičių n ir $n+1$ kvadratų skirtumas

$$(n+1)^2 - n^2 = n + (n+1),$$

t.y. lygus tų skaičių sumai. Todėl natūraliųjų skaičių kvadratų lenteles galima sudarinėti naudojantis tik sudėtimi. A. Baranauskas ir sudarė tuo metodu kvadratų lentelę nuo 1 iki l000. Pamėginkime ir mes. Žinoma, mums nėra reikalo visą ją išrašyti. Metodą skaitytojas lengvai suvoks iš toliau parašytų skaičiavimų:

$$\begin{aligned}
&1^2 = 1,\\
&2^2 = 1^2 + 1 + 2 = 4,\\
&3^2 = 2^2 + 2 + 3 = 9,\\
&4^2 = 3^2 + 3 + 4 = 16,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Šis metodas buvo jau seniai žinomas, bet A. Baranauskas jį pastebėjo savarankiškai.

Ir aukštesniųjų laipsnių lentelėms sudarinėti pakanka tik sudėties. Štai iš lygybės

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

išplaukia, kad kubų lentelei sudaryti užtenka tik sudėties, jei tik mokame sudaryti kvadratų lentelę, o pastarajai surašyti, kaip matėme, pakanka sudėties.

Tirdamas aukštesnius laipsnius, A. Baranauskas pastebėjo, jog jie sudaro, kaip mes sakytume, aukštesnės eilės aritmetinę progresiją. Tarkime, tiriame k-tuosius laipsnius. Surašykime juos didėjančia tvarka ir raskime visų gretimų skaičių skirtumus. Po to imkime tų skirtumų skirtumus. Vėliau pastarųjų skirtumus. Ir t.t. Pagaliau rasime, kad k-ji skirtumai yra vienodi ir lygūs $k! = 1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k$.

Pailiustruosime tai kubų atveju.

1^3	=	1			
			7		
2^3	=	8		12	
			19		6
3^3	=	27		18	
			37		6
4^3	=	64		24	
			61		6
5^3	=	125		30	
			91		
6^3	=	216			

A. Baranauskas taip sudarė sveikų teigiamų skaičių iki 1000 kubų lentelę.

1889 02 05 laiške H. Vėberiui rašo: *„...ėmiau šitokį aprokavimą daryti:* $a^3b^2c^2 = a\cdot a^2b^2c^2(\ldots)$. *Tokia procia ištyręs diferencijas, padariau sąrašus net lig:* $a^{10}b^{10}c^8d^8f^7$ *– kruvina buvo procia“.*

A. Baranausko laiško H. Vėberiui su pastarojo vertimu į vokiečių kalbą faksimilė.

Po to ėmėsi sudarinėti mažų skaičių laipsnių lenteles:

$$2^1,\ 2^2, \ldots,\ 2^{300};$$
$$3^1,\ 3^2, \ldots,\ 3^{200};$$
$$5^1,\ 5^2, \ldots,\ 5^{150};$$
$$6^1,\ 6^2, \ldots,\ 6^{167};$$
$$7^1,\ 7^2, \ldots, 7^{70}.$$

Buvo griebęsis savo metodu sudarinėti ir keleto skaičių laipsnių sandaugų lenteles, net labai dideles, kai dauginamųjų yra tiek, kiek abėcėlėje raidžių, o rodikliai kinta iki 22. Tačiau, atlikęs tik dalį darbo, suvokė, kaip vėliau rašė savo laiške, kad *„tokia toblyča reikalauja daugelio žmogaus amžių. Taip dvasia nusiminusi aprimo“*.

Tuos skaičiavimus A. Baranauskas grindė savo rastais (dažniausiai empiriškai) dėsningumais. 1875 m. pradėjo susirašinėti lietuvių kalbos klausimais su tada Veimare (Weimar, Vokietija) dirbusiu kalbininku Hugu Vėberiu. 1889 m. parašo ir apie savo matematinius tyrinėjimus. Šis, išvertęs laiškus į vokiečių kalbą, parodydavo juos savo kolegai Eizenacho gimnazijos matematikos mokytojui Karlui Hosfeldui. Iš pastarojo A. Baranauskas gaudavo naudingų patarimų ir žinių. Štai kad ir Niutono (Isaac Newton, 1643–1727) vardu vadinamą, nors ji buvo žinoma ir iki jo, binomo formulę, kurią ir pats buvo suvokęs, nors, matyt, ir nebuvo tinkamai suformulavęs. Jei būtų daugiau pavartęs bei paskaitinėjęs savo turėtus algebros vadovėlius, būtų ir anksčiau su ja susipažinęs ir daug laiko sutaupęs. Dabar, jau po Hosfeldo patarimų, pavartęs vadovėlį, aptiko savo savarankiškai rastą vadinamąjį Blezo Paskalio (Blaise Pascal, 1623–1662) trikampį, kuris palengvina skaičiuoti binominius koeficientus.

Gal dar ne visi jaunieji skaitytojai yra susipažinę su ta binomo formule. Todėl paminėsiu, kas tai yra. Jau žemesniųjų klasių algebros kurse išmokstama, kaip kelti dvinarį kvadratu:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Vėliau randama ir dvinario kėlimo kubu formulė

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Jau seniai matematikai rado formulių ir bendresniu atveju. Štai kaip galima kelti dvinarį n-tuoju laipsniu, kai n yra sveikas teigiamas skaičius (šią formulę galima praplėsti ir kitokiems rodikliams):

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots +$$

$$+\binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n;$$

čia

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

yra vadinamieji binominiai koeficientai. Jie mokykliniuose vadovėliuose dažnai žymimi C_n^k. Priminsime, kad pagal susitarimą $0! = 1$. Lengva patikrinti, jog teisinga lygybė

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Iš čia turime

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

. . . .

Paskalio trikampiu vadiname lentelę

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

. . . .

Kitaip tariant,

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

. . . .

Ta lentelė yra labai patogi binominiams koeficientams apskaičiuoti. Pamėginkime sudaryti tolesnę koeficientų eilutę (kai $n = 5$). Jų iš viso bus $5 + 1 = 6$. Pirmasis skaičius, kaip ir kitose eilutėse, bus 1. Antrąjį gauname, sudėję penktosios eilutės pirmuosius du skaičius: $1 + 4 = 5$. Trečiąjį – sudėję penktosios eilutės antrąjį ir trečiąjį skaičius: $4 + 6 = 10$. Toliau – simetriškai: $10, 5, 1$. Ši Paskalio trikampio savybė pagrįsta lengvai patikrinama savybe

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Iš tikrųjų,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} =$$

$$= \binom{n+1}{k}.$$

Baigdamas šį skyrelį, norėčiau jaunajam skaitytojui patarti. Reikia derinti savo kūrybinius ieškojimus su akiračio plėtimu. Nežinodamas, kas iki šiol padaryta, sugaiši daug laiko veltui. Garsusis Niutonas kalbėjo padaręs moksle pažangą tik todėl, jog galėjęs atsistoti ant savo pirmtakų milžinų pečių ir todėl plačiau ir toliau apžvelgti pasaulį.

Kaunas, Rotušės 10. Čia A. Baranauskas gyveno 1884–1897 m.

3. PIRMINIAI SKAIČIAI

Sudarinėdamas sveikų teigiamų skaičių lenteles ir tirdamas jų savybes, A. Baranauskas susidūrė su skaičių dalumo klausimais. O tai atvedė prie pirminių skaičių, jo vadinamų pirmaskaitliais.

Iš elementariosios aritmetikos kurso žinome, kad visi sveikieji teigiami skaičiai yra skirstomi į tris klases pagal jų (teigiamų) daliklių skaičių. Pirmąją klasę sudaro vienintelis skaičius 1. Jis turi tik vieną daliklį – patį save. Į antrąją klasę įeina skaičiai, kurie turi du daliklius, būtent 1 ir patį save:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ \dots$$

Jie vadinami *pirminiais*. Visi kiti skaičiai priklauso trečiajai klasei. Jie turi bent tris daliklius ir vadinami *sudėtiniais* skaičiais. Pagrindinė aritmetikos teorema teigia, kad kiekvieną sveiką teigiamą skaičių galima išreikšti pirminių skaičių sandauga. Ta išraiška yra vienintelė, jei nekreipsime dėmesio į dauginamųjų tvarką. Kai skaičius yra pirminis, tai laikome, kad „sandauga“ yra sudaryta iš vieno skaičiaus. Ši teorema teisinga ir tada, kai tas skaičius yra 1, jei susitarsime laikyti, kad tuščia sandauga yra lygi 1. Taigi pirminiai skaičiai yra tarsi baziniai skaičiai, kuriuos daugindami galime sudaryti visus sveikus skaičius, nelyginant iš atomų galime sudaryti visas medžiagas.

Tais skaičiais žmonės domėjosi nuo seniausių laikų. Iki šiol jie kausto matematikų dėmesį ir, nepaisant didelės pažangos, vis dar tebėra apgaubti daugybės paslapčių. Patys subtiliausi matematikos klausimai dažnai siejasi su šiais skaičiais.

Jau senovės graikams buvo žinoma, kad pirminių skaičių esama be galo daug. Paprastai šis teiginys yra vadinamas Euklido (365?-300? pr. m. e.) vardu, nes apie tai kalbama jo veikale „Elementai“.

Aleksandras Makedonietis (356–323 prieš mūsų erą), nukariavęs Graikiją, Mažąją Aziją ir Egiptą, 331 m. prieš mūsų erą pradėjo statyti Egipto šiaurėje prie Viduržemio jūros savo sostinę Aleksandriją. Joje vėliau atsirado garsioji Aleksandrijos biblioteka, o prie jos mokykla, daugelio istorikų vadinama pirmuoju universitetu. Joje buvo matematikos skyrius, kuriam vadovavo Euklidas. Jis paliko veikalą „Elementai“. Ta knyga pirmą kartą susistemino to meto geometrijos žinias. Yra joje ir aritmetikos. Iki devynioliktojo šimtmečio tai buvo po Šventojo rašto labiausiai perkama knyga.

Štai čia ir kalbama apie pirminių skaičių aibės nepabaigiamumą. Esama duomenų, kad minimoji teorema jau buvo žinoma filosofui Platonui (427–347). Kai kurie matematikos istorikai teigia ją atsiradus Pitagoro (576–496) laikais, to paties Pitagoro, kurio teoremą apie stačiojo trikampio kraštinių sąryšį nagrinėjame geometrijos kurse.

Teorema įrodoma labai paprastai prieštaros metodu. Tarkime, kad pirminių skaičių aibė yra baigtinė. Pažymėkime juos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Sudarykime skaičių

$$Q = p_1 p_2 \ldots p_n + 1.$$

Jis turi dalytis bent iš vieno pirminio skaičiaus q. Tačiau pastarasis negali sutapti nė su vienu iš skaičių $p_1, p_2, \ldots, p_n$, nes tada iš jo turėtų dalytis ir 1. Vadinasi, radome dar vieną pirminį skaičių. Tas prieštaravimas parodo, kad prielaida apie pirminių skaičių aibės baigtinumą buvo neteisinga.

Ši teorema įrodo, jog esama kiek norint didelių pirminių skaičių. Iš jos įrodymo išplaukia ir būdas, kaip gauti bent vieną pirminį skaičių, didesnį už p_n. Padaryti tai labai paprasta. Pakanka patikrinti, kurie skaičiai tarp p_n ir Q yra pirminiai. Tarp jų būtinai yra bent vienas pirminis. Juk jei pats Q nėra pirminis, tai jis dalijasi iš pirminio skaičiaus, o pastarasis yra didesnis už p_n, bet mažesnis už Q.

Jau iš mūsų parašytų kelių pirminių skaičių matyti, kad jie pasiskirstę tarp kitų skaičių be jokios matomos tvarkos. Kaip jie pasiskirstę? Kaip juos rasti?

Pirminiai skaičiai ilgam patraukė Baranausko dėmesį. Suskaidė visus sveikus skaičius iki 1000, vėliau iki 10 000 pirminiais daugikliais. 1889 m. sausio 27 guodėsi laiške Vėberiui: *„Girdėjau, jog nekurie matematikos mokytojai jau gerai ištaisę teoriją skaičių. Jų darbuose gali rastis ir tie* *daiktai, kurie man parūpo. Bet tokių knygų nežinau kur gauti. Patsai gi, dar po šiai dienai, nerandu tako.*“ H. Vėberio patartas (matyt, parekomendavo K. Hosfeldas), įsigijo neseniai išėjusią gana gerą elementarų G. Vertheimo (Gustav Wertheim) skaičių teorijos vadovėlį [48]. Tų pačių metų lapkričio 13 vėl rašo H. Vėberiui: „*Tikiuosi ta knyga rūpestį apie pirmaskaičių sistemą nusimaldysiąs. Jei daeisiu, kiek yra tokiame ir tokiame skaičiuje pirmaskaičių ir kaip daeiti, ar toks skaičius yra pirmaskaitlys, ar antrykščias – benkiek gal nuo matematikos aprimsiu*“.

4. ERATOSTENO RĖTIS

Atsakymą į antrąjį klausimą duoda gana paprastas algoritmas, kurį pasiūlė kitas senovės graikų matematikas Eratostenas (276?-194?). Jis buvo garsiosios Aleksandrijos bibliotekos vyriausiuoju bibliotekininku, tačiau buvo labiau žinomas ne kaip matematikas, o kaip geografas ir astronomas. Žinodamas atstumą tarp Aleksandrijos ir Asuano, jis gana tiksliai apskaičiavo Žemės rutulio skersmenį. Nagrinėjo taip pat senovės istorijos chronologiją, t.y. nustatinėjo istorinių įvykių datas.

Tačiau grįžkime prie pirminių skaičių. Tarkime, reikia rasti visus pirminius skaičius iki sveikojo N. Rašome iš eilės skaičius $1,\ 2,\ 3,\ 4, 5,\ 6$ $\dots,\ N$. Atmetame 1, nes jis, kaip žinome, nėra pirminis. Toliau eina skaičius 2. Jis dalijasi tik iš 1 ir paties savęs. Vadinasi, yra pirminis. Paliekame jį ir išbraukiame iš eilės visus jo kartotinius: $4,\ 6,\ 8, \dots$ Likęs po 2 pirmasis neišbrauktas skaičius 3 nesidalys iš 2. Todėl jis dalysis tik iš 1 ir paties savęs. Vadinasi, yra pirminis. Paliekame jį ir išbraukiame visus jo kartotinius (kai kurie jų jau buvo išbraukti): $6,\ 9,\ 12, \dots$ Po 3 pirmasis neišbrauktas skaičius 5 yra pirminis. Tęsdami toliau šį braukymą, gautume visus pirminius skaičius iki N.

Eratostenas rašė skaičius ant papiruso ar vaškinės lentelės ir, užuot braukęs nereikalingus, juos pradurdavo. Išeidavo lyg ir rėtis, pro kurį, vaizdžiai kalbant, išsisijodavo sudėtiniai skaičiai. Todėl ir metodas buvo pavadintas Eratosteno rėčiu.

Patarčiau skaitytojui, paėmus popieriaus ir pieštuką, pačiam pamėginti sudaryti tuo būdu pirminių skaičių lentelę, sakysime, iki šimto.

O mes pamėginsime tuo metodu surasti visus pirminius skaičius iki 50. Tik mes techniškais sumetimais skaičius ne brauksime, o pabrauksime. Turėsime lentelę

$$\underline{1},\ 2,\ 3,\ \underline{4},\ 5,\ \underline{\underline{6}},\ 7,\ \underline{8},\ \underline{9},\ \underline{\underline{10}},\ 11,\ \underline{\underline{12}},\ 13,\ \underline{\underline{14}},\ \underline{\underline{15}},\ \underline{16},\ 17,\ \underline{\underline{18}},$$
$$19,\ \underline{\underline{20}},\ \underline{\underline{21}},\ \underline{\underline{22}},\ 23,\ \underline{\underline{24}},\ \underline{25},\ \underline{\underline{26}},\ \underline{27},\ \underline{\underline{28}},\ 29,\ \underline{\underline{\underline{30}}},\ 31,\ \underline{32},\ \underline{\underline{33}},\ \underline{\underline{34}},$$
$$\underline{\underline{\underline{35}}},\ \underline{\underline{36}},\ 37,\ \underline{\underline{38}},\ \underline{\underline{39}},\ \underline{\underline{40}},\ 41,\ \underline{\underline{42}},\ 43,\ \underline{\underline{44}},\ \underline{\underline{45}},\ \underline{\underline{46}},\ 47,\ \underline{\underline{48}},\ \underline{49},\ \underline{\underline{50}}$$

Mums reikėjo išbraukti tik pirminių skaičių iki $\sqrt{50}$, t. y., $2,\ 3,\ 5,\ 7$ kartotinius. Neišbraukti liko kiti pirminiai skaičiai iki 50, t. y., $11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43.$

Šis metodas ir šiandien, tik labai modifikuotas ir ištobulintas, yra vienas iš pagrindinių skaičių teorijos metodų, su kurio pagalba sprendžiami labai subtilūs klausimai.

Nesunku suvokti, jog aprašytąjį procesą pakanka tęsti tik iki tol, kol „išsijosime“ pirminių skaičių iki $\sqrt{N}$ kartotinius. Taip yra todėl, kad skaičiai, didesni už $\sqrt{N}$, bet ne didesni už N, negali turėti daugiau, kaip vieną pirminį daliklį, didesnį už $\sqrt{N}$. Jei kuris nors iš jų turėtų du skirtingus, sakysime $p > \sqrt{N}$ ir $q > \sqrt{N}$, tai jis turėtų dalytis iš skaičiaus $pq > N$, o tai negalima. Vadinasi, jei jie nesidalija iš pirminių skaičių, ne didesnių už $\sqrt{N}$, tai yra pirminiai. Pirmasis matematikas, kuris pastebėjo, jog skaičiaus N dalikliams rasti užtenka patikrinti jo dalumą iš skaičių, neviršijančių $\sqrt{N}$, buvo Leonardas iš Pizos (Leonardo da Pisa, ca 1170 – po 1228), vadintas Fibonačiu (*Fi Bonacci*= Bonačio sūnus). Su jo vardu taip pat siejami vadinamieji Fibonačio skaičiai.

Iš čia gauname paprastą, bet labai naudingą formulę. Pažymėkime $\psi(x)$ – skaičių pirminių skaičių, kurie neviršija x (dabartinėje literatūroje tą dydį paprastai žymi $\pi(x)$), o $\varphi(x, m)$ – skaičių sveikų teigiamų skaičių, kurie neviršija x ir yra tarpusavy pirminiai su m pirmųjų pirminių skaičių, kitaip tariant nesidalija iš tų pirminių skaičių. *Tarpusavy pirminiais* vadiname du ar daugiau skaičių, kurių didžiausias bendras daliklis yra 1.

Jei $n = \psi(\sqrt{x})$ yra skaičius pirminių skaičių, neviršijančių $\sqrt{x}$, o $p_1, \ldots, p_n$ yra tie pirminiai skaičiai, tai

$$\psi(x) = \varphi(x, n) + n - 1. \tag{1}$$

Žinodami visus pirminius skaičius iki $\sqrt{x}$, iš šios formulės galėtume rasti, kiek yra pirminių skaičių, neviršijančių x, jei tik mokėtume apskaičiuoti $\varphi(x, n)$.

Šiek tiek sudėtingiau įrodoma kita formulė, kurią 1870 m. pasiūlė vokiečių matematikas E. Meiselis (E. Meissel, 1826–1895). Ji yra ir Vertheimo vadovėlyje. Tarkime, kad $\psi(\sqrt{x}) = n,\ \psi(x^{1/3}) = m,$ o pirminiai skaičiai sunumeruoti iš eilės $p_1, p_2, \ldots$, tai

$$
(2)\qquad \begin{aligned} \psi(x) = \varphi(x,m) - \psi\Big(\frac{x}{p_{m+1}}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{p_{m+2}}\Big) - \ldots - \\ - \psi\Big(\frac{x}{p_n}\Big) + m(n-m+1) + \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} - 1. \end{aligned}
$$

Ir čia reikia žinoti visus pirminius skaičius iki $\sqrt{x}$. Ji gana patogi, kai iš anksto turime $\psi(x/p)$ su $x^{1/3} < p \le \sqrt{N}$. Pakanka turėti ψ lenteles iki $x^{2/3}$. Priešingu atveju reikia pakartotinai vartoti (1) arba (2) formules.

Esama ir formulių, kuriose vietoje $\varphi(x,m)$ imama $\varphi(x,s)$ su $s = \psi(x^{1/k}), k \ge 3$. Jos dar sudėtingesnės. Tačiau visais atvejais reikia mokėti apskaičiuoti funkciją φ.

Funkcijos φ reikšmėms rasti galima panaudoti formulę

$$
(3)\qquad \varphi(x,k) = \varphi(x,k-1) - \varphi\bigg(\frac{x}{p_k}, k-1\bigg).
$$

Ji lengvai įrodoma, jei prisiminsime Eratosteno rėtį. Tarkime, jog po $k-1$ braukimų radome, kiek skaičių iki x nesidalija iš pirminių skaičių $p_1, \ldots, p_{k-1}$. Tada su sekančiu braukymu mums teks išbraukti skaičiaus p_k kartotinius $p_k,\ 2p_k, \ldots$, mažesnius už x. Tačiau tarp jų jau buvo išbraukti tie ir tik tie skaičiai, kurių koeficientai $1,\ 2, \ldots$ nesidalija iš skaičių $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_{k-1}$, Vadinasi, lieka išbraukti tik

$$
\varphi\Big(\frac{x}{p_k}, k-1\Big)
$$

skaičių. Iš šių samprotavimų išplaukia, kad teisinga (3) formulė.

Kai $k > 1$, užuot skaičiavus skaičius, kurie nesidalija iš k pirminių skaičių, galima suskaičiuoti tuos, kurie nesidalija iš $k-1$ pirminių skaičių. Pakartotinai ją taikant, pagaliau prieisime prie $\varphi(x,1)$. O pastarąjį reiškinį labai lengva suskaičiuoti. Tereikia iš visų sveikų teigiamų skaičių iki x atmesti tuos, kurie dalijasi iš p_1:

$$
[x] - \Big[\frac{x}{p_1}\Big];
$$

čia $[u]$ reiškia sveikų teigiamų skaičių, ne didesnių už u, skaičių.

Pamėginkime dabar suskaičiuoti, kiek yra pirminių skaičių, mažesnių už 100, t.y. $\psi(100)$. Tam pakaks žinoti pirminius skaičius iki $\sqrt{100} = 10$. Tai skaičiai 2, 3, 5, 7. Be to, visada, kaip lengva suvokti, $\varphi(x) = \varphi([x])$. Iš (1) formulės turėsime

$$\psi(100) = \varphi(100, 4) + 4 - 1. \tag{4}$$

Naudodamiesi (3) formule, turime

$$\varphi(100, 4) = \varphi(100, 3) - \varphi(14, 3).$$

Čia dešinėje pusėje, užuot ėmę 100/7, imame šio skaičiaus sveikąją dalį 14. Tęsime skaičiavimus toliau, vis taikydami (3) formulę:

$$\varphi(100, 4) = \varphi(100, 2) - \varphi(20, 2) - \varphi(14, 2) + \varphi(2, 2).$$

Paskutinis narys šioje lygybėje yra lygus 1, nes tarp skaičių $1,\ 2$ tik skaičius 1 yra tarpusavy pirminis su $2 \cdot 3 = 6$. Skaičiuojame toliau:

$$\begin{aligned}\varphi(100, 4) =&\varphi(100, 1) - \varphi(33, 1) - \varphi(20, 1) + \\ &+ \varphi(6, 1) - \varphi(14, 1) + \varphi(4, 1) + 1.\end{aligned}$$

Suskaičiuosime lygybės dešinės pusės narius:

$$\begin{aligned}&\varphi(100, 1) = 100 - 50 = 50, \quad \varphi(33, 1) = 33 - 16 = 17, \\ &\varphi(20, 1) = 20 - 10 = 10, \quad \varphi(6, 1) = 6 - 3 = 3, \\ &\varphi(14, 1) = 14 - 7 = 7, \quad \varphi(4, 1) = 4 - 2 = 2.\end{aligned}$$

Todėl

$$\varphi(100, 4) = 50 - 17 - 10 + 3 - 7 + 2 + 1 = 22,$$

ir iš (4) gauname

$$\psi(100) = 22 + 3 = 25.$$

Tarkime, kad $P = p_1 p_2 \ldots p_n$. Tada

$$\varphi(P, n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_n - 1). \tag{5}$$

Įrodysime šią formulę. Kad būtų paprasčiau, apsiribosime atveju $n = 3$. Kaip ir Eratosteno rėčio atveju, pavartosime skaičių braukimą. Parašome visus sveikuosius teigiamus skaičius $1,\ 2, \dots,\ P$. Mums reikalingi tik tie skaičiai, kurie nesidalija nė iš vieno iš skaičių p_1, p_2, p_3. Todėl iš mūsų parašytųjų skaičių išbraukiame visus p_1 kartotinius (jų bus P/p_1), visus p_2 kartotinius (jų bus P/p_2) ir visus p_3 kartotinius (jų bus P/p_3). Liks tik skaičiai, kurie nesidalija nė iš vieno iš skaičių p_1, p_2, p_3. Kaip suskaičiuoti jų skaičių? Atrodytų iš karto, jog tai bus

$$P - \frac{P}{p_1} - \frac{P}{p_2} - \frac{P}{p_3}. \tag{6}$$

Tačiau tai nebus tikrasis skaičius. Juk kai kurie iš nagrinėjamųjų skaičių dalijasi ne iš vieno pirminio skaičiaus. Todėl juos braukėme ne vieną kartą, Antai, skaičius, kurie dalijasi iš dviejų skirtingų pirminių skaičių, mes braukėme du kartus. Todėl prie (6) reikia pridėti

$$\frac{P}{p_1p_2} + \frac{P}{p_1p_3} + \frac{P}{p_2p_3}. \tag{7}$$

Lengva suvokti, kad mes pridėjome per daug. Juk buvo ir skaičių, kurie dalijosi iš trijų skirtingų pirminių skaičių. Jų buvo $P/(p_1p_2p_3)$. Šį skaičių reikia atmesti. Gausime pagaliau, kad

$$\begin{aligned}\varphi(P,3) = P &- \frac{P}{p_1} - \frac{P}{p_2} - \frac{P}{p_3} + \\ &+ \frac{P}{p_1p_2} + \frac{P}{p_1p_3} + \frac{P}{p_2p_3} - \frac{P}{p_1p_2p_3} = \\ &= P\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_3}\Big) = \\ &= (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1).\end{aligned}$$

Panašiai įrodomas ir bendrasis (5) formulės atvejis. Patariame skaitytojui tai padaryti. Jam prireiks pasinaudoti matematinės indukcijos metodu.

Šias formules A. Baranauskas rado Vertheimo knygoje. K. Hosfeldo konsultuojamas, jis perprato tų funkcijų prasmę. Knyga paaiškino daugelį jo anksčiau nežinotų arba nepakankamai suvoktų dalykų.

5. BARANAUSKO FORMULĖ

A.Baranauską ypač patraukė funkcija φ. Ėmėsi ją tyrinėti. Priminsime, jog n pirmųjų pirminių skaičių $p_1, p_2, \dots, p_n$ sandaugą pažymėjome raide P. Kiekvienoje skaičių eilutėje

1,	2,	. . . ,	P,
P +1,	P+2,	. . . ,	2P,
2P+1,	2P+2,	. . .,	3P,
. . . . . .	. . . . . .	. . .	. . . . . .

yra vienodas skaičius tarpusavy pirminių su P, t.y.

$$\varphi(P, n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_n - 1).$$

Antra vertus, tie tarpusavy pirminiai su P skaičiai yra kiekvienoje eilutėje išsidėstę simetriškai. Tuo remdamasis, A. Baranauskas rado, kad

$$\varphi(gP + r, n) = g(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_n - 1) + \varphi(r, n), \tag{8}$$

kai g ir r yra sveikieji neneigiami skaičiai. Jei g yra sveikasis teigiamas, o $0 < r < P$, tai

$$\varphi(gP - r, n) = g(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_n - 1) - \varphi(r - 1, n). \tag{9}$$

Pasinaudoję (7) arba (8) formulėmis, funkcijos $\varphi(x, n)$ skaičiavimą suvedame į skaičiavimą tos funkcijos reikšmių, kai pirmasis argumentas yra tarp 0 ir P. Po to taikome (3) formulę, kuri pamažina antrąjį argumentą. Pakartotinai taikydami tas formules, galų gale randame funkcijos φ reikšmę.

A. Baranauskas savo išvadas grindžia dideliais skaičiavimais, apie juos per H. Vėberį praneša K. Hosfeldui. Šį (8) ir (9) formulės iš karto sudomino. Tačiau vėliau, pavartęs literatūrą aptiko, jog (8) formulė buvo rasta ir jau paskelbta E. Meiselio. Tuo tarpu (9) formulė buvo nauja, iki tol nežinoma. A. Baranauskui sutikus, K. Hosfeldas paskelbė šį rezultatą trumpame straipsnelyje „Pastaba apie vieną skaičių teorijos formulę“, patalpintame žinomame to meto žurnale [18]. Straipsnelį paskelbė savo pavarde, paminėdamas, jog tą formulę jam pranešęs A. Baranauskas. Tačiau A. Baranauskas nebuvo patenkintas. K. Hosfeldas neparodė A. Baranauskui straipsnelio projekto. Dėl to kai kas buvę išdėstyta ne taip, kaip rodėsi A. Baranauskui. Blogiausia, kad K. Hosfeldas, matyt, per neapsižiūrėjimą, (9) formulėje įvėlė klaidą, parašęs $\varphi(r, n)$ vietoje $\varphi(r-1, n)$. Šis rezultatas (su klaida) pateko ir į pasaulinę matematinę literatūrą (tik ne Baranausko, o Hosfeldo pavarde). Galima paminėti kapitalinį amerikiečių matematiko Leonardo Diksono (Leonard Eugene Dickson, 1874–1954) trijų tomų veikalą „Skaičių teorijos istorija“ [15].

Reikėjo klaidą atitaisyti. K. Hosfeldas parengė kitą straipsnelį. Šis nepatiko A. Baranauskui, o jo paties aiškinimai, kaip perdaug ištęsti, netiko K. Hosfeldui. Abu susipyko. Viename laiške A. Baranauskas H. Vėberiui rašė: *„Jeigu apie šį dalyką apsiriko, tai nebūtų ko dyvytis jam apsirikus, arba nesuvisu išpermanius visos mano teorijos ir visų jos parėdkų įspausdintame darbe. Bet man dabar nesuvisu pridera ir nelabai patogu išeiti pačiam aikštėn su visa savo teorija ir savo mokytojui matematikos akis žibinti, jog jo darbe tas ir tas dalykas nesuvisu teip kaip reikia išpasakyta. Jis gi sveikas, jeigu norėtų, pigiai galėtų šį visą nesutikimą pataisyti, rašydamas kitą sykį tan pačian laikraštin nuosakiai visą mano teoriją, kaipo mano darbą ir pripažindamas jai visą jos svarumą. Tada jam nereikėtų pirmojo savo darbo nei niekinti, nei peikti; aš gi iš savo pusės padėč prierašą, kuriame pasakyč, jog be Dr'o H. aš nebūč teip aukštų matematikos daiktų supratęs ir daėjęs. Nežinau, ar jis sveikas teiksis tai išpildyti; aš gi jo vietoje būdamas, daryč teip, kad visi regėtų purum et integrum animum*[1] *ir niekas apie tai neabejotų.“*. Čia ir kitur mes A. Baranausko kalbos nemoderniname.

Joks K. Hosfeldo straipsnelis neišvydo dienos šviesos.

Nesiimam spręsti, ar vertėjo dėl to abiem pyktis. Nors tas rezultatas mėgėjui Baranauskui buvo didelis dalykas. Iš tikrųjų jo vertė nėra didelė. Ir K. Hosfeldas buvo tik eilinis matematikas, nepasižymėjęs matematine kūryba.

---

[1] (*Lot.*) tyrą ir taurią dvasią

6. BARANAUSKAS TĘSIA SKAIČIAVIMUS

A. Baranauskas tęsė toliau savo skaičiavimus. Apskaičiavo pradžioje $\psi(10^4)$, tam sugaišęs porą dienų. Po to – $\psi(10^5)$. Darbavosi porą savaičių po 13 valandų kasdien. O $\psi(10^6)$ apskaičiuoti prireikė poros mėnesių. Rado net $\psi(10^7)$. Šis nesutapo su jau anksčiau rastu (teisingu) E. Meiselio rezultatu. Ėmėsi skaičiuoti $\psi(10^8)$. Netrukus iš K. Hosfeldo sužinojo, kad E. Meiselis buvo radęs ir $\psi(10^8)$ [37] ir net $\psi(10^9)$ [38]. Greit A. Baranauskas suvokė, kad dideliems x funkcijai $\psi(x)$ apskaičiuoti reiktų labai daug laiko. Remdamasis savo patirtimi, jis teigė, kad $\psi(10^8)$ rasti prireiktų kelerių metų, $\psi(10^9)$ – dešimčių, $\psi(10^{10})$ – šimtų, $\psi(10^{11})$ – tūkstančių, $\psi(10^{12})$ – dešimčių tūkstančių metų. Šie skaičiai gerokai perdėti. Tačiau rodo, koks didelis darbas yra suskaičiuoti $\psi(x)$, kai x didelis. A. Baranauskas klausė K. Hosfeldą, ar aukštoji matematika nežinanti būdų, kaip paprasčiau rasti ψ. Šis atsakęs, kad matematikai, nors jau amžius tyrinėja skaičių teorijos klausimus, kol kas nieko geresnio nežiną. Beveik tą patį galėtume pasakyti ir šiandien. Tik parekomenduotume tą darbą atlikinėti elektroninėmis skaičiavimo mašinomis.

Funkcijai ψ apskaičiuoti A. Baranauskui prireikė pakankamai didelių pirminių skaičių lentelių. Neturėdamas literatūros, jis pats ėmėsi jas sudarinėti (ir gana nemažas), rasdamas iš eilės visus pirminius skaičius $p_1 = 2,\ p_2 = 3, \dots,\ p_{13852} = 150053$. O 1894 m. liepos 29 (17) rankraštyje [5], pasiųstame Krokuvos mokslų akademijai, jis be tos lentelės pateikia ir keletą pirminių skaičių milijono aplinkoje, būtent, nuo $p_{78471} = 999563$ iki $p_{78543} = 1000579$. Neaišku, ar jis pats buvo radęs tuos skaičius, ar sužinojęs iš literatūros. Laiške kalbininkui J. Boduenui de Kurtenė 1894 m. balandžio 13 teigė: *„Tikrai žinau, kad iki šiol niekas nesudarė tokio didelio pirminių skaičių katalogo"*.

Jis negalėjo žinoti, kad jau XVIII šimtmetyje buvo ir platesnių lentelių.

Trumpai paminėsime pirminių skaičių lentelių istoriją. Jau mūsų minėtasis Fibonačis 1202 metais sudarė pirminių skaičių lenteles iki 100. Leideno universiteto profesorius F. van Skouten (Frans van Schouten, ca 1615–1660) 1657 m. paskelbė tokias lenteles iki 10^4. J. G. Kriugeris (Krüger) 1746 m. surašė lenteles iki 10^5. Savamokslis, bet žymus matematikas J. H. Lambertas (Johann Heinrich Lambert, 1728–1777), 1770 m. sudaręs lenteles iki 101 977, kvietė pratęsti jo darbą, žadėdamas nemirtingą šlovę tam, kas, nepabūgęs baisaus darbo, sudarys lenteles iki milijono. Atsirado daug ištvermingų skaičiuotojų. J. Lamberto darbą pratęsė A. Felkelis (Felkel, g. 1750), sudaręs lenteles iki 408 000. Esama žinių, jog jis pratęsęs lenteles iki $2 \cdot 10^6$, tačiau jos neišlikusios. Slovakų kilmės Vienos profesorius G. Vega (Georg F. von Vega, 1756–1802) paruošė lenteles iki $4 \cdot 10^5$. Jei atmestume A. Fekelį, milijoną pirmasis peržengė olandas L. Černak (Chernac) 1811 m. priėjęs iki 1 020 000, o tris milijonus – J. Burkhartas (Johann K. Burkhart, 1773–1825), net iki 3 036 000. J. Daze (J.M.Z. Dase, 1824–1861), K. Gauso pasiūlymu, nagrinėjo aštuntąjį ir devintąjį milijoną, o ketvirtąjį, penktąjį ir šeštajį – Dž. Glešeris (J.W.L. Glaisher, 1848–1928) 1879–83 m. Visus juos pralenkė Prahos universiteto profesorius J.F. Kulikas (Jakub Filip Kulik, 1793–1863), Vienos akademijai įteikęs pirminių skaičių iki 100 330 201 lenteles (vėliau dalis jų kažkur užsimetė). Tiesa, po kiek laiko tose milžiniškose lentelėse užtikta klaidų: jau dešimtajame milijone jų rasta 226. Šiandien žinomiausios yra amerikiečio D.N. Lemerio (Lehmer) sudarytos ir paskelbtos didelėje knygoje [32] lentelės pirminių skaičių iki 10 006 721. Esama ir jų papildymų.

Pastaraisiais dešimtmečiais skaičiavimus nepaprastai palengvino ir paspartino elektroninės skaičiavimo mašinos. Kelias nuo paprasčiausių skaičiavimo mašinų iki dabartinių elektroninių nebuvo trumpas.

Jau abakas ir paprasti buhalteriniai skaitytuvai palengvina atlikinėti aritmetinius veiksmus.

1642 m. jau mūsų minėtasis Blezas Paskalis padarė pirmąją skaičiavimo mašiną. Tai buvo gana paprastas įrenginys, susidedąs iš esmės iš keliolikos dantračių. Ja galima buvo tik sudėti skaičius. Tačiau ir tokia mašina suprastino ir pagreitino žmogaus darbą. Ja buvo lengviau skaičiuoti, nei pieštuku ant popieriaus.

1677 m. vokiečių matematikas Gotfrydas Leibnicas (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 – 1716), susipažinęs su Paskalio mašina, susidomėjo skaičiavimo darbų mechanizacija ir po kelių mėnesių sukonstravo mašiną, kuri galėjo ir dauginti skaičius.

Svarbų žingsnį pirmyn padarė anglų matematikas Čarlzas Bebidžas (Charles Babbage, 1792–1871). Jis sukonstarvo mašiną, kuri galėjo atlikti įvairius matematinius skaičiavimus. Ji jau turėjo dabartinių elektroninių skaičiavimo mašinų kai kurių bruožų.

1874 m. švedų kilmės inžinierius Vilgodtas Odneris (1845–1905) sukūrė aritmometrą.

Tačiau esminis žingsnis buvo elektroninės skaičiavimo mašinos. Pirmoji iš jų ENIAC buvo pagaminta Pensilvanijos universitete 1945 m. ir galėjo atlikti 5000 operacijų kas sekundę. Ji turėjo 17 000 radijo lempų, buvo maždaug 25 m. ilgio, svėrė 30 tonų. Mašinos greitai tobulėjo. Lempas pakeitė puslaidininkiniai tranzistoriai. Atėjo integralinių schemų era. Jos vis spartėjo ir darėsi mažesnės. Šiandien esama jau net kišeninių kompiuterių, kurie daug kartų lenkia pirmąją elektroninę skaičiavimo mašiną savo sparta. Esama mašinų, kurios atlieka dešimtis milijardų operacijų per vieną sekundę. Konstruojamos mašinos, kurios galės atlikinėti kvadrilijoną opreacijų per sekundę.

Greitai tos mašinos buvo panaudotos ir pirminių skaičių lentelėms sudarinėti. Štai jau 1959 m. K.L. Beikeris (C.L. Baker) ir F.J. Griunbergeris (Gruenbeger) tokiu būdu sudarė lenteles iki $p_{6\ 000\ 000} = 104\ 395\ 301$, taigi šiek tiek didesnes už Kuliko. Tačiau laiko tam sugaišo nepalyginamai mažiau. O šiandien esama tokių didelių lentelių, kad niekas nesirengia jų spausdinti popieriuje. Todėl lieka įrašytos magnetinėse juostose ar diskeliuose.

Kaip minėjome, E. Meiselis 1885 m. apskaičiavo $\psi(10^9)$. Tačiau jo rastoji reikšmė $50\ 847\ 478$ buvo klaidinga. Tikroji reikšmė, kaip parodė vėlesni skaičiavimai, yra didesnė. Ji lygi $50\ 847\ 534$. Po septynerių dešimtmečių minėtasis amerikietis D. Lemeris, vartodamas Meiselio metodą, 1958 m. rado $\psi(10^{10})$. Jo apskaičiuotoji reikšmė $455\ 052\ 512$ pasirodė taip pat klaidinga. Ji turėjo būti 1 mažesnė. 1972 m. J. Bomanas (J. Bohman), vartodamas D. Lemerio metodą, rado $\psi(10^k),\ k = 11,\ 12, 13$. Pastarajai reikšmei gauti jam prireikė 278 minučių su kompiuteriu UNIVAC 1108. Neužilgo 1985 m. trys matematikai J. C. Lagarias, V. S. Mileris (Miller) ir A. M. Odlyško (Odlyszko), pavartoję naują tobulesnį metodą ir galingą elektroninę skaičiavimo mašiną, rado $\psi(10^k)$, $k = 14,\ 15,\ 16$. Jie taip pat apskaičiavo jog $\psi(4 \cdot 10^{16}) = 1\ 075\ 292\ 778\ 753\ 150$. Ar ji teisinga, kol kas nėra patikrinta. Ir toliau skaičiavimai buvo tęsiami. Kai kurie iš jų surašyti lentelėje 38 psl.

Visą tą istoriją aš čia išdėsčiau tik tam, kad parodyčiau, jog pirminių skaičių lentelės patraukė daugelio matematikų ir skaičiuotojų dėmesį. Kai kas manė iš tų lentelių nustatyti pirminių skaičių pasiskirstymo dėsningumus. Tokių minčių turėjo ir A. Baranauskas.

Nesutaręs su K. Hosfeldu dėl savo tyrinėjimų skelbimo, A. Baranauskas pats paruošė spaudai darbą, kuris, J. Boduenui de Kurtenė tarpininkaujant, F. Mertensui pristačius, buvo atspausdintas Krokuvos mokslų akademijos darbuose 1895 m. pavadinimu: „Apie formules, tarnaujančias apskaičiuoti skaičiui pirminių skaičių, neperžengiančių duotosios ribos“ [4].

Darbo pradžioje A. Baranauskas pamini savo tyrimų eigą, nepraleisdamas ir istorijos su K. Hosfeldo straipsneliu, pateikia formules funkcijai φ apskaičiuoti ir E. Meiselio formulę. Po to skaičiuoja $\psi(10^5)$. Tam reikalui, vartodamas (3) formulę, apskaičiuoja $\varphi(10^5, 14)$. Skaičiavimai užima net 18 puslapių. Toliau pateikia skaičiavimus, pagrįstus (7) ir (8) formulėmis. Jie nepalyginamai trumpesni. Gauna $\psi(10^5) = 9592$. Gale darbo pabrėžia, kad (1) formulė esanti patogesnė už (2) Meiselio formulę. Šis teiginys, kaip ir visas darbas, jau minimas literatūroje A. Baranausko pavarde (žr., pvz, [15]).

A. Baranauskas paprašė J. Boduene de Kurtenė pasiųsti H. Vėberiui ir K. Hosfeldui po vieną to darbo atspaudą.

Tyrinėdamas pirminių skaičių problemas, pramoko lyginių teorijos.

Aleksandras Dambrauskas savo straipsnyje apie A. Baranausko matematinius tyrinėjimus [13] mini, jog šis buvęs parašęs gana didelį darbą iš skaičių teorijos, du kartus jį perdirbinėjęs, vėliau pasiėmęs į Seinus. Tačiau apie to darbo likimą nieko nežinome.

7. PIRMINIŲ SKAIČIŲ ASIMPTOTINIS DĖSNIS

A. Baranausko darbai iš pirminių skaičių teorijos yra patys įdomiausi jo matematinėje veikloje. Tais laikais ši teorija buvo nedaug tepažengusi.

Peržvelgę kad ir nedideles pirminių skaičių lenteles, matytume, kad jie tarp kitų sveikųjų skaičių pasiskirstę labai sudėtingai, be aiškiai matomos tvarkos. Pirmojoje dešimtyje yra keturi pirminiai skaičiai: $2,\ 3,\ 5,\ 7$. Tarp 997 ir 1009 yra vienuolika iš eilės einančių sudėtinių skaičių. Tarp 1327 ir 1361 yra 34 sudėtiniai skaičiai, tiek pat yra tarp 8467 ir 8501, o tarp 370 261 ir 370 373 yra 112 sudėtinių skaičių. Tarp $614\ 487\ 453\ 523$ ir $614\ 487\ 454\ 057$ yra 533 sudėtiniai skaičiai, tarp $1\ 968\ 188\ 536\ 461$ ir $1\ 968\ 557\ 063$ yra 601 sudėtinis skaičius, tarp $2\ 614\ 941\ 710\ 599$ ir $2\ 614\ 941\ 711\ 251$ yra 651 sudėtinis skaičius. Po skaičiaus $11\ 000\ 001\ 446\ 613\ 353$ eina iš eilės net 654 ne pirminiai skaičiai.

Apskritai, esama kiek norima daug iš eilės einančių sudėtinių skaičių. Parodysime, pavyzdžiui, jog esama tarpo, sudaryto bent iš 1000 sudėtinių skaičių. Imkime skaičių

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1000 \cdot 1001 = 1001!.$$

Nagrinėkime 1000 skaičių

$$N + 2,\ N + 3,\ N + 4, \ldots,\ N + 1001.$$

Jie visi yra sudėtiniai, nes pirmasis dalijasi iš 2, antrasis – iš 3 ir t.t., o paskutinysis – iš 1001.

Antra vertus, esama ir tokių pirminių skaičių, tarp kurių atstumas yra 2:

$$\begin{aligned} &3 \text{ ir } 5, \quad 5 \text{ ir } 7, \quad 11 \text{ ir } 13, \quad 17 \text{ ir } 19, \\ &29 \text{ ir } 31, \quad 41 \text{ ir } 43, \quad 59 \text{ ir } 61, \text{ ir t. t.} \end{aligned}$$

Tokie pirminiai skaičiai vadinami *dvynukais*. Jų esama ir gana didelių, pavyzdžiui,

$$5\ 971\ 847 \text{ ir } 5\ 971\ 846,\ \ 10\ 006\ 427 \text{ ir } 10\ 006\ 429,$$

$$10\ 016\ 957 \text{ ir } 10\ 016\ 959.$$

Esama ir dar didesnių. Tokie bus skaičių dvejetai $q-1,\ q+1$, kai q yra skaičiai

$$10^9+8,\quad 10^{12}+62,\quad 76\cdot 3^{139},\quad 156\cdot 5^{202},$$

$$297\cdot 2^{546},\quad 694\ 513\ 810\cdot 2^{2304},\quad 1\ 159\ 142\ 985\cdot 2^{2304},$$

$$1\ 706\ 595\cdot 2^{11\ 235},\quad 697\ 053\ 813\cdot 2^{16\ 352},\quad 242\ 206\ 083\cdot 2^{38\ 880}.$$

Pastarieji trys skaičiai turi atitinkamai 3 389, 4 931, 26 969 dešimtainių skaitmenų.

Iki 100 000 yra 1224 poros dvynukų, o iki 1 000 000 jų yra 8164. Manoma, kad pirminių skaičių dvynukų esama be galo daug, tačiau tas teiginys iki šiol nėra įrodytas.

Esama taip pat pirminių skaičių, sudarančių aritmetinę progresiją, kurios ilgis yra $3,\ 4,\ \ldots$. Antai, 3 430 751 869+87 297 210$\cdot k$ yra pirminiai skaičiai, kai $k=0,\ 1,\ldots,\ 16$.

Atstumus tarp gretimų pirminių skaičių nagrinėjo ir A.Baranauskas, ieškodamas dėsningumų. Sudarykime tų skirtumų lentelę. Pažymėkime n-tąjį pirminį skaičių p_n ir $d_n=p_{n+1}-p_n$. Parašysime pirmąją šimtinę tų skirtumų, sudėstę juos į kvadratinę lentelę (pradžioje rašysime skirtumus į pirmąją eilutę, po to į antrąją ir t.t.).

1	2	2	4	2	4	2	4	6	2
6	4	2	4	6	6	2	6	4	2
6	4	6	8	4	2	4	2	4	14
4	6	2	10	2	6	6	4	6	6
2	10	2	4	2	12	12	4	2	4
6	2	10	6	6	6	2	6	4	2
10	14	4	2	4	14	6	10	2	4
6	8	6	6	4	6	8	4	8	10
2	10	2	6	4	6	8	4	2	4
12	8	4	8	4	6	12	2	8	6

Ir čia nematome kokios nors paprastos taisyklės. Jau prieš šimtą metų buvo suformuluota hipotezė, kad kiekvienam lyginiam skaičiui k egzistuoja be galo daug skaičių n su $d_n=k$.

A. Baranauskas nagrinėjo ne tik gretimų pirminių skaičių skirtumus, bet ir ir tų skirtumų absoliučiuosius skirtumus, ir pastarųjų absoliučiuosius skirtumus ir t.t. Pamėginkime sudaryti atitinkamą lentelę.

2																	
	1																
3		1															
	2		1														
5		0		1													
	2		2		1												
7		2		2		1											
	4		0		2		1										
11		2		0		2		1									
	2		0		0		2		1								
13		2		0		0		2		1							
	4		0		0		0		0		1						
17		2		0		0		2		0		1					
	2		0		0		2		0		0		1				
19		2		0		2		2		0		0		1			
	4		0		2		0		0		0		0		1		
23		2		2		2		2		0		0		0		1	
	6		2		0		2		0		0		0		2		1
29		4		2		0		2		0		0		2		2	
	2		0		0		0		0		0		2		0		
31		4		2		0		2		0		2		2			
	6		2		0		2		0		2		0				
37		2		2		2		2		2		2					
	4		0		2		0		2		0						
41		2		0		2		0		2							
	2		0		0		0		0								
43		2		0		2		0									
	4		0		2		0										
47		2		2		2											
	6		2		0												
53		0		2													
	6		4														
59		4															
	2																
61																	

Kaip matome, toje lentelėje kiekviena eilutė baigiasi 1. N.L. Gilbretas (Gilbreath) 1958 m. spėjo, kad ta taisyklė teisinga ir toliau. Iki šiol spėjimas patikrintas pirmosioms 63 418 eilučių.

Visa, ką mes čia rašėme, parodo, jog pirminiai skaičiai yra pasiskirstę tarp natūraliųjų skaičių labai sudėtingai, be aiškiai matomos tvarkos. Ir vis dėlto esama tam tikrų dėsningumų. Pirmiausia kyla mintis palyginti, kokią dalį pirminiai skaičiai sudaro tarp visų sveikųjų skaičių bet kuriame skaičių intervale. Pateiksime lentelę

x	$\psi(x)$	$\frac{\psi(x)}{x}$	$\frac{\psi(x)}{\mathrm{li}(x)}$
10^2	25	0.25	$0.83\ldots$
10^3	168	0.1680	0.94. . .
10^4	1229	0.1229	0.98. . .
10^5	9592	0.0959. . .	0.996. . .
10^6	78498	0.0784. . .	0.9983. . .
10^7	664579	0.0664. . .	0.9994. . .
10^8	5761455	0.0576. . .	0.99986. . .
10^9	50847534	0.0508. . .	0.99996. . .
10^{10}	455052511	0.0455. . .	0.999993. . .
10^{11}	4118054813	0.0411. . .	0.999997. . .
10^{12}	37607912018	0.0376. . .	0.9999989. . .
10^{13}	346065535898	0.0346. . .	0.99999968. . .
10^{14}	3204941750802	0.0320. . .	0.999999901. . .
10^{15}	29844570422669	0.0298. . .	0.999999964. . .
10^{16}	279238 341033925	0.0279. . .	0.999999988. . .
10^{17}	2623557157654233	0.0262. . .	0.999999997. . .
10^{18}	24739954287740860	0.0247. . .	0.9999999991. . .

Kaip matome, kuo toliau, tuo pirminiai skaičiai retesni. Iš empirinių skaičiavimų prancūzų matematikas A.M. Ležandras (Adrien Marie Legendre, 1752–1833) ir vokiečių matematikas K.F. Gausas (Carl Friedrich Gauß, 1777–1855) suformulavo vadinamąjį asimptotinį pirminių skaičių dėsnį, kuris teigia, kad

$$(9) \qquad \frac{\psi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$$

artėja į 1, kai x neaprėžtai didėja. Čia $\ln x$ yra vadinamasis natūralusis logaritmas, t.y. logaritmas pagrindu

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$$

Įprastiniai dešimtainiai ir natūralieji logaritmai yra susieti paprastu ryšiu

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e} = 2.30258\ldots\log x.$$

Žinantiems integralus, tą dėsnį galime parašyti tikslesne (Gauso) forma, pakeisdami (9) formulėje $x/\ln x$ integralu

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u}.$$

Kaip matome iš lentelės, tas integralas gerai aproksimuoja $\psi(x)$. Pirminių skaičių asimptotinį dėsnį, remdamiesi vokiečių matematiko B. Rymano (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866) idėjomis, įrodė 1896 m. vienu metu ir nepriklausomai vienas nuo kito prancūzas Ž. Adamaras (Jacques Hadamard, 1865–1963) ir belgas Š. Valė Pusenas (Charles Jean de la Vallée Poussin, 1866-1962). Įrodymai pagrįsti kompleksinio kintamojo funkcijų teorija. Natūralu buvo ieškoti to dėsnio įrodymų elementariaisiais metodais. Deja, tokie įrodymai buvo rasti, tik praėjus pusšimčiui metų. 1948 m. norvegas A. Selbergas (Atle Selberg, g. 1917) ir vengrų matematikas P. Erdiošas (Pal Erdös, 1912–1996) rado tokį įrodymą. Nors jis ir pagrįstas elementariaisiais metodais, tačiau nėra paprastas.

Baranausko laiškuose galima užtikti klausimą, ar nėra formulės, iš kurios būtų galima gauti visus pirminius skaičius. Tokios formulės buvo rastos tik visai neseniai. Prieš 50 metų V. Milsas (W.H. Mills) parodė, jog egzistuoja toks realusis skaičius β, kad sveikas skaičius $\left[\beta^{3^n}\right]$, kai

$n = 1, 2, \ldots$, visada yra pirminis skaičius. Čia [ ] reiškia didžiausią sveiką skaičių, neviršijantį skaičiaus, esančio tuose skliausteliuose. Prieš tris dešimtis metų buvo rastas 25 laipsnio daugianaris su 26 kintamaisiais, turįs tokią savybę. Kai jo kintamieji įgyja sveikas reikšmes, o daugianario reikšmės yra teigiamos, tai gaunami visi pirminiai skaičiai.

Štai kaip atrodo tas daugianaris.

$$
\begin{aligned}
&(k+2)\Big\{1-\Big([wz+h+j-q]^2+\big[(gk+2g+k+1)(h+j)+\\
&+h-z\big]^2+\big[16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\big]^2+\\
&+[2n+p+q+z-e]^2+\big[e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2\big]^2+\\
&+\big[(a^2-1)y^2+1-x^2\big]^2+\big[16r^2y^4(a^2-1)+\\
&+1-u^2\big]^2+\Big[\big((a+u^2(u^2-a)\big)^2-1)(n+4dy)^2+\\
&+1-(x+cu)^2\Big]^2+\big[(a^2-1)l^2+1-m^2\big]^2+\\
&+[ai+k+1-l-i]^2+[n+1+v-y]^2+\\
&+\big[p+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m\big]^2+\\
&+\big[q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x\big]^2+\\
&+\big[z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm\big]^2\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Esama ir daugiau daugianarių su tokia savybe. Antai, esama daugianario su 12 kintamųjų, bet labai didelio laipsnio, arba 5 laipsnio su dar daugiau kintamųjų, net 42. Gal pastaruoju metu rasti ir kiti daugianariai, tačiau jie tikriausiai nebus paprasti.

1837 m. vokiečių matematikas P. Dirichlė (Peter Gustav Dirichlet Lejeune, 1805–1859) įrodė, kad kiekvienoje aritmetinėje progresijoje, kurios pirmasis narys ir skirtumas yra tarpsavy pirminiai sveiki skaičiai, yra be galo daug pirminių skaičių. Vėliau matematikai ieškojo atsakymo į klausimą, ar nėra tokių aukštesniojo laipsnio daugianarių su sveikais koeficientais, kurie atvaizduotų be galo daug pirminių skaičių, kai argumentas perbėga sveikus teigiamus skaičius. Jau seniai žinoma, kad kvadratiniai daugianariai

$$x^2+x+\frac{p+1}{4},$$

kai $p = 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163$, sveikiems $x,\ 0 \leq x < (p-3)/4$ turi reikšmes, kurios yra pirminiai skaičiai. Pavyzdžiui, daugianario $x^2 + x + 41$ reikšmės yra pirminiai skaičiai, kai $x = 0,\ 1, \ldots,\ 39$. Jie yra $11,\ 13,\ 17,\ 23, \ldots,\ 1601$.

Spėjama, kad dvinaris $x^2 + 1$ turi be galo daug pirminių reikšmių, kai x perbėga sveikuosius teigiamus skaičius.

A. Baranauskui rūpėjo taip pat, ar nėra tokios formulės, kuri, žinant kurį nors pirminį skaičių p_n, leistų rasti po jo iš eilės einantį pirminį skaičių p_{n+1}. Buvo rastos ir tokios formulės. Deja, jos nėra paprastos. Štai kaip atrodo viena iš jų:

$$p_{n+1} = \left[1 - \log_2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} \frac{(-1)^r}{2^{p_{i_1} \cdots p_{i_r}} - 1}\right)\right].$$

Čia, kaip ir anksčiau, [ ] reiškia skaičiaus, esančio tuose skliausteliuose, sveikąją dalį. Patariame skaitytojui pamėginti taip surasti, pradedant $n = 1$, keletą iš eilės einančių pirminių skaičių. Lengvai įsitikinsite, jog ta formulė nėra patogi.

Daugiau apie pirminius skaičius galima rasti, pavyzdžiui, [28, 44]. Šie skaičiai randa įvairių taikymų šiandieniniame moksle. Apie jų taikymus kriptografijoje kalbėsime 10 skyrelyje (žr. [29]).

8. FERMA SKAIČIAI

Seniai matematikai panūdo rasti tokias formules, kurios duotų pirminius skaičius. Apie tai jau kalbėjome paskutiniame skyrelyje. Pratęsime kalbą toliau. Garsus prancūzų matematikas Ferma (Pierre Fermat, 1601–1665) buvo juristas, matematika užsiiminėjo tik laisvalaikiu. Paliko žymų pėdsaką daugelyje matematikos šakų: skaičių teorijoje, matematinėje analizėje, analizinėje geometrijoje. Viename iš savo laiškų kitam matematikui B.F. de Besy (B. Frenicle de Bessy) 1640 m. jis rašė apie skaičius

$$F_n := 2^{2^n} + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Kai $n = 0, 1, 2, 3, 4$, tie skaičiai yra lygūs

$$3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65\,537.$$

Visi jie yra pirminiai. Ferma minėtame laiške spėjo, jog ir kiti tokio pavidalo skaičiai turėtų būti pirminiai. Tie skaičiai vėliau buvo pavadinti Ferma skaičiais. Ferma buvo apskaičiavęs ir šeštąjį skaičių, kai $n = 5$. Tai – skaičius 4 294 967 297. Beveik po šimtmečio L. Oileris (Leonhard Euler, 1707–1783) 1732 m. parodė, kad pastarasis skaičius yra sudėtinis ir lygus $461 \cdot 6\,700\,417$.

Iki pat šiol toliau tiriami Fermat skaičiai. Landry 1880 parodė, kad F_6 dalijasi iš 274 177. Morhedas (Morehead) 1905 m. rado, kad F_7 nėra pirminis. 1909 m. jis ir Vesternas (Western) parodė, kad toks yra ir F_8. Tačiau tų skaičių suskaidymas pirminiais daugikliais buvo rastas tik žymiai vėliau, kai jau buvo galima panaudoti elektronines skaičiavimo mašinas. 1974 m. K. Halibertonas (C. Hallyburton), Dž. Brilhartas (J. Brillhart) ir M. Morisonas (M.A. Morrison) rado, jog

$$F_7 = 340\,282\,366\,920\,938\,463\,463\,374\,607\,431\,768\,211\,457 =$$
$$= 59\,649\,589\,127 \cdot\ 5\,704\,689\,200\,685\,129\,054\,721.$$

1980 m. R. Brentas (R. P. Brent), Dž. Polardas (J. M. Pollard) parodė, kad F_8 dalijasi iš skaičiaus

$$604\ 944\ 512\ 477\cdot 2^{11}+1=1\ 238\ 926\ 361\ 552\ 897.$$

Žinoma, kad F_n, kai

$$\begin{aligned} n = & 9,\ 10, \ldots,\ 23,\ 36,\ 38,\ 39,\ 55,\ 63,\ 73,\ 81,\ 117,\ 125,\ 144,\\ & 150,\ 207,\ 226,\ 228,\ 260,\ 267,\ 268,\ 284,\ 316,\ 452,\ 1945, \end{aligned}$$

yra sudėtiniai, tačiau daugelio iš jų nėra žinomi dalikliai. Visi iki šiol ištirti skaičiai, išskyrus pirmuosius penkis, yra sudėtiniai. Štai apie F_{1945} žinoma, kad jis yra sudėtinis ir net žinomas vienas jo daliklis $5\cdot 2^{1947}+1$. Šios žinios gali būti jau kiek senstelėjusios, nes matematikai randa vis naujų metodų tiems skaičiams tirti. Tobulėja ir kompiuteriai.

Šiais skaičiais buvo domimasi dėl kelių priežasčių. Viena iš jų susijusi su klasikine geometrijos problema. Jau senovėje mokėta nubrėžti, naudojantis tik skrietuvu ir liniuote, kai kuriuos taisyklinguosius daugiakampius. Liniuote galime per du duotuosius taškus nubrėžti tiesę, o skriestuvu nubrėžti duotojo spindulio apskritimą su centru duotajame taške. Vartodami tuos du brėžimo įrankius, galime spręsti daug brėžimo uždavinių. Vidurinės mokyklos matematikos kurse nagrinėjama, kaip skriestuvu ir liniuote galime padalyti kampą pusiau, per duotąjį tašką nubrėžti atkarpą, statmeną duotajai tiesei, ir t.t. Amžiams bėgant, buvo randama vis daugiau ir daugiau brėžimo uždavinių, kuriuos buvo galima spręsti skriestuvu ir liniuote.

Jau senovėje mokėta taip įbrėžti į skritulį taisyklinguosius trikampius, keturkampius (kvadratus), penkiakampius. Kadangi taip galima dalyti kampą pusiau, brėžė ir taisyklinguosius aštuoniakampius, šešiolikakampius ir, apskritai, 2^n-kampius. Taip pat brėžė taisyklinguosius šešiakampius, dvylikakampius ir, apskritai, $2^n\cdot 3$-kampius, dešimčiakampius, dvidešimčiakampius ir, apskritai, $2^n\cdot 5$-kampius. Atėmę iš šeštadalio apskritimo jo dešimtąją dalį, gavo jo penkioliktąją dalį. Taip galėjo brėžti taisyklingąjį įbrėžtinį į skritulį penkiolikakampį ir, žinoma, $2^n\cdot 15$-kampius.

Sudarysime tokių taisyklingųjų įbrėžtinių į skritulį daugiakampių lentelę, kai skritulio spindulys yra 1. Apsiribosime kraštinių skaičiumi iki 24.

Kraštinių skaičius	Kraštinės ilgis
3	$\sqrt{3}$
4	$\sqrt{2}$
5	$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
6	1
8	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$
10	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$
12	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$
15	$\frac{1}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$
16	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
20	$\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)}}$
24	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Deja niekaip nesisekė skriestuvu ir liniuote nubrėžti taisyklingąjį septyniakampį arba vienuolikakampį. Ir taip buvo porą tūkstančių metų – brėžti kitus taisyklinguosius daugiakampius be tų, kuriuos mokėta senovėje, vis nesisekė.

Tačiau 1796 m., dar nesulaukęs devyniolikos metų, Gėtingeno (Goettingen) universiteto matematikos studentas Karlas Gausas, apie kurį jau kalbėjome, galutinai išsprendė šį klausimą. Tai buvo jo pirmas rimtas mokslinis atradimas. Vėliau Gausas tapo vienu iš žymiausių XIX amžiaus matematikų. Matematika praeityje dažnai būdavo vadinama mokslų karaliene (lot. *regina scientiarum*). O Gausą tituluodavo matematikų kunigaikščiu (lot. *princeps mathematicorum*).

Gauso gabumai išryškėjo dar vaikystėje, kai jis mokėsi pradžios mokykloje. Pasakojama tokia istorija. Tais laikais mokytojui tekdavo dirbti iš karto su keliais skyriais (ir mano mokymosi laikais taip buvo). Kartą, norėdamas užimti mažojo Karlo skyriaus mokinius, kol jis pats dirbo su kitais skyriais, mokytojas liepęs vaikams rasti visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 100 sumą. Manė, kad vaikams ilgam užteksią darbo. Tačiau už kelių minučių pastebėjęs, jog mažasis Karlas nenustygsta ramiai savo vietoje. Paklausęs Karlą, kodėl tas nedirbąs, susilaukęs atsakymo, jog jis jau radęs reikiamą sumą, būtent 5050. Mat, mažasis talentingasis vaikyščias pastebėjęs, jog užtenka sudėti po du skaičius, lygiai nutolusius nuo skaičių sekos pradžios ir nuo galo; kiekvienu atveju gausis suma 101: $1+100=101,\ 2+99=101, \ldots,\ 50+51=101$. Tokių skaičių porų bus iš viso 50. Taigi ieškomoji suma bus $101 \cdot 50 = 5050$.

Tačiau grįžkime prie taisyklingųjų daugiakampių. Gausas įrodė, kad skrietuvu ir liniuote galima nubrėžti tokius ir tik tokius taisyklinguosius daugiakampius su *pirminiu* kraštinių skaičiumi, kai tas skaičius yra Ferma pirminis skaičius, t.y., kai jis yra pavidalo $2^{2^n}+1$. Atvejį $n=0$ atitinka taisyklingasis trikampis, atvejį $n=1$ – taisyklingasis penkiakampis, atvejį $n=2$ – taisyklingasis septyniolikakampis, o $n=3$ – taisyklingasis daugiakampis su 257 kraštinėmis. Toliau eitų taiyklingasis daugiakampis su 65 537 kraštinėmis.

Jau tada buvo žinoma, kad skriestuvu ir liniuote galima nubrėžti tik dydžius, kurie užrašomi, pasinaudojant sudėties, atimties, daugybos, dalybos ir kvadratinės šaknies traukimo veiksmais, jei jie pavartojami baigtinį skaičių kartų su sveikaisiais skaičiais. Gausas rado, kad taisyklingojo įbrėžtinio į vienetinį skritulį septyniolikakampio kraštinė yra lygi

$$\frac{1}{4}\sqrt{2\left(17-q-\sqrt{34-2q}-2\sqrt{17+3q-\sqrt{34-2q}-2\sqrt{34+2q}}\right)}.$$

Čia pažymėjome $q=\sqrt{17}$, kad formulė būtų trumpesnė ir tilptų į vieną eilutę.

Neužilgo Gausas įrodė, kad į skritulį galima įbrėžti taisyklinguosius daugiakampius tada ir tik tada, kai jų kraštinių skaičius yra pavidalo

$2^k p_1 p_2 \dots p_s$, k – sveikas neneigiamas skaičius, o $p_1, p_2. \dots, p_s$ yra Ferma pirminiai skaičiai.

Vadinasi, tarp taisyklingųjų daugiakampių su kraštinių skaičiumi, mažesniu už 100, nubrėžti liniuote ir skriestuvu galima tuos, kurių kraštinių skaičius yra

$$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 15,\ 16,\ 17,\ 20,\ 24,\ 30,$$
$$32,\ 34,\ 40,\ 48,\ 60,\ 64,\ 68,\ 80,\ 96.$$

Po kiek laiko Gauso nurodytu būdu matematikas Rišelo nubrėžė taisyklingąjį 257-kampį. Brėžinys užima 80 puslapių. Dar po kiek laiko Hermes nubrėžė ir taisyklingąjį 65 537-kampį. Jo brėžiniai telpa gana dideliame lagamine ir saugomi Gėtingene.

Po Gauso mirties Gėtingene jam buvo pastatytas paminklas, kurio pjedestalo skersinis pjūvis yra taisyklingojo septyniolikakampio pavidalo. Jei kam tektų lankytis Gėtingene, patartume tarp kitų miesto įžymybių aplankyti ir tą paminklą.

9. MERSENO SKAIČIAI

Ferma amžininkas prancūzų matematikas ir fizikas M. Mersenas (Marin Mersenne, 1588–1648) tyrė skaičius pavidalo $M_p = 2^p - 1$ ir ieškojo, kada jie yra pirminiai. Tam būtinai reikia, kad pats skaičius p būtų pirminis.

Šiais skaičiais pradėta domėtis dar Antikos laikais. Su jais susiję vadinamieji *tobulieji skaičiai*. Natūralusis skaičius n vadinamas tobuluoju, jei visų jo daliklių, mažesnių už n, daliklių suma yra lygi jam pačiam. Mažiausias toks skaičius yra 6, nes jo daliklių 1, 2, 3 suma $1 + 2 + 3 = 6$. Krikščionių teologas ir filosofas Augustinas (354–430) grindė pasaulio sukūrimą per šešias dienas tuo, kad Dievas savo darbo tobulumą norėjęs išreikšti skaičiaus 6 tobulumu.

Jau Euklidas žinojo, kad skaičius $2^{p-1}\bigl(2^p - 1\bigr)$ yra tobulasis, jei daugiklis skliausteliuose yra pirminis, t. y. Merseno skaičius. Iš tikrųjų to skaičiaus dalikliai, mažesni už jį, yra

$$1,\ 2,\ 4, \ldots,\ 2^{p-1},\ 2(2^p - 1),\ 4(2^{p-1} - 1), \ldots,\ 2^{p-2}(2^p - 1),$$

o jų suma

$$\begin{aligned}&(1 + 2 + 4 + \ldots 2^{p-1}) + (1 + 2 + 4 + \ldots 2^{p-1})(2^p - 1) = \\ &= (2^p - 1) + (2^{p-1} - 1)(2^p - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1).\end{aligned}$$

Vadinasi, tas skaičius yra tobulasis.

Po 2000 metų L. Oileris įrodė, kad visi *lyginiai* tobulieji skaičiai yra nusakomi Euklido formulės. Iki šiol nėra išspręstas klausimas, ar egzistuoja nelyginiai tobulieji skaičiai. Žinoma tik, kad jei jų esama, tai jie turi būti labai dideli skaičiai.

Jau Antikos laikais buvo žinoma, kad $2^p - 1$ yra Merseno skaičiai, kai $p = 2,\ 3,\ 5,\ 7$. O 1985 m. buvo žinomas 31 pirminis Merseno skaičius. Pateiksime jų lentelę, atradėjų pavardes rašydami originaliąja rašyba.

p	Skaitmenų skaičius	Atradėjas, atradimo metai
2	1	Antikos laikais
3	1	Antikos laikais
5	2	Antikos laikais
7	3	Antikos laikais
13	4	Cataldi, 1588
17	6	Cataldi, 1588
19	6	Cataldi, 1588
31	10	Euler, 1772
61	19	Pervušin, 1883
89	27	Fauquembergues, Powers, 1911
107	33	Fauquembergues, Powers, 1914
127	39	Lucas, 1876
521	157	Lehmer, Robinson, 1952
607	183	Lehmer, Robinson, 1952
1279	386	Lehmer, Robinson, 1952
2203	664	Lehmer, Robinson, 1952
2281	687	Lehmer, Robinson, 1952
3217	969	Riesel, 1957
4253	1281	Hurwitz, Selfridge, 1961
4423	1332	Hurwitz, Selfridge, 1961
9689	2917	Gillies, 1963
9941	2993	Gillies, 1963
11213	3376	Gillies, 1963
19937	6002	Tuckerman, 1971
21701	6533	Nickel, Noll, 1978
23209	6987	Nickel, Noll, 1978
44497	13395	Slowinski, 1979
82643	25962	Slowinski, 1979
110503	33265	Colquitt, Welsh, 1988
132049	39751	Slowinski, 1983
216091	65050	Slowinski, 1985
6972593	2098960	Nayan Hajatwala ir kt., 1999

E. Luka (Edouard Lucas) nurodytasis skaičius yra pats didžiausias Merseno skaičius, rastas be elektroninių skaičiavimo mašinų.

Norai rasti vis didesnius pirminius skaičius nėra vien rekordų vaikymasis. Pastaraisiais dešimtmečiais paaiškėjo, jog dideli pirminiai skaičiai rado labai svarbių praktiškų taikymų. Apie tai pakalbėsime kitame skyrelyje.

10. PIRMINIAI SKAIČIAI IR KRIPTOGRAFIJA

Prieš keliolika metų JAV mokslinėje spaudoje ir net laikraščiuose bei plačiajai visuomenei skirtuose žurnaluose ėmė rodytis straipsnių, aptariančių matematinių tyrinėjimų laisvę. Iš karto atrodė keista, kad buvo kalbama apie vieną skaičių teorijos sritį – pirminius skaičius. Juk net tarp dalies matematikų paplitusi nuomonė, kad kas jau, o skaičių teorija yra tik taurus proto žaidimas, tolimas taikymams. Žinoma, taip gali kalbėti tik žmonės, nepakankamai įsigilinę į dalyką, netoli tepažengę matematikos moksluose. Ir apie pačią matematiką neretai taip buvo kalbama. Ne taip seni laikai, kai, pasirodžius elektroninėms skaičiavimo mašinoms ir pradėjus kalbėti apie matematikos metodų taikymą ekonomikoje, net Lietuvoje kai kurie ekonomistai šaukte šaukė, kad matematika jų moksle iš principo negali būti taikoma.

Tačiau grįžkime prie amerikiečių spaudos. Viename iš populiarių straipsnių buvo šmaikščiai rašoma, jog fizikai praradę savo nekaltybę ir laisvę nuo valdžios kontrolės, kai Los Alamose 1945 metais buvusi pagaminta pirmoji atominė bomba. Biologams toks laikas atėjęs 1976 m., kai Nacionalinis sveikatos institutas pradėjęs reguliuoti eksperimentus su dezoksiribonukleino rūgštimi (DNR). Matematikai iki tol buvę laisvi nuo suvaržymų. Tačiau atėjęs laikas, kai Nacionalinė saugumo agentūra paprašiusi vyriausybės ir gavusi sutikimą iš anksto, prieš publikuojant, peržiūrėti darbus, susijusius su kriptografija. Keisčiausia, kad ši agentūra pradėjusi finansuoti darbus, tyrinėjančius sveikųjų skaičių skaidymą pirminiais daugikliais. Juk šis uždavinys atrodo toks elementarus. Jį spręsti mokoma net pradinėse vidurinės mokyklos klasėse.

Ir taip buvo ne tik JAV. Autorius žino, kad nemaža grupė labai kvalifikuotų Maskvos matematikų – skaičių teorijos specialistų – turėjo slaptas gerai apmokamas ūkiskaitines sutartis tokio tipo uždaviniams nagrinėti. Kai kurie iš jų buvo gavę net aukščiausius valstybės apdovanojimus, buvo išrinkti Mokslų akademijos nariais, nors šiaip savo viešais mokslo darbais buvo mažai težinomi.

Taip atsitiko todėl, kad pirminiai skaičiai ir skaičių skaidymas pirminiais daugikliais vaidina esminį vaidmenį naujoje modernioje matematinėje kriptografinėje schemoje.

Kriptografija (iš graikų kalbos: κρυπτός – paslėptas, γράφειν – rašyti) – tai rašymo būdas, kuriuo įslaptinamas tekstas. Kriptografijos priemonės yra sutartiniai ženklai arba skaičiai, kitõs abėcėlės raidės, raidžių praleidimai ir pakeitimai, rašymas atbuline tvarka ir t.t. Taip parašytas tekstas suprantamas tik tą rašymo būdą žinantiems asmenims.

Slaptus šifrus vartojo jau senovės egiptiečiai, graikai ir romėnai. Jie buvo labai paplitę ir vėliau, ypač 16–jame šimtmetyje. 1595 m. Sforcos (Sforza) dinastijos (iš jų kilusi Lietuvos Didžiojo kunigaikščio Žygimanto Senojo žmona Bona, 1494–1557) trijų pirmųjų hercogų sekretorius ir patarėjas Čiko Simoneta (Cicco Simonetta) net parašė pirmąjį traktatą apie slaptus šifrus. Šį faktą miniu dėl sąsajų su Lietuvos istorija. Vėliau ši sritis vis tobulėjo. Atsirado daugybė šifravimo būdų ir vadovėlių.

Šimtmečius kriptografija buvo kariškių sritis. Ja taip pat naudodavosi diplomatai, verslininkai, kartais ir nusikaltėliai. Net mokslininkai savo atradimus šifruodavo, kad kolegos nesužinotų jų esmės. Autorių teisių gynimo komitetų senaisiais laikais nebūta. Atsiradus kompiuteriams, norint apsaugoti mašinų atmintyje sukauptus duomenis bei jų saugų perdavimą, taip pat praverčia šifravimas.

Tarpukario Lietuvoje slaptosios tarnybos, diplomatinės atstovybės taip pat vartojo šifrus. 193l m. net buvo parengtas „Šifravimo vadovėlis“.

Daugelis skaitytojų tikriausiai yra skaitę A. Konano Doilio (Arthur Conan Doyle, 1859–1930) „Užrašus apie Šerloką Holmsą“ ir gal atsimena jo apsakymą „Šokantys žmogiukai“. Beviltiškas įsimylėjėlis rašinėja slaptarašču pranešimus savo širdies damai. Juose raidės pakeistos žmogiukų figūrėlėmis. Sunerimęs moters vyras į pagalbą pasikviečia neprilygstamąjį dedukcijos meistrą Šerloką Holmsą. Pastarasis tuos užrašus iššifruoja. Padaręs prielaidą, jog kiekvienas ženklas reiškia skirtingą raidę ir pasirėmęs raidžių pasikartojimo statistiniais ypatumais, jis vieną po kitos atstato tikrąsias figūrėlių reikšmes. Panašių apsakymų galima rasti Edgaro Po

(Edgar Allan Poe, 1809–1849), Žiulio Verno (Jules Verne, 1828–1905) ir kitų rašytojų kūriniuose.

Paprastai naujos abėcėlės nėra kuriamos. Galima pasinaudoti įprastinėmis, arba, dar paprasčiau, skaitmenimis. Kadangi abėcėlėje raidžių, didžiųjų ir mažųjų, bei skyrybos ženklų (tokiu ženklu laikytinas ir tarpas tarp žodžių) yra tik kelios dešimtys, tai kiekvienam iš jų galima priskirti po skirtingą dviženklį skaičių. Tada bet kurį tekstą galėsime užkoduoti skaičiais. Tačiau tokius tekstus palyginti nesunku perskaityti. Čia tarp dviženklių skaičių ir abėcėlės ženklų esama abipus vienareikšmės atitikties. Jei tekstas pakankamai ilgas, tai, remdamiesi ženklų pasikartojimo dažniais, kurie daugeliui kalbų (ir lietuvių) yra seniai žinomi, galėsime vieną po kitos surasti tuos skaičius atitinkančias raides. Tokio tipo šifras buvo vartojamas jau garsiojo Romos karvedžio Gajaus Julijaus Cezario (Gaius Julius Caesar, 100–44 pr. m. e.).

Šį šifrą galime padaryti žymiai sudėtingesniu. Imame kurį nors fiksuotą skaičių, turintį, sakysime, dešimtį skaitmenų. Suskirstome mūsų užšifruotą skaičiais tekstą į grupes po dešimtį skaitmenų, pradėdami teksto pradžia, ir prie kiekvienos grupės dešimčiaženklio skaičiaus pridedame mūsų pasirinktąjį. Dabar tarp dviženklių skaičių ir abėcėlės raidžių bei skyrybos ženklų abipus vienareikšmės atitikties jau nebus. Nežinant pasirinktojo skaičiaus – „rakto“, perskaityti tekstą bus daug sunkiau. Apie tokį šifravimo būdą kalbama Žiulio Verno „Žangadoje“.

Galima sugalvoti daug ir labai sudėtingų būdų tekstams užšifruoti. Taip užrašytus tekstus sunku perskaityti, ypač jei jie vartojami tik vieną kitą kartą. Kai pranešimai yra ypač svarbūs, vartojami labai sudėtingi šifrai. Patys „raktai“ yra labai saugomi.

Norėčiau papasakoti neseną istoriją iš Antrojo pasaulinio karo laikų, kuri visuomenei pasidarė žinoma, tik praėjus po karo 35 metams. 1938 metais vienas lenkas mechanikas buvo įsidarbinęs Vokietijoje fabrike, kuris gamino, kaip suvokė jaunuolis, slaptą mašiną. Gestapas po kurio laiko išaiškino to mechaniko tautybę. Jis buvo atleistas iš darbo ir grąžintas į Lenkiją. Tačiau jo nutikimai pasiekė anglų žvalgybos ausis. Jaunuolis buvo nugabentas į Paryžių, kur pagamino tos mašinos modelį. Paaiškėjus jos paskirčiai, buvo pasistengta pagrobti iš vokiečių ir visą veikiančią mašiną. Ji buvo pavadinta *Enigma*, (lotyniškas žodis *Aenigma* reiškia „Mįslė“). Tai buvo prietaisas, kuris rašomąja mašinėle spausdinamą tekstą pakeisdavo kitu pagal tam tikras taisykles. Pastarąsias buvo galima kaitalioti.

Atskleistąja paslaptimi anglai suskubo pasinaudoti. Vietovėje Blečery Park (Bletchery Park) netoli Londono subūrė grupę matematikų ir kriptografų, kurių tikslas buvo stengtis iššifruoti vokiečių kariuomenės vadovybės radijo signalais ir kitais būdais perduodamus pranešimus. Tos grupės išradingumo dėka ir dar turint *Enigmą*, pavykdavo atspėti šifravimo sistemos pakeitimus ir atstatinėti tikrąjį pranešimų tekstą. Tai padėjo anglams Dunkirko (Dunkerque) operacijos metu, palengvino kovą su vokiečių aviacija, kai ši skrisdavo bombarduoti Anglijos, leido apgaudinėti vokiečių maršalą Romelį (Erwin Rommel, 1891–1944) Afrikos dykumose, pakeitė įvykius prie Al Alameino, padėjo sunaikinti nacių povandeninį laivyną. Tai palengvino amerikiečiams laimėti gyvybiškai svarbias kovas prie Midvėjo (Midway) salų ir Koralų jūroje, numušti lėktuvą, kuriuo skrido japonų didysis admirolas Jamamoto (Isoroku Yamamoto). Tai leido kai kuriems sąjungininkų generolams atrodyti genijais, o jų priešininkams visiškais mulkiais.

Buvo ir labai sunkių atvejų. 1940 m. vokiečių oro pajėgos bombardavo Koventrį (Coventry) Anglijoje, sugriaudamos miestą ir padarydamos daug žalos civiliams gyventojams. V. Čerčilis (Winston Leonard Spencer Churchill, 1874–1965) būtų galėjęs išsaugoti Koventrį, nes iš anksto žinojo apie vokiečių ataką. Tačiau nusprendė paaukoti nemažai gyvybių, kad neišduotų vokiečiams, jog sąjungininkai iššifravo vokiečių „neįveikiamąjį“ kodą ir dabar žinojo pačius slapčiausius priešo įsakymus bei planus, dažnai pirmiau, negu vokiečių karuomenės vadai frontuose.

Neseniai spaudoje pasirodė pranešimų, jog Antrojo pasaulinio karo metais vokiečių kodus pavyko iššifruoti ir švedų matematikui Arnei Beurlingui. Švedija buvo apsupta kariaujančių valstybių. Išlaikyti neutralumą buvo nelengva. Beurlingo dėka ilgą laiką Švedų vyriausybė sužinodavo apie vokiečių planus ir galėdavo atitinkamai elgtis. Dar anksčiau, kai Tarybų Sąjunga užpuolė Suomiją, A. Beurlingui pavyko atskleisti ir rusų šifrus. Tai labai padėjo suomiams gintis nuo daug kartų didesnės Raudonosios armijos.

Turint galvoje kriptografijos svarbą, darosi suprantama, kodėl JAV Nacionalinio saugumo agentūra taip susirūpino matematikų darbais. Mat, pastaruoju metu rasti iš principo visiškai nauji kodavimo metodai, pagrįsti kai kuriais matematiniais faktais.

Aprašysime bendrais bruožais vieną iš jų.

Tam kodui realizuoti reikia tinkamu būdu parinkti didelį sveiką teigiamą skaičių N ir du kitus sveikus teigiamus skaičius U ir V. Skaičiai N ir U gali būti *vieši*, o skaičius V turi būti *slaptas*. Net pranešimo siuntėjas gali jo nežinoti. Jo reikia tik gavėjui. Kaip tuos skaičius parinkti, paaiškinsime kiek vėliau. Tam prireiks trupučio matematikos. Skaitytojas, kuriam tie samprotavimai pasirodys per sunkūs arba neįdomūs, galės juos praleisti.

Tarkime dabar, kad tuos skaičius jau turime. Dar reikia susitarti, kaip reikšime dviženkliais skaičiais raides bei skyrybos ženklus. Sakykime, raidę A reikšime skaičiumi 01, raidę a – skaičiumi 02, raidę s – skaičiumi 48, tašką – skaičiumi 67 ir t.t. Siunčiamą pranešimą perrašome tais skaičiais. Gausime ilgą skaičių S, kurį reikės užkoduoti ir pasiųsti adresatui. Kad būtų paprasčiau, tarkime, jog tas skaičius yra mažesnis už N, kitaip tariant, nelabai ilgas. Mums reikės ir dar vienos papildomos sąlygos: skaičių S ir N didžiausias bendrasis daliklis turi būti 1.

Dabar jau galime skaičių S užšifruoti. Tuo reikalu keliame jį laipsniu U ir randame gautojo skaičiaus dalybos iš N mažiausią teigiamą liekaną, tarkime, R. Ji ir yra užšifruotas pranešimas, kurį siunčiame adresatui.

Žinoma, jei imtume kelti skaičių S laipsniu U ir gautąjį skaičių dalyti iš N, naudodamiesi tik pieštuku ir atlikinėdami skaičiavimus popieriaus lape, tai tam prireiktų labai daug laiko, darbo ir popieriaus. Mūsų metodas būtų niekam tikęs. Tačiau matematika žino daug būdų, kaip tą darbą suprastinti ir pagreitinti, ypač panaudodama elektronines skaičiavimo mašinas.

Skaičiavimams palengvinti labai praverčia lyginių sąvoka. Ją beveik prieš porą šimtų metų įvedė garsusis K.F. Gausas.

Susipažinsime su ta sąvoka. Jei a ir b – du sveiki (nebūtinai teigiami) skaičiai ir jų skirtumas $a - b$ dalijasi iš sveiko teigiamo skaičiaus m, tai rašome

$$a \equiv b \bmod m.$$

Šį užrašą skaitome taip: „a lygsta b moduliu m“. Štai keletas pavyzdžių: $11 \equiv 5 \bmod 3$, nes $11-5 = 3 \cdot 2$; $15 \equiv 1 \bmod 7$, nes $15-1 = 14 = 7 \cdot 2$; $-24 \equiv 0 \bmod 8$, nes $-24-0 = -24 = 8 \cdot (-3)$.

Lyginiai turi savybių, kurios yra analogiškos lygybių savybėms. Antai,

$$1)\ a \equiv a \bmod m,$$

$$2)\ \text{jei } a \equiv b \bmod m,\ \text{tai } b \equiv a \bmod m,$$

$$3)\ \text{jei } a \equiv b \bmod m \text{ ir } b \equiv c \bmod m,\ \text{tai } a \equiv c \bmod m,$$

$$4)\ \text{jei } a \equiv b \bmod m \text{ ir } c \equiv d \bmod m,\ \text{tai } a+c \equiv b+d \bmod m,$$

$$a-c \equiv b-d \bmod m,\ a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m.$$

Iš 4) savybių išplaukia, kad lyginius tuo pačiu moduliu galima panariui sudėti, atimti, dauginti. Atskiru atveju, jei $a \equiv b \bmod m$ ir c yra sveikas skaičius, tai $a \cdot c \equiv b \cdot c \bmod m$. Kyla klausimas, kada abi lyginio puses galime suprastinti iš to paties dauginamojo. Lengvai įrodoma, jog tai galima daryti tik tada, kai skaičiaus m ir dauginamojo, iš kurio norime prastinti, didžiausias bendrasis daliklis lygus 1. Iš 4) savybės taip pat išplaukia: jei $a \equiv b \bmod m$ ir k yra sveikas teigiamas skaičius, tai $a^k \equiv b^k \bmod m$.

Šios lyginių savybės palengvina suskaičiuoti S^U dalybos iš N liekaną. Tarkime, mums reikia rasti 2^{50} dalybos iš 101 liekaną. Skaičiuojame:

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^4 = 4^2 = 16,$$

$$2^8 = 16^2 = 256 \equiv 54 \bmod 101,$$

$$2^{16} \equiv 54^2 = 2916 \equiv 88 \bmod 101,$$

$$2^{32} \equiv 88^2 = 7744 \equiv 68 \bmod 101.$$

Kadangi 50 = 32+16+2, tai

$$2^{50} = 2^{32} \cdot 2^{16} \cdot 2^2 \equiv 68 \cdot 88 \cdot 4 = 23936 \equiv 100 \bmod 101.$$

Dabar paaiškinsime, kaip adresatas iššifruoja gautąjį pranešimą R. Jis žino, kaip minėjome „raktą“ V. Kelia R laipsniu V ir apskaičiuoja R^V dalybos iš N mažiausią teigiamą liekaną. Ji bus lygi skaičiui S, kurį pasiuntėme! Nuostabu!

Pagaliau paaiškinsime, kaip parenkame skaičius N, U ir V.

Imami du dideli pirminiai skaičiai p ir q, turį, sakysime, po šimtą skaitmenų. Jų sandauga pq ir bus skaičius N. Skaičius N, kaip minėjome, gali būti viešas, tačiau skaičiai p ir q turi būti slapti. Jei skaičius N yra didelis, skaičiams p, q rasti reiktų labai daug laiko.

Toliau parenkamas skaičius U taip, kad jis būtų didesnis už 1 ir jo bei skaičiaus $(p-1)(q-1)$ didžiausias bendrasis daliklis būtų lygus 1. Tokį skaičių nesunku rasti. Tik kodo sudarytojui reikia žinoti skaičius p, q. Galima pavartoti elementarų didžiausio bendrojo daliklio ieškojimo būdą dalinėjimu (kitaip tariant, Euklido algoritmą), kurio mokoma elementariniame aritmetikos kurse. Pakanka imti bet kurį skaičių ir patikrinti, ar jo ir $(p-1(q-1))$ bendrasis didžiausias daliklis yra 1. Jei jis yra didesnis už 1, tai reikia imti tikrinti kitą skaičių. Tokių bandymų reikės nedaug.

Lieka parinkti skaičių V. Tai – sunkesnis uždavinys. Tam reikia išspręsti lygtį $Ux-(p-1)(q-1)y=1$ sveikais teigiamais x, y. Tokie sprendiniai visada egzistuoja. Matematika žino keletą paprastų būdų, kaip juos rasti. Tam tinka ir jau mūsų minėtasis Euklido algoritmas. Jau ieškodami skaičių U ir $(p-1)(q-1)$ didžiausio bendrojo daliklio, mes kartu išsprendžiame ir tą lygtį. Skaičius x ir bus ieškomasis V. Pabrėžiame, kad jį galime rasti, tik *žinodami* skaičiaus N pirminius daliklius.

Nurodysime vieną atvejį, kai tuos skaičius galime apskaičiuoti iš paprastos formulės. Tarkime, kad pirminiai skaičiai p, q yra pavidalo $p = 3r+2, q = 3s+2$; čia r ir s – sveikieji skaičiai. Tada galime imti $U=3, V=6ab+2a+2b+1, y=2$. Siūlome skaitytojui patikrinti, jog U ir V yra minėtosios lygties sprendiniai.

O dabar bus nesunku paaiškinti, kodėl $R^V \equiv S \bmod N$. Mums reikės dar vienos teoremos iš skaičių teorijos. Tai bus atskiras atvejis vadinamosios Ferma–Oilerio teoremos. Jei S ir $N = pq$ didžiausias bendrasis daliklis yra 1, tai ta teorema teigia, jog

$$S^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \bmod N.$$

Todėl

$$R^V \equiv (S^U)^V \bmod N \equiv S^{UV} \quad \bmod N.$$

Tačiau $UV = (p-1)(q-1)y + 1$. Todėl

$$R^V \equiv S^{1+(p-1)(q-1)y} \bmod N \equiv S \cdot (S^{(p-1)(q-1)})^y \bmod N \equiv S \bmod N.$$

Metodui suprastinti reikalavome, kad perduodamasis skaičius S būtų mažesnis už N. O ką daryti, kai taip nėra? Išeitis čia paprasta. Reikia skaičiaus S skaitmenis suskirstyti į blokus taip, kad kiekvieno bloko skaitmenų reiškiamas skaičius būtų mažesnis už N. Kiekvieną bloką anksčiau aprašytu būdu pasiųsti adresatui. Pastarasis juos atskirai iššifruoja ir gauna visą pranešimo tekstą.

Pirminių skaičių yra be galo daug. Tačiau nustatyti, ar kuris nors skaičius yra pirminis, ypač jei jis yra didelis, nėra paprasta. Paprasčiausias būdas yra mėginti tą skaičių dalinėti iš eilės iš skaičių 2, 3, 4, 5 ir t. t. Tai labai ilgas ir varginantis darbas. Tačiau matematika yra radusi ir geresnių būdų. Jie nepalyginamai spartesni, nors ir sudėtingi. Taikyti juos galima, tik turint sparčius kompiuterius. Ir metodai, ir kompiuteriai sparčiai tobulėja. Šiuo metu nustatyti, ar skaičius, užašomas keliomis dešimtimis skaitmenų, yra pirminis, užtenka sekundės dalių, jei skaičiuojama pačiomis galingiausiomis mašinomis, arba kelių sekundžių, jei vartojame paprastus asmeninius kompiuterius. O prieš dešimtį metų reikėjo kelių minučių. Aprašomojo metodo esmė yra ta, kad didelius skaičius suskaidyti pirminiais daugikliais yra sunku. Nepaisant didžiulės pažangos, didelių skaičių skaidymas ir šiandien dar reikalauja daug laiko, vartojant net pačius galingiausius kompiuterius. Antai, norint suskaidyti skaičių, turintį 50 skaitmenų, panaudojant moderniausius metodus ir sparčiausias skaičiavimo mašinas, reikia maždaug 1 minutės, o septyniasdešimtženkliui – jau maždaug 7 valandų, devyniasdešimtženkliui skaičiui – 4 dienų, o šimtaženkliui – net ištiso mėnesio. Jei $n = pq$ ir pirminiai skaičiai p ir q turi po šimtą dešimtainių ženklų, tai, žinant n, pirminiams p ir q surasti dar ir dabar reiktų milijardų metų. O neturint tų pirminių daliklių, negalima rasti šifravimo „rakto“ V.

11. SKAIČIUS π

1891 m. vidury A. Baranauskas susidomi geometrijos klausimais. Ypač jį patraukė skaičiaus π – apskritimo ilgio santykio su skersmeniu – skaitinė reikšmė. Taip šį santykį 1706 metais pradėjo žymėti anglų matematikas V. Džonsas (William Jones) iš analogijos su graikų kalbos žodžiu $\pi\epsilon\rho\iota\varphi\epsilon\acute{\iota}\rho\epsilon\iota\alpha$, reiškiančiu apskritimą. Uždavinys siekia gilios senovės laikus. Seniai suvokta, kad tas santykis visuose apskritimuose yra tas pats. Šio skaičiaus reikia praktiniams skaičiavimams. Pirmosios jo reikšmės tikriausiai buvo gautos tiesioginiais matavimais.

Buvo laikoma, kad π reikšmė yra 3. Tai rodo Senojo Testamento ([45], Trečioji karalių knyga, 7:23) pasakojimas apie Saliamono šventyklos statybą: *„Jis nuliejo taipgi jūrą, turėjusią dešimtį mastų nuo vieno krašto iki kitam, aplinkui apskritą; ji buvo penkiais mastais aukšta ir trijų dešimtų mastų juostele apriesta aplinkui“*. Tokia pat reikšmė buvo vartojama ir kitose senovės kultūros centruose – Senovės Kinijoje, Senovės Indijoje.

Apie 2000 m. prieš mūsų erą Mezopotamijos molinėse lentelėse randame to skaičiaus apytikrę reikšmę $3\frac{1}{8} = 3.125$. Apie tą patį laiką ar kiek anksčiau viename iš senovės egiptiečių papirusų buvo teigiama, kad skritulio su skersmeniu 9 plotas lygus kvadrato su kraštine 8 plotui. Iš čia išplaukia, kad π reikšmė turėtų būti lygi 256/81=3.1604... Rindo papiruse (2000–1800) esama ir kitos π reikšmės: 19/6 = 3.166...

Vėliau pasirodo tikslesnės π reikšmės.

Dar V–IV amžiuje prieš mūsų erą graikų mokslininkas Antifonas (Antifonos) ir kiti rado būdą skaičiaus π artutinėms reikšmėms surasti. Tam jie siūlė panaudoti įbrėžtinius į apskritimą ir apibrėžtinius apie jį daugiakampius. Tą idėją įgyvendino žymusis Senovės graikų matematikas Archimedas (287?–212). Jis ėmė įbrėžtinius į apskritimą bei apibrėžtinius apie jį taisyklinguosius daugiakampius. Jų perimetrai, kai didinsime kraštinių skaičių, artės prie apskritimo ilgio.

Lengviausia didinti daugiakampio kraštinių skaičių, jį dvejinant, nes tuo atveju esama paprastų formulių, kurios sieja daugiakampių kraštines. Tarkime, jog tiriamojo apskritimo spindulys yra 1, įbrėžtinio taisyklingojo n-kampio kraštinė yra a_n, o apibrėžtinio taisyklingojo n-kampio kraštinė yra b_n. Teisingos formulės

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}},$$
$$b_n = \frac{2a_n}{\sqrt{4 - a_n^2}}.$$

Jei žinome taisyklingojo k-kampio kraštinę, tai, pakartotinai taikydami tas formules, galime rasti kraštines taisyklingųjų daugiakampių su $k.2^n \quad (n = 2, 3, \ldots)$ viršūnių skaičiumi. Įbrėžtinių daugiakampių perimetrai įvertina 2π iš apačios, o apibrėžtinių – iš viršaus.

Kaip žinome, taisyklingojo įbrėžtinio šešiakampio kraštinė yra 1. Archimedas, dvejindamas kraštinių skaičių, apskaičiavo taisyklingųjų įbrėžtinių bei apibrėžtinių daugiakampių su 12, 24, 48, 96 kraštinėmis perimetrus. Iš čia gavo nelygybes

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

Pirmoji iš tų trupmenų yra $3.1408\ldots$, o antroji $3.1428\ldots$ Esama žinių, kad vėlesniame darbe, deja neišlikusiame, Archimedas rado dvi dar tikslesnes artutines π reikšmes

$$\frac{211\ 882}{67\ 441}(= 3.141\ 5904\ldots) < \pi < \frac{195\ 882}{62\ 351}(= 3.141\ 6016\ldots).$$

Astronomas Klaudijus Ptolemėjas iš Aleksandrijos (Klaudios Ptolemaios, 85?– 165?) žymus tuo, kad sukūrė heliocentrinę planetų sistemą. Iš 720-kampio jis rado taip pat, jog

$$\pi \approx \frac{377}{120} = 3.141666....$$

Kitas Aleksandrijos matematikas Heronas pirmajame mūsų eros amžiuje pateikia vėliau indų gautą π reikšmę $\sqrt{10}$. Indų matematikas Aryabata (Aryabhata, 476–550?) randa tą pačią reikšmę $\frac{377}{120}$, kaip ir Ptolemėjas.

Penktajame mūsų eros amžiuje kinų matematikas Dzu Čungdži apskaičiavo, jog π apytiksliai lygus

$$355/133 = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2} = 3.1415929...$$

Tai jau gana tiksli reikšmė.

Šeštajame mūsų eros amžiuje Indijoje buvo parašytos džainizmo (vienos iš senųjų religijų) šventosios knygos. Jose galima rasti, kad π lygus $\sqrt{10} = 3.162\ldots$ Tai ta pati reikšmė, kaip ir Herono vartotoji.

Toliau viduramžiais progresas vyko, kaip ir kitose matematikos bei apskritai mokslo srityse, daugiausia islamiškajame pasaulyje. Penkioliktajame amžiuje (apie 1430 m.) persų astronomas ir matematikas Al–Kašy (Džemšid ibn Masud al Kašy, +1436?), apskaičiavęs taisyklingojo daugiakampio su $6 \cdot 2^{27}$ viršūnėmis perimetrą, gavo π su šešiolika dešimtainių ženklų.

Europoje buvo gerokai atsilikta. F. Vietas (François Viétte, 1540–1603) 1579 m. (Vilniaus universiteto įsteigimo metai!), apskaičiavęs $3 \cdot 2^{17}$= 393216-kampio perimetrą, rado skaičių π tik su devyniais tiksliais ženklais. Pats Vietas buvo juristas, tačiau daug laiko pašventęs matematikai ir palikęs reikšmingų atradimų. Jis taip pat dirbo karaliaus Henriko IV kriptoanalitiku. Labai pasitarnavo, iššifravęs daug užkoduotų karaliaus ir Prancūzijos priešininkų slaptų laiškų.

Tais laikais mokslo kalba buvo lotynų kalba. Ja buvo rašomi mokslo veikalai, skaitomos paskaitos universitetuose. Kai kas iš mokslininkų vartodavo net lotyniškas arba lotyniškai skambančias pavardes. Ir šiandien daugelis kolegų iš Vakarų, mane sutikę, klausia, turėdami galvoje mano pavardę, ar ir dabar dar yra išlikęs tas paprotys. Belieka tik paaiškinti, kad lietuvių kalba yra išsaugojusi senas indoeuropietiškas galūnes, kurias daugelis kalbų jau seniai prarado. Vienas tų laikų matematikų – Adrianas Antonis, vartojęs lotynizuotą Adriano Mecijaus pavardę (Metius, 1529–1607), rado jau mūsų minėtą Dzu Čungdži π artutinę reikšmę 355/113. Tačiau olandas Adrianas Romanas (Adriaen van Roomen, 1561–1615) ima $2^{30} = 1\ 073\ 741\ 824$-kampį ir randa π su 15 tikslių ženklų. Į žaidimą įsijungia Ludolfas iš Kelno (Ludolf van Ceulen, 1540–1610), vartodamas vis tą patį Archimedo daugiakampių dvejinimo metodą, 1596 m. iš daugiakampio su $15 \cdot 2^{31}$ kraštinių apskaičiavo π su 20 ženklų. Po jo mirties likusiuose rankraščiuose buvo rasta dar 15 dešimtainių ženklų, gautų pavartojus daugiakampį su 2^{62} krašinėmis. Tai buvo rekordinis tiems laikams rezultatas

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 64338\ 32795\ 0288\ldots$$

Tokiam rezultatui gauti reikėjo įdėti daug ir labai varginančio darbo, kuris tais laikais buvo vertas pasididžiavimo. Savo darbą jis baigė žodžiais: „Kas turi noro, tegul eina toliau“. Savo testamente liepė gautąjį skaičių iškalti jo antkapyje. Amžininkai, pagerbdami didžiulį triūsą patį π pavadino Ludolfo skaičiumi. Deja, nieko nėra amžino šiame pasaulyje. Net antkapio nebeliko. Buvo rasti nauji patogesni metodai skaičiui π apskaičiuoti. Tik matematikos istorijos knygose galima rasti Ludolfo vardą. Jo vardu dabar vadinamas ne pats π, o tik jo rastoji apytikrė reikšmė.

12. KODĖL TAIP ATKAKLIAI IEŠKOTA?

Dėl kurių priežasčių buvo taip atkakliai ieškoma skaičiaus π reikšmės? Vieną priežastį jau minėjome. Jo reikia apskritimo ilgiui apskaičiuoti. Juk daug lengviau išmatuoti apskritimo skersmenį arba spindulį, nei apskritimo ilgį. Jis reikalingas skaičiuojant skritulio plotą, rutulio paviršių bei tūrį ir t.t. Matematikai ir fizikai žino daugybę formulių, į kurias įeina tas skaičius.

Buvo ir kita priežastis. Dar iš Antikos laikų išliko keletas uždavinių, kurių ištisus šimtmečius vis nesisekė išspręsti. Buvo reikalaujama, naudojantis tik skriestuvu ir liniuote: 1) duotąjį kampą padalyti į tris lygias dalis (vadinamoji *kampo trisekcija*), 2) nubrėžti kraštinę kvadrato, kurio plotas lygus duotojo skritulio plotui (*skritulio kvadratūra*), 3) rasti kraštinę kubo, kurio tūris yra du kartus didesnis už duotojo kubo tūrį (*kubo dvigubinimas*). Matematikai rasdavo vis daugiau ir daugiau brėžimo uždavinių, kuriuos buvo galima spręsti skriestuvu ir liniuote. Tačiau mūsų minėtuosius tris uždavinius taip spręsti vis nesisekė. Tik praėjusio šimtmečio gale buvo rasti tų uždavinių sprendimai, deja, neigiami. Buvo įrodyta, kad skrietuvu ir liniuote negalima rasti reikiamų dydžių. Žinoma, tuos uždavinius būtų buvę galima lengvai išspręsti, jei būtų buvę leista naudotis kitais geometriniais prietaisais. Tačiau buvo galimos tik minėtosios žaidimo taisyklės. Jau mūsų minėtasis Platonas grindė tai dievų autoritetu. Antra vertus, tai skatino geometrijos vystymąsi.

Pasakojama tokia istorija. Ją pateikė Eratostenas. Esą Deloso saloje kilęs maras. Salos gyventojai kreipęsi į garsųjį Delfų orakulą patarimo ir susilaukę atsakymo, jog jie turį padvigubinti Apolono auksinio aukuro, turėjusio kubo pavidalą, tūrį, nekeisdami jo formos. Gyventojai ieškoję pagalbos pas Platoną. Pastarasis uždavinio neišsprendęs, bet paaiškinęs orakulo reikalavimų prasmę. Esą dievai užsirūstinę, jog graikai be galo kariaują tarp savęs, užuot vietoje kruvinų kautynių užsiėmę mokslais, ypač geometrija.

Kaip praverstų išgirsti Platono patarimą šių dienų politikams!

Su Platonu siejama jo vardu vadinama Akademija. 385 metais prieš mūsų erą Platonas, po ilgų kelionių, grįžo į Atėnus. Miesto šiaurės rytų pakraštyje pirko namą su sodu. Toje vietovėje kažkada buvo deivės Atėnės šventyklos, o pati vietovė buvusi globojama legendinio senovės herojaus Akademo, kuriam tą žemę dovanojęs kitas legendinis karalius Tezėjas. Todėl skypas buvo pavadintas Akademo vardu. Platonas čia apsigyveno ir įsteigė filosofų mokyklą. Pastaroji gavo akademijos vardą. Vėliau ir iki pat šiol tuo vardu vadinamos mokslo bei meno įstaigos, aukštosios mokyklos, mokslininkų draugijos.

Platonas labai daug nusipelnė matematikos raidai ir labai ją vertino. Prie įėjimo į jo akademiją dargi buvęs iškaltas užrašas:

$$\mu\eta\delta\epsilon\grave{\iota}\varsigma \quad \acute{\alpha}\gamma\epsilon\omega\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\eta\tau o\varsigma \quad \epsilon\grave{\iota}\varsigma\acute{\iota}\tau\omega$$ [1]

Platonas laikė, jog geometrijos studijavimas priartinąs prie nemirtingųjų dievų.

Skaičiaus π tyrinėjimai susiję su skritulio kvadratūra. Jei skritulys turi spindulį R, tai jo plotas yra πR^2. Lygiapločio jam kvadrato kraštinė yra $R\sqrt{\pi}$. Vadinasi, jei norime išspęsti skritulio kvadratūros uždavinį, turime mokėti skriestuvu ir liniuote nubrėžti $\sqrt{\pi}$.

Iš pirmo žvilgsnio paprastas uždavinys pasirodė labai sunkus. Viduramžiais jis buvo laikomas lygiai svarbiu, kaip ir kiti garsiausi tų laikų uždaviniai: sukurti *perpetuum mobile*, rasti *gyvybės eleksyrą* arba *filosofinį akmenį*. Pirmasis iš tų uždavinių reiškė surasti amžinąjį variklį, t.y. mašiną, kuri, vieną kartą paleista, dirbtų iš niekur negaudama energijos. Gyvybės eleksyras turėtų prailginti gyvenimą, padėti išlaikyti amžiną jaunystę. O filosofinis akmuo turėtų padėti paprastus metalus paversti auksu.

Buvo net manoma: kas išspręs skritulio kvadratūros uždavinį, įgis didesnį gamtos reiškinių supratimą, o tai leis jam tvarkyti gamtos jėgas.

Atsirado daugybė kvadratorių, duplikatorių, trisektorių, kurie naujaisiais laikais apipylė mokslo įstaigas klaidingais sprendimais.

[1] (gr.) Kas nemoka geometrijos, tegul čia neįžengia.

Jau 1755 m. Paryžiaus mokslų akademija (vėliau tai padarė ir kitos akademijos bei mokslo draugijos) nutarė jų visai nenagrinėti. Akademija ir nemanė, kad „išradėjai“ padės špagas. Todėl nelikvidavo komisijos, kuri nagrinėdavo gautus rankraščius. Tik kitaip ją pavadino: „Prarastų vaikų komisija“ (prancūzams nestinga humoro). Pasakojama, jog tai įžeidę nevykėlius matematikos mėgėjus ir nedaug tesumažinę jų skaičių. Paprasčiausiai akademijos buvo kaltinamos pavydu, „genialių atradėjų“ nepripažinimu ir pan. Esą už kvadratūros problemos sprendimą būsią išmokėti dideli pinigai. Spaudoje iš tikrųjų kartais pasirodydavo įvairūs sensacingi pranešimai apie galimas premijas. Visais laikais spauda mėgdavo pasigardžiuoti sensacijomis. Buvo atvejų, kai buvo reikalaujama, kad akademijos atsakytų teisme.

Atsirado ir „veiklių žmonių“, norinčių pasipelnyti. Štai, du mitrūs vyrukai atidarė „skritulio kvadratūros biurą“. Prospekte jie rašė: „Nuo pačios pirmosios pasaulio egzistavimo dienos egzistuoja ir skritulio su gerai žinomu daugiakampiu išmatuojamas ir pastovus santykis. Tas santykis lygus $9\frac{179}{200}$. Siųskite savo užsakymus į „Skritulio kvadratūros biurą““. Atsirado nemažai naivių žmonių, kurie mokėjo organizatoriams nustatytą mokestį ir laukė, kada, pagaliau, paaiškės, kas yra skritulio kvadratūra. O mums ir šiandien neaišku, kodėl pasirinktas toks skaičius.

Akademijų atsisakymas nagrinėti atsiunčiamus „sprendimus“buvo pagrįstas noru atsikratyti bergždžio darbo, tačiau nebuvo moksliškai pagrįstas. Devynioliktajame amžiuje buvo išsiaiškinta, kad skriestuvu ir liniuote galima nubrėžti tik reiškinius, kurie užrašomi, pasinaudojant sudėties, atimties, daugybos, dalybos ir kvadratinės šaknies traukimo veiksmais, jei jie pavartojami baigtinį skaičių kartų su sveikaisiais skaičiais. Apie tai mes jau rašėme 8 skyrelyje. Skritulio kvadratūros uždaviniui išspręsti reikia mokėti nubrėžti, kaip minėjome, $\sqrt{\pi}$.

Jau mūsų minėtasis A. Ležandras aštuonioliktojo amžiaus gale įrodė, jog skaičius π yra iracionalusis, t.y. negali būti išreikštas dviejų sveikųjų skaičių santykiu. Tačiau to buvo maža. Klausimas buvo galutinai neigiamai išspręstas vokiečių matematiko F. Lindemano (Karl Luis Ferdinand Lindemann, 1852–1939), 1882 m. įrodžiusio, kad π yra transcendentinis skaičius, t.y. negali būti jokios algebrinės lygties su sveikaisiais koeficientais šaknis. Tai buvo didžiulis matematikos laimėjimas. Miuncheno universiteto bendradarbiai, pagerbdami šį mokslinį žygdarbį, salėje prieš matematikos seminaro auditoriją pastatydino Lindemano biustą ir po jo vardu nubrėžė skritulį, virš kurio užklotas lygiaplotis kvadratas, o pastarojo viduje nupiešta raidė π.

Šiandien skritulio kvadratūra ir panašiais klausimais užsiiminėja tik nepripažinti „išradėjai“, terorizuodami mokslo įstaigų darbuotojus. Prie tų klausimų prisidėjo dar garsioji Ferma problema, pagaliau išspręsta 1996 m. A. Vailso (Andrew Wiles). Su jais ir šių eilučių autoriui teko ne kartą susidurti. Vis atsiranda mažai matematikoje išprususių žmonių, kurie tikisi, mokėdami tik binomo formulę ir žinodami tik elementariąją dalumą teoriją, išpsręsti šią sunkią problemą. Jai išspręsti prireikė pačios sunkiausios šiandieninės matematikos artilerijos. O minėtieji mėgėjai primena primityvų žmogų, kuris, turėdamas tik titnaginį kirvuką, nori pagaminti modernų kompiuterį.

Laimė, tokių žmonių vis mažėja. Matematikoje yra ko veikti ir mėgėjams. Tik reikia pasitarti su labiau kvalifikuotais.

13. POETŲ SKAIČIUS

A. Baranauskas visų tų dalykų nežinojo. Pramokęs tik elementariosios geometrijos, ėmėsi studijuoti skritulį ir ieškoti π reikšmės jos metodais. Su Archimedo metodu jis galėjo susipažinti iš elementariosios geometrijos vadovėlio. Painiais samprotavimais, padaręs klaidą, jis rado, kad duotoji vadovėliuose π reikšmė esanti per didelė, o tikroji turinti būti $3 + 0.1\sqrt{2}$. Apie tai jis pranešė Adomui Jakštui. Pastarasis matematikoje buvo daug labiau prasilavinęs. Buvo baigęs gimnaziją, beveik metus studijavęs Peterburgo universiteto Matematikos gamtos fakultete, pats savarankiškai mokęsis matematikos. Jis nurodė A. Baranauskui klaidą ir papasakojo, kad kadaise tokią apytikrę π reikšmę buvo radęs garsusis „Dieviškosios komedijos" autorius Dantė (Dante Alighieri, 1265–1321). Ji, tiesa, nuo tikrosios π reikšmės skiriasi mažiau negu 0.0002, bet yra tik apytikrė. Taigi, ši apytikslė π reikšmė galėtų būti pavadinta poetų skaičiumi. A. Baranauskas buvo kieto būdo žmogus. A. Jakšto argumentai jo neįtikino. Keliuose laiškuose jis vis pateikinėjo savo miglotus samprotavimus. Net rengėsi rašyti disertaciją ir padovanoti Vatikano observatorijai popiežiaus Leono XIII vyskupavimo sukakties proga. Tačiau ilgainiui, tęsdamas toliau savo tyrinėjimus, įsitikino klydęs. Iš džiaugsmo sukalbėjęs net „*Te, Deum, laudamus*[1]".

Norėdamas gauti tikslesnių π reikšmių, A. Baranauskas apskaičiavo taisyklingųjų daugiakampių kraštines, kai viršūnių skaičius yra 2^n $(n = 2, \ldots, 14)$, $3 \cdot 2^n$ $(n = 1, \ldots, 14)$, $5 \cdot 2^n$ $(n = 1, \ldots, 27)$. Iš daugiakampio su $5 \cdot 2^{27}$ viršūnėmis jis gavo π su 14 teisingų skaitmenų.

Taisyklingųjų daugiakampių metodas skaičiui π ieškoti teoriškai yra gana paprastas, tačiau praktiškai reikalauja daug kruopščių skaičiavimų. Be to, didindami taisyklingojo daugiakampio kraštinių skaičių, ne taip jau

[1] (lot.) Tave, Dieve, garbiname.

greitai artėjame prie π reikšmės. Galima įrodyti, kad

$$0 < 2\pi - p_n \approx \frac{\pi^3}{3n^3} < \frac{1}{10.4n^3}.$$

Čia p_n yra įbrėžtinio taisyklingojo daugiakampio perimetras (spindulys imamas lygus l). Perimetrus patogu skaičiuoti iš formulių

$$P_{2n} = \frac{1}{\frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n}},$$
$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}},$$

kurios lengvai gaunamos iš 11 skyrelyje pateiktųjų a_{2n} ir b_n formulių. Raidėmis P_n čia žymime taisyklingojo apibrėžtinio n-kampio perimetrą.

Turį kišeninius kalkuliatorius gali pamėginti taip apskaičiuoti π.

Šį algoritmą galima dar pagreitinti. Pažymėkime

$$u_n = \frac{2p_n + P_n}{3}.$$

Galima įrodyti, kad

$$0 < u_n - \pi < \frac{15.4}{n^4}.$$

Ši nelygybė taip pat seniai žinoma. Ją įrodė olandų matematikas Kristijanas Hioigensas (Christian Huygens, 1629–1695), kada jam buvo vos 25 metai. Iš jos jau su $3 \cdot 2^{10}$=3072-kampiu galima gauti π su 13 teisingų dešimtainių ženklų, kai tuo tarpu su įbrėžtiniu bei apibrėžtiniu daugiakampiu su tiek pat kraštinių galima gauti tik 7 tikrus ženklus.

Sudarysime lentelę, kuri pailiustruos mūsų teiginį. Joje tikrieji skaitmenys atspausdinti juodu šriftu.

n	p_n	P_n	$\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}P_n$
3	2.29807 621	5.19615242	**3**.464101615137
6	**3**.00000000	**3**.46410161	**3.1**54700538379
12	**3.1**0582854	**3**.21539030	**3.14**2349130544
24	**3.1**3262861	**3.1**5965994	**3.141**639056219
48	**3.1**3935020	**3.14**608621	**3.14159**5540408
96	**3.141**03195	**3.14**271459	**3.141592**83380
192	**3.141**45247	**3.141**87304	**3.1415926**64850
384	**3.1415**5760	**3.141**66274	**3.14159265**4293
768	**3.1415**8389	**3.141**61017	**3.141592653**633
1536	**3.14159**046	**3.14159**703	**3.1415926535**92
3072	**3.141592**10	**3.14159**374	**3.141592653589**

14. BEGALINĖS TRUPMENOS, SANDAUGOS IR EILUTĖS

Patogesnių metodų π apskaičiuoti rado matematinė analizė, suklestėjusi XVII šimtmečio gale ir XVIII pradžioje. Ši teorija naudoja perėjimo prie ribos sąvoką. Tai leido jai tirti sumas su be galo dideliu dėmenų skaičiumi ir panašius reiškinius – begalines eilutes, sandaugas bei trupmenas. Vidurinėje mokykloje tokie reiškiniai paprastai nėra nagrinėjami. Todėl kai kuriems skaitytojams šios sąvokos gali būti nežinomos. Tačiau tuos reiškinius reikia suprasti gana paprastai ir natūraliai. Jais reiškiamas tas ar kitas skaičius. Paėmę keletą pirmųjų narių tuose reiškiniuose, gauname to skaičiaus artutinę reikšmę. Kuo daugiau narių paimsime, tuo tikslesnę gausime to skaičiaus reikšmę. O mokantiems daugiau matematikos pasakysime, kad tie reiškiniai turi konverguoti: jų dalinės trupmenos, dalinės sandaugos, dalinės sumos konverguos į tą skaičių.

Jau mūsų minėtas F. Vietas rado begalinę sandaugą

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots$$

Naudodami žinomą formulę

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

tą formulę galime parašyti taip

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Ji nėra patogi skaičiavimams. Atsirado ir geresnių. 1655 m. Dž. Valis (John Wallis, 1616–1703) rado daug patogesnę formulę

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1^2}\cdot\frac{4^2}{3^2}\cdot\frac{6^2}{5^2}\cdot\frac{8^2}{7^2}\cdots$$

Kitas anglas V. Brounkeris (William Brouncker, 1620?–1684) rado begalinę trupmeną

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}$$

Begalinių trupmenų π apskaičiuoti rado ir L. Oileris:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1.3}{4 + \cfrac{3.5}{4 + \cfrac{5.7}{4 + \cdots}}}}$$

ir

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{7 + \cfrac{1.3}{8 + \cfrac{3.5}{8 + \cfrac{5.7}{8 + \cdots}}}}$$

Tačiau patogesnės skaičiavimams buvo begalinės eilutės. Škotų matematikas Dž. Gregoris (James Gregory, 1638–1675) rado eilutę

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

kuri turi prasmę, kai $-1 \leq x \leq 1$. Kai $x = 1$, gauname

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{10}$$

Šią eilutę dar 1673 m. buvo radęs vokiečių matematikas G. Leibnicas. Deja, π apskaičiuoti ji nelabai tinka. Norint gauti π su 2 dešimtainiais ženklais, reiktų imti daugiau, kaip 300 narių, o dvidešimčiai ženklų gauti prireiktų penkių milijardų narių.

Geriau tinka kita eilutė, gaunama iš tokios

$$\arcsin\ x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Ji turi prasmę, kai $-1 \le x < 1$. Kai $x = 0.5$, iš jos gauname

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3}\frac{1}{2^3} + \frac{1.3}{2.4.5}\frac{1}{2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\frac{1}{2^7} + \cdots$$

Minėtas garsusis anglų matematikas I. Niutonas iš šios eilutės rado 154 skaičiaus π ženklus.

Galima ir arktangento eilutę panaudoti π skaičiavimui. Imkime $x = 1/\sqrt{3}$. Gausime eilutę

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3^2 5} - \frac{1}{3^3 7} + \frac{1}{3^4 9} - \cdots\right).$$

Naudodamasis šia eilute, anglų astronomas A. Šarpas (Abraham Sharp, 1651–1742) gavo π su 72 skaitmenimis. Nesunku suskaičiuoti kaip greitai konverguoja ši eilutė. Pažymėkime

$$T_n = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + (-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Tada

$$\left|T_n - \pi\right| < \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{n-1/2}}.$$

1719 m. prancūzas T. Lanji (Thomas Fantet de Lagny, 1660-1734), naudodamasis $\arcsin\ x$ eilute, kai $x = 1/2$, rado iš karto 72, o vėliau net 128 ženklus (deja, 113-sis buvo klaidingas).

Tikslesnėms π reikšmėms gauti patogesnės pasirodė arktangentų kombinacijos. Mums pravers paprasta formulė apie arktangentų sumas. Gerai žinoma iš vidurinės mokyklos trigonometrijos kurso formulė

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta},$$

teisinga visiems realiesiems α ir β. Pažymėję $x := \mathrm{tg}\alpha,\ y := \mathrm{tg}\beta$, turime

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Iš čia

$$\alpha+\beta=\text{arctg}\frac{x+y}{1-xy},$$

arba

$$\text{arctg } x+\text{arctg } y=\text{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Pažymėję

$$z:=\frac{x+y}{1-xy},$$

gauname paprastą, bet labai naudingą formulę

$$\text{arctg } z=\text{arctg } x+\text{arctg } \frac{z-x}{1+zx}. \tag{11}$$

Pasinaudoję šia formule, (10) eilutę pakeisime sparčiau konverguojančia. Imkime $z=1,\ x=\frac{1}{2}$. Gausime

$$\text{arctg } 1=\text{arctg } \frac{1}{2}+\text{arctg } \frac{1}{3}. \tag{12}$$

Iš (10) gauname formulę, kurią buvo radęs L. Oileris,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}=&\left(1-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\dots\right)+\\ &+\left(1-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\dots\right).\end{aligned} \tag{13}$$

L. Oileris, panaudojęs šią formulę, patikrino Lanji rezultatą ir rado mūsų jau minėtą klaidą.

Mūsų nurodytu keliu galima gauti ir daugiau panašių formulių. (13) formulėje eilutė $\text{arctg}\frac{1}{2}$ konverguoja ne per daug sparčiai. Imkime (11) formulėje $z=\frac{1}{2}, x=\frac{1}{3}$. Gausime

$$\text{arctg } \frac{1}{2}=\text{arctg } \frac{1}{3}+\text{arctg } \frac{1}{7}.$$

Įstatome šią $\text{arctg } \frac{1}{2}$ reikšmę į (12) formulę. Gausime

$$\frac{\pi}{4}=2\text{arctg } \frac{1}{3}+\text{arctg } \frac{1}{7}.$$

Šitaip galime rasti daugybę formulių, tarp jų ir dar greičiau konverguojančių, skaičiui π apskaičiuoti. Tačiau tai paliekame skaitytojui.

Tarp tokių formulių paminėsime Dž. Mečino (John Machin, 1680-1751) 1706 m. rastą formulę

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 4\operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

su kurios pagalba jis rado 100 skaičiaus π ženklų.

Prasidėjo rekordų vaikymasis. G. Vega (Georg Vega, 1756–1802) rado π su 140 ženklų (iš jų 136 tikri). V. Rezerfordas (W. Rutherford) 1841 m., pavartojęs formulę

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg} \frac{1}{8} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99},$$

rado 208 ženklus, tačiau, kaip parodė kitų matematikų skaičiavimai, visi skaitmenys, pradedant 153-ju buvo klaidingi. Tai išaiškino po trejų metų hamburgietis J. Daze (Johann Dase), kuris po dviejų mėnesių skaičiavimų paskelbė 200 tikslių ženklų. Jis vartojo formulę

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}.$$

Gana patogi yra ir formulė

$$\pi = 24\operatorname{arctg} \frac{1}{8} + 8\operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 4\operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Sumažinus arktangento argumentą, padidėja eilutės narių mažėjimo sparta.

1847 m. T. Klausenas (Thomas Clausen) iš Tartu apskaičiavo 250 ženklų, iš kurių 248 teisingi. 1853 m. J. Daze gavo 440 ženklų. Jis aplenkė profesorių Richterį iš Elbingo, kuris buvo gavęs 330 ženklų. Tačiau Richteris skaičiavo toliau. Po metų jis gavo 400 ženklų, o dar po metų – 500. Tačiau rekordą tais laikais pasiekė anglas V. Šanksas (William Shanks), kuris 1853 m. gavo 607 ženklus, o 1873 m., sugaišęs 15 metų, rado net 707 ženklus. Deja, šiais laikais, kai atsirado elektroninės skaičiavimo mašinos, paaiškėjo, jog jau 527 ženklas ir kiti po jo buvo klaidingi.

15. DAR SPARČIAU

Su elektroninėmis skaičiavimo mašinomis tokie skaičiavimai pasidarė paprasti. Paminėsime tik kai kuriuos svarbesnius iš daugelio autorių darbų. Tokie skaičiavimai buvo atliekami nuo pat mašinų atsiradimo pradžios. 1949 m., dar gana primityvia mašina ENIAC, Dž. Noimanas (John von Neumann, 1903–1957), gavo π reikšmę su 2035, o vėliau – su 3089 ženklais. Mašina skaičiavo vos 13 sekundžių. 1958 m. su mašina IBM–701 buvo gauta 10 000 ženklų. 1961 m. buvo rasti jau 100 265 ženklai. Programą sudarė D. Šenksas (Daniel Shanks, 1917–1996) ir Dž. Renčas jaunesnysis (John Ranch jr.). Mašina IBM–7090 skaičiavo 8 val ir 1 min; dar 42 min prireikė pakeisti dvejetainį skaičių dešimtainiu. 1973 m. gegužės 3 d. Ž. Giju (Jean Guilloud) ir Martina Buje (Martine Bouyer) pasistūmėjo dar toliau ir kompiuteriu CDC 7600 suskaičiavo milijoną π reikšmių. Tų pačių metų rugsėjo 3 d. skaičiavimus patikrino. Gauta, kad π yra $3.141592653589793\,.........\,577945851$ (čia vietoje daugtaškio reiktų įrašyti 999 975 skaitmenis). Tas skaičius buvo atspausdintas 200 puslapių knygoje. Buvo kalbama, jog tai pati nuobodžiausia knyga pasaulyje. Skaičiuotojai darbavosi ir toliau.

Praktiniams skaičiavimams tokių didelių tikslumų nereikia. Jei tartume, kad Saulė skrieja apskritimu, ir žinotume to apskritimo spindulio absoliučiai tikslią reikšmę, tai apskritimo ilgiui apskaičiuoti vieno mikrono tikslumu pakaktų 19 skaičiaus π ženklų. Apie tokius tikslumus šiandien nėra jokios prasmės kalbėti. Todėl skaičiavimai paprastai reikalingi ne tiek rekordams siekti (kartais ir jiems), kiek patikrinti skaičiavimo metodams bei pačioms elektroninėms skaičiavimo mašinoms.

Pradžioje buvo naudojami tie patys metodai, kaip ir ankstesniuose skaičiavimuose, t.y. Mečino formulės įvairios modifikacijos, tik patobulinti skaičiavimo algoritmai didelio tikslumo operacijoms kompiuteriais atlikti. Ypač svarbu buvo suprastinti dauginimą. Ir šioje klasikinėje operacijoje buvo rasta daug patobulinimų.

Tačiau dar svarbiau buvo rasti naujus sparčius algoritmus. Jie ir buvo rasti. Štai vienas iš jų. Pažymėkime

$$x_0 = \sqrt{2},\ y_1 = 2^{1/4},\ \pi_0 = 2 + \sqrt{2}.$$

Po to skaičiuojame x_n, y_n, π_n iš rekurentinių formulių

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{2}\Big(\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\Big)\ (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ y_{n+1} &= \Big(y_n\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\Big)\ (n = 1, 2, ...), \\ \pi_n &= \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\pi_{n-1}\ (n = 1, 2, ...). \end{aligned}$$

Gauname, kad

$$|\pi_n - \pi| < 10^{-2^{n+1}}.$$

Kaip matome, procesas konverguoja labai greitai. Kai $n = 4$, gauname π su 323 ženklais. Suskaičiavę π_{19}, turime jau 1 048 576 tikrų ženklų.

Dar spartesnis toks algoritmas

$$\begin{aligned} & y_0 = \sqrt{2} - 1, \quad \alpha_0 = 6 - 4\sqrt{2}, \\ (14)\ & y_{n+1} = \frac{1 - (1 - y_n^4)^{1/4}}{1 + (1 - y_n^4)^{1/4}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ & \alpha_{n+1} = [(1 + y_{n+1})^4\alpha_n] - \\ & \qquad - 2^{2n+3}y_{n+1}(1 + y_{n+1} + {y_{n+1}}^2) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Skaičiai α_n konverguoja į $1/\pi$. Jau $1/\alpha_{15}$ sutampa su π daugiau kaip 2 milijardais ženklų. Paminėsime, jog kiekviena iteracija padvigubina tikrų ženklų skaičių.

O štai dar spartesnis algoritmas. Imkime

$$\begin{aligned} & a_0 = 6 - 4\sqrt{2},\ y_0 = \sqrt{2} - 1, \\ & y_{n+1} = \frac{1 - (1 - y_n^4)^{1/4}}{1 + (1 - y_n^4)^{1/4}}, \\ & a_{n+1} = a_n(1 + y_{n+1})^4 - 2^{2n+3}y_{n+1}(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2). \end{aligned}$$

Šiame algoritme a_n konverguoja į π. Kiekviena iteracija paketurgubina tikrų ženklų skaičių.

Yra ir labai greitai konverguojančių eilučių. Jų rado genialusis indų matematikas S. Ramanudžanas (Srinivasa Ramanujan, 1887–1920). Jos pasidarė žinomos tik neseniai, kai buvo paskelbti visi jo darbai. Tada jos buvo dar patobulintos. Štai viena iš jų

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13\ 591\ 409 + 545\ 140\ 134k)}{(3k)!(k!)^3\ 640\ 320^{3k+3/2}}.$$

Kiekvienas narys prideda maždaug keturiolika teisingų ženklų. Yra ir dar spartesnių.

Ištobulėjo ir elektroninės skaičiavimo mašinos. Paminėsime keletą rezultatų. 1986 m. D.H. Beilis (David H. Bailey) su superkompiuteriu CRAY-2 rado π su 29 360 111 ženklų. Jis vartojo (14) algoritmą. Po metų japonas J. Kanada (Yasumasa Kanada), panaudojęs superkompiuterį NEC SX-2, rado 134 217 700 π ženklų. Mašina skaičiavo 37 val ir rezultatą atspausdino dviejuose tūkstančiuose lapų. 1989 m. D. ir G. Čudnovskiai (David ir Gregory Chudnovsky) su kompiuteriais CRAY–2 ir IBM–3040 apskaičiavo π su 1 011 196 691 skaitmenų. 1995 m. minėtasis Kanada rado π su 6 442 450 938 skaitmenų. Ir po to tikriausiai buvo tęsiami skaičiavimai. Čia rekordų siekti nėra sunku. Reikia tik gero kompiuterio ir laiko.

Esama ir įvairiausių artutinių reiškinių. Kai kurie iš jų labai artimi skaičiui π. Antai

$$\frac{\ln 10}{10^4}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} 10^{-(n/100)^2}\Big)^2$$

duoda π su 18 000, o

$$\frac{1}{10^{10}}\Big(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2/10^{10}}\Big)^2$$

– net su 42 milijardais tikrųjų ženklų.

16. DAR APIE GEOMETRIJĄ

Paminėjome tik nedidelę dalį įvairių formulių bei rezultatų apie skaičių π. Matome, jog jau prieš šimtmečius buvo žinoma jo gana tiksli artutinė reikšmė. Deja, matematinės žinios ne visada pasiekia plačiąją visuomenę. Todėl net ir šiais laikais neapsieinama be visokiausių kuriozų. Nėra ko stebėtis, jei kažkoks magistras E. Gudmenas (Edwin J. Goodman) JAV Indianos valstijos atstovų rūmams 1897 m. pasiūlė įstatymo projektą apie apskritimo ilgio ir skersmens santykį; esą jis turėtų būti lygus $\frac{16}{5} = 3.2$. Tų metų vasario 5 d. Atstovų rūmai vienbalsiai priėmė tą projektą. Jis pateko į Senato komitetą ir būtų virtęs įstatymu, jei paskutinę minutę atsitiktinai apie tai nebūtų nugirdęs Perdiu (Purdue) universiteto profesorius C.A. Waldo ir įsikišęs.

O mano asmeninėje bibliotekoje yra knygelė, išleista praėjusio šimtmečio gale, įrodinėjanti, kad Žemė esanti plokščia.

Tačiau grįžkime prie A. Baranausko.

Sužinojęs apie A. Baranausko geometrines studijas, K. Hosfeldas 1892 m. jam atsiuntė ką tik išėjusią F. Rudijo knygelę [42]. Joje nušviesta skritulio kvadratūros ir skaičiaus π istorija. Iš A. Baranausko laiškų matyti, kad jis šią knygą labai atidžiai studijavo. Čia jis rado ir skaičiaus π skaitmenų skaičiavimus, žymiai pralenkusius jo paties rezultatus.

Čia taip pat rado žinių apie skaičiaus π prigimtį. Jau pats A.Baranauskas buvo suvokęs, kad jo negalima išreikšti jokia racionaliąja trupmena, kitaip tariant, apskritimas ir jo skersmuo yra nebendramačiai. Dar daugiau,– kaip jau minėjome, tas skaičius yra transcendentinis.

Rudijo knygoje jis aptiko vadinamąjį Lamberto „fenomeną“. Mūsų minėtasis J.H. Lambertas viename savo darbų aprašo tokią procedūrą. Imkime skaičių $\frac{\pi}{4} = 0.785\ 398\ 163\ 3\ldots$ ir dalykime 1 iš jo. Gausime 1 ir liekaną $0.214\ 601\ 836\ 6\ldots$. Toliau dalykime $\frac{\pi}{4}$ iš tos liekanos $0.2146018366\ldots$. Gausime sveiką skaičių 3 ir liekaną $0.141\ 592\ 635\ 5\ldots$, t.y. skaičių $\pi - 3$. Stebėtina! Tačiau jokio kuriozo čia nėra. Tas „fenomenas“, kaip pastebėjo A. Baranauskas savo 1892 12 18 d, laiške A. Jakštui, yra paprasta tapatybė. Iš tikrųjų, pažymėję pirmąją liekaną r_1, o antrąją r_2, turime

$$1 : \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{r_1}{\frac{\pi}{4}}; \quad \frac{\frac{\pi}{4}}{r_1} = 3 + \frac{r_2}{r_1}.$$

Iš čia

$$r_1 = 1 - \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} = 3r_1 + r_2.$$

Vadinasi,

$$r_2 = \frac{\pi}{4} - 3r_1 = \frac{\pi}{4} - 3\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big) = \pi - 3.$$

Toks pat „fenomenas“, kaip parodė A. Baranauskas, teisingas ir kitiems iracionaliesiems skaičiams. Jis pagrįstai piktinasi, kaip galį rimti matematikai teikti skaitytojmas tokių niekų.

Kaip žinome, lankų bei kampų laipsniai yra smulkinami į minutes bei sekundes: $1^o = 60'$, $1' = 60''$. A. Baranauskui tiksliems skaičiavimams prireikė smulkesnių vienetų. Jis siūlė dar toliau smulkinti: $1'' = 60'''$ (tercijos), $1''' = 60''''$ (kvartos). Tiesa, tokių matų buvo siūlę ir kiti autoriai. Kartais jie ir vartojami.

A. Baranauskas mini studijavęs trigonometrinę funkciją sinus versus $x = 1 - \cos x$ ir radęs įdomių ryšių. Ši funkcija paprastai nėra vartojama. Užtenka funkcijos $\cos x$. A. Baranauskas pramoko ir daugiau trigonometrijos. Žinome, jog jis studijavo ir kitų matematikos veikalų. Viename iš laiškų H. Vėberiui mini garsaus savo laikais K. Volfo (Christian Wolf, 1679–1754) vadovėlio pirmąjį tomą [49].

17. BEGALYBĖ

Dar neseniai būdavo rašoma, kad esama primityvių genčių, kurios turinčios tik skaitvardžius: vienas, du, trys, o toliau einą „daug“. Tačiau ir labiau išprususiems žmonėms retai teateina į galvą, jog esama labai didelių skaičių. O kai kam galvoje slypi įsitikinimas, jog egzistuoja kažkoks pats didžiausias skaičius, už kurio jau negalima skaičiuoti.

Ir A. Baranauskas rašė, kad jaunystėje jo matematikos žinios apsiribojo tuo, ką jis per tris žiemas išmoko pradžios mokykloje ar savarankiškai: skaičiuoti iki bilijono, paprasčiausių aritmetikos veiksmų. Tik daug vėliau sužinojo, kad skaičių yra be galo daug, kad bilijonas nėra paskutinis skaičius.

Šiandien dideli skaičiai jau nedaug mus stebina. Laikraščiuose užtinkame žodžius „milijonas“ ir „milijardas“. Kartais šmėžteli ir „trilijonas“. Kas tie skaičiai? Kaip atsirado jų pavadinimai?

Dideliais skaičiais užsiiminėjo jau Senovės graikų matematikas Archimedas, apie kurį jau kalbėjome. Savo veikale $\psi\alpha\mu\mu\acute{\iota}\tau\eta\varsigma$ („Psammites“ galima būtų išversti „smiltelių skaičiavimas“) jam parūpo rasti skaičių, išreiškiantį kiekį mažučių smiltelių, kuriomis būtų galima užpildyti visą tuo metu suvokiamos Visatos erdvę. Pasirodė, kad tas skaičius mūsų laikais būtų reiškiamas maždaug vienetu su 63 nuliais.

Savo skaičių sistemą Archimedas grindė skaičiumi 10^4, kurį vadino *miriada*. Visus skaičius nuo 1 iki 10^8 (be paskutiniojo) vadino *pirmaisiais* skaičiais, skaičius nuo 10^8 iki $10^{8\cdot 2}$ (be pastarojo) – *antraisiais*, skaičius nuo $10^{8\cdot 2}$ iki $10^{8\cdot 3}$ (be pastarojo) – *trečiaisiais* ir t.t.; skaičius nuo $10^{8\cdot(10^8-1)}$ iki $10^{8\cdot 10^8}$ (be pastarojo) – *miriado-miriadiniais*.

Visus tuos skaičius Archimedas pavadino pirmojo periodo skaičiais. Toliau buvo konstruojami antrojo periodo pirmieji, antrieji ir t.t. skaičiai, kurių vienetu imamas skaičius $10^{8\cdot 10^8}$. Archimedas taip tęsė konstrukciją iki miriado miriadinio periodo. Archimedo sistemoje savo pavadinimus gavo visi skaičiai nuo 1 iki $10^{8\cdot 10^{16}}$. Pastarasis skaičius yra nepaprastai didelis.

Mūsų laikais dideliems skaičiams pavadinti vartojama kita sistema. Skaičiai iki milijono įvairiomis kalbomis turi skirtingus pavadinimus. Tačiau 1 000 000 daugelio kraštų gyventojai vadina vienodai – milijonu. Iš kur tas žodis? XIII šimtmetyje Venecijos pirklys Markas Polas (Marco Polo, ca 1254–1324) pirmasis iš europiečių nukeliavo į Kiniją, aplankydamas ir daug kitų kraštų. Grįžęs dažnai pasakodavo apie savo matytus nuostabius dalykus, vis kartodamas žodį *millione*. Taip jis vadino tūkstantį tūkstančių (nuo lotyniško žodžio *mille*, reiškiančio „tūkstantį“). Klausytojai patį Marką Polą ėmė pravardžiuoti „Marko Millione“.

Žodžiu „milijardas“ vadinamas skaičius 1 000 000 000. Jis kilęs iš prancūzų kalbos. Jo sinonimas yra „bilijonas“. Priešdėlis „bi-“ lotynų kalboje reiškia „dvigubas“, „dvejopas“.

Tolesni dešimtainės skaičiavimo sistemos dideli skaičiai sudaromi iš lotyniško žodžio, reiškiančio skaičių nulių trejetų, kuriuos reikia prijungti prie tūkstančio. Trilijonas reiškia skaičių, 1 000 000 000 000. Čia prie 1 000 prirašomi trys nulių trejetai. Sudarysime lentelę.

Skaičius	Lotyniškas pavadinimas	Didelis skaičius ir jo pavadinimas	
3	tres	10^{12}	trilijonas
4	quattor	10^{15}	kvadrilijonas
5	quinque	10^{18}	kvintilijonas
6	sex	10^{21}	sekstilijonas
7	septem	10^{24}	septilijonas
8	octo	10^{27}	oktilijonas
9	novem	10^{30}	nonilijonas
10	decem	10^{33}	decilijonas
11	undecim	10^{36}	undecilijonas
12	duodecim	10^{39}	duodecilijonas
13	tredecim	10^{42}	tredecilijonas
14	quattuordecim	10^{45}	kvatordecilijonas
15	quindecim	10^{48}	kvindecilijonas
16	sedecim	10^{51}	sedecilijonas
17	septemdecim	10^{54}	septedecilijonas
18	duodeviginti	10^{57}	duodevigintilijonas
19	undeviginti	10^{60}	undevigintilijonas
20	viginti	10^{63}	vigintilijonas

Ši sistema priimta daugelyje Europos kraštų ir JAV. Tačiau Prancūzijoje XV šimtmetyje buvo nutarta skaičius skirstyti skiltimis ne po tris, o po – šešis. Atitinkamai pasikeitė ir pavadinimai: 10^{12} buvo pavadintas bilijonu, 10^{18} trilijonu ir t.t. Tiesa, nuo septynioliktojo šimtmečio vidurio prancūzai nuo tos sistemos atsisakė. Tačiau ji liko iki šiol Vokietijoje ir Anglijoje.

Esama ir didelių skaičių ypatingų pavadinimų. Tai – „gugolas" skaičiui 10^{100} ir „gugolpleksas" skaičiui 10 gugolo laipsniu, t.y. $10^{10^{100}}$, pavadinti. Juos įvedė amerikiečių matematikas Edvardas Kasneris. Jam kartą prireikė sugalvoti vardą skaičiui 10^{100}. Niekas neatėję į galvą, ir jis paklausęs patarimo savo vaikaičio. Tas, nedaug mąstęs, pasiūlęs gugolo vardą.

Yra dar vienas vardas – centilijonas – skaičiui milijonas šimtuoju laipsniu, t.y. $1000000^{100} = 10^{600}$, pavadinti.

Pirminių skaičių tyrinėjimai, o ypač geometrijos klausimai vertė A. Baranauską giliau suvokti begalybės sąvoką, kuri yra ypač svarbi ir be kurios matematika negali apsieiti. Žymiausias pastarųjų laikų matematikas D. Hilbertas (David Hilbert, 1862–1943) teigė, jog niekada joks kitas klausimas taip giliai nejaudinęs žmogaus proto, kaip begalybės problema.

A. Baranauskas 1889 02 05 rašė H. Vėberiui: „*1860 m. buvo man galvon intsimušęs kablys, kurs man tada nemaža galvos sukimo padarė, vargindamas per keletą metų. Ar numeracija turi galą? ir kokį? – Regėjosi, reiktų turėti:* 1. *esant pradžiai, reiktų būti ir galui;* 2. *jos miera 1 (vienas), būdama taip apimta visais kraštais, kad kažin kaip daug kartų didžiausiomis krūvomis bus numeracijon sudėta, vis toj numeracija turės galą ir kraštus;* 3. *jos sužinotojus, žmogaus protas, turi savo sylos ir platumo kraštus, tai negali ji (numeracija) būti be krašto;* 4. *amžianasties (aeternitas, absolute infintum) negalima jokiais skaičiais išrokuoti*".

1892 m. rašo vėl H. Vėberiui: „*Galvočiai nuo senobės po šiai dienai apie šį dalyką galvas tebesuka: vieni erdvės skirstymui galą deda punkte; kiti gi niekindami punktą sako, erdvės skirstymui nesą jokio galo. Aš misliju, jog skirstymas daiktystės, actualis divisibilitas in partes quae actu existunt* [1]*, turi galą punkte; skirstymas gi galybės, divisibilitas potentialis*

[1] (lot.) Aktualusis dalumas į dalis, kurios iš tikrųjų egzistuoja

in partes quae actu non existunt[1]*, yra be jokio galo“.*

Ir dar H. Vėberiui tais pačiais metais: „*Geometrija pripažįsta punktą, ilgumą (liniją), plotą ir storumą. Euklydes aptaro punktą punctum est cujus nulla pars est, linea est longitudo latitudinis expers.*[2]

Žinau, kad galvočiai per amžius apie punktą tikro mokslo išvesti negali. Vieni sako, erdvė esanti dalytina be galo, ir jei esąs punktas, tai mažiausias linijos kąsnelis, turįs be galo daug punktų, kiti gi, punktas esąs dalijimo kraštas ir du milimetru linijos turi dvejatiek punktų, kiek 1 milimetras. Vieni sako linija esanti series punctorum;[3] *kiti gi, fluxus puncti, vestigium puncti.*[4]

Begalybė turi savybių, kurių neturi baigtiniai skaičiai. Sakykime, turime dvi sekas skaičių: visus natūraliuosius ir visus teigiamus lyginius. Ir vienų, ir kitų yra be galo daug. Kurių daugiau? Viena vertus, natūraliųjų skaičių daugiau nei lyginių. Juk yra ir nelyginiai. Antra vertus, pamėginkime parašyti dvi sekas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	...

Kiekvieną pirmosios sekos narį atitinka lygiai vienas antrosios sekos narys, ir atvirkščiai. Išeitų, kad abi sekos turi po vienodą narių skaičių. Išeitų, kad dalis gali būti lygi visumai.

Galima būtų parodyti, kad ir visus racionaliuosius skaičius galima sunumeruoti natūraliaisiais skaičiais. Išeitų, kad visų nesuprastinamų paparastųjų trupmenų tiek pat, kaip natūraliųjų skaičių. Visas begalines aibes, kurių elementus galima sunumeruoti natūraliaisiais skaičiais, vadiname *skaičiomis*.

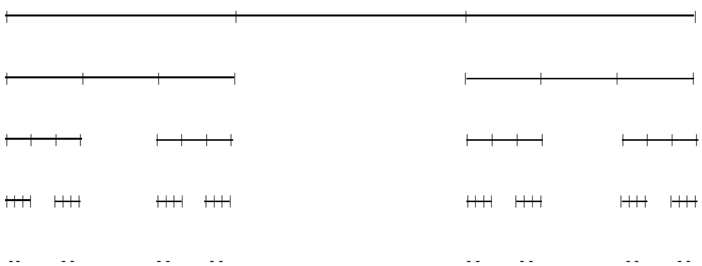
Tačiau ne visos skaičių begalinės aibės turi tokią savybę. Imkime visus skaičius tarp 0 ir 1. Jų jau negalime sunumeruoti natūraliaisiais skaičiais. Tokias aibes vadina *neskaičiomis*.

[1] (lot.) Potencialusis dalumas į dalis, kurios iš tikrųjų neegzistuoja
[2] (lot.) Taškas yra tai, kas neturi dalių, linija yra ilgis, neturįs platumo
[3] (lot.) taškų eilutė
[4] (lot.) taško tėkmė, taško pėdsakas

Sukonstruosime įdomų pavyzdį. Imkime vienetinio ilgio atkarpą (žr. brėž.) Padalykime ją į tris vienodo ilgio dalis ir išmeskime vidurinę dalį, tačiau palikime dalijimo taškus. Su likusiomis dviem atkarpomis elgiamės taip pat: dalijame kiekvieną į tris vienodo ilgo dalis, išmetame viduriniąsias dalis, palikdami dalijimo taškus. Liks keturios atkarpėlės. Tęsiame procesą be galo. Po kiekvienos operacijos likusių taškų aibė bus neskaiti. Tačiau atmestųjų atkarpų ilgių suma bus lygi

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = 1.$$

Galima būtų įrodyti, kad likusių nuo pirmykštės atkarpos taškų aibė, nors ji ir „neužims jokios vietos“, turės „tiek pat taškų“, kaip ir buvusi atkarpa.



Begalybės sąvoka yra prieštaringa. Neatsargus operavimas ja veda į prieštaravimus. Matematikoje skiriame dvi begalybės rūšis: *potencialiąją* ir *aktualiąją*. Potencialioji begalybė suprantama kaip kurio nors proceso riba. Tuo tarpu aktualioji begalybė yra suprantama kaip konkrečiai duota, užbaigta forma. Paprastai tai yra begalinės aibės elementų skaičius. Aktualiosios begalybės traktavimas tarpais sukeldavo matematikoje jos pagrindų krizes. Begalybės sąvoka įvairiais aspektais visą laiką yra matematikų diskutuojama. Filosofinis išprusimas bei kritiškas protas leido A. Baranauskui iš esmės teisingai suvokti skirtumą tarp abiejų begalybės rūšių.

Mąstydamas apie begalybę, jis imasi nagrinėti skaičių seką, jo vadinamą transcendentine progresija, kuri nusakoma taip. Imkime kurį nors teigiamą skaičių a ir sudarykime seką:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a^a, \\
a_2 &= a_1^{a_1} = a^{aa_1} = a^{a^{a \cdot a^a}} = a^{a^{1+a}}, \\
a_3 &= a_2^{a_2} = a^{a^{1+a+a^{1+a}}}, \\
a_4 &= a_3^{a_3} = a^{a^{1+a+a^{1+a}+a^{1+a+a^{1+a}}}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Kai skaičius a yra didesnis už 1, ta seka sparčiai didėja, kuo didesnis a, tuo sparčiau. Antai, jei $a = 2$, tai $a_1 = 2^2 = 4,\ a_2 = 4^4 = 256, a_3$ turėtų jau 617 skaitmenų. Jei $a = 3$, tai $a_1 = 3^3 = 27,\ a_2 = 27^{27}$ sudarytas iš trisdešimt devynių skaitmenų. Jei $a = 5$, tai jau antrasis progresijos narys būtų labai didelis – turėtų 10 921 skaitmenų.

Apie tą progresiją A. Baranauskas parašo darbą. Jame nagrinėjamos progresijos savybės, dėstomos jau mūsų cituotos iš laiškų mintys apie begalybę. Tačiau pagrindinė darbo dalis yra skirta filosofijos bei teologijos klausimams.

Šį darbą 1895 m. A. Baranauskas pasiuntė J. Boduenui de Kurtenė, teiraudamasis, ar Krokuvos akademija nesutiktų jo paskelbti. Akademija rankraštį grąžino. Tada jis darbą išspausdino savo lėšomis Varšuvoje 1897 m., pavadinęs „Apie transcendentinę progresiją bei žmogaus proto skalę ir jėgą“ [6].

18. MATEMATIKOS TERMINAI

A. Baranauskas turi nuopelnų ir lietuviškajai matematikos terminijai. Savo darbus jis paskelbė lenkų kalba. Laiškus matematikos klausimais J. Boduenui de Kurtenė ir A. Jakštui rašė taip pat lenkų kalba. Tačiau su Vėberiu susirašinėjo lietuviškai, keletą laiškų parašė ir lotynų kalba. Lietuviškuose laiškuose vartojo ir lietuviškus arba tarptautinius terminus. Juos reikėjo pačiam susidaryti, nes iki tol matematinių raštų lietuvių kalba beveik nebuvo. Žinoma, kad 1830 m. Jeronimas Stanevičius (1793–po 1854) 1830 m. buvo parašęs aritmetikos vadovėlį žemaitiškai. Kitą aritmetikos vadovėlį 1856 m. parengė Motiejus Pranas Martynaitis (ca 1790 – ca 1857–1859). Tačiau abu vadovėliai nebuvo atspausdinti, o jų rankraščių likimas nažinomas. Pirmasis lietuviškas aritmetikos uždavinynas, sudarytas Jono Spudulio (Gailučio slapyvardžiu) (1860–1920), išėjo 1885 m. Žinomas vienas ankstesnis lietuviškas rankraštinis aritmetikos uždavinynas (spėjama, jog jis sudarytas apie 1879 m.), kuriuo, galimas dalykas, rėmėsi J. Spudulis.

1892 m. A. Jakštas kreipėsi į A. Baranauską, ar šis nesutiktų sudaryti lietuviškus geometrijos terminus. Mat, Amerikos lietuviai ruošėsi leisti lietuviškų vadovėlių. A. Baranauskas pasiūlė jam susirašinėjant su H. Vėberiu vartotus terminus.

Iš A. Jakšto juos patyrė to meto matematikos vadovėlių autoriai. Kai kurie iš tų terminų prigijo ir vartojami iki šiol: dalyba, erdvė, smailus kampas, status kampas, daugiakampis, trikampis, lankas. Kiti lietuviški jo terminai buvo pakeisti. Išvardysime ir juos, nurodydami skliausteliuose dabar vartojamus: pirmykščias skaičius, pirmaskaitlys (pirminis skaičius), antrykščias skaičius (sudėtinis skaičius), veikslė (veiksmas), dalytojas (daliklis), trupskaitlys (trupmena), tvirtybė (laipsnis), žymelė (indeksas), lyginimas (lygtis), plotas (plokštuma, platumas), kėstas kampas (bukas kampas), skersas (statmenas), nesąmierus (nebendramatis), keturšonis (keturkampis), skersakampė (įstrižainė), ratas (skritulys), ratlankis (apskritimas), skersinys (skersmuo), gija (styga), stipinas (spindulys), ratlankio vidurys (apskritimo centras), įrašytas daugiakampis (įbrėžtinis daugiakampis), aprašytas daugiakampis (apibrėžtinis daugiakampis), skritulas (skriestuvas).

Matematikos terminus kūrė visi, kam teko dėstyti matematiką lietuvių kalba, rašyti lietuviškus vadovėlius. Kiekvienas autorius dažnai vartodavo vis kitus terminus. Gyvenimas vertė juos suvienodinti ir sunorminti. To, tarp kitų, Pirmojo pasaulinio karo metais ir tuoj po jo ėmėsi Zigmas Žemaitis ir Marcelinas Šikšnys, talkinami Jono Jablonskio. Greitai prireikė ir aukštosios matematikos terminų. Juos kūrė aukštųjų mokyklų dėstytojai. Pribrendo reikalas ir juos sunorminti. 1993 m. buvo išleistas didelis trikalbis matematikos terminų žodynas [30]. Jam parengti prireikė ilgo laiko ir nemažo kolektyvo pastangų.

19. BAIGIAMOSIOS PASTABOS

Apžvelgėme A. Baranausko matematinę veiklą, paminėdami tik svarbiausius dalykus. Iš didžiulių skaičiavimų ėmėme tik pačius įdomiausius. Kaip matematikui savamoksliui, tie rezultatai nėra tokie jau menki. Jie rodo neabejotiną matematinį talentą. Tačiau matematikos raidos kontekste jie yra gana kuklūs. Niekada sistemingai matematikos nesimokęs, neturėdamas literatūros, būdamas toli nuo mokslinių centrų ir jau gana solidaus mažiaus, jis ir negalėjo ko nors žymesnio pasiekti. Ir pats nelaikė savęs matematiku, o tik mėgėju.

1890 04 20 A. Jakštui rašė: „*Nesu užsisipyręs empirinio metodo matematikos darbuose šalininkas, laikausi jo tiktai iš reikalo, kaipo diletantas matematikoje. Žinau, kad mano pasiekti rezultatai yra lašelis jūroje ir kad, tiek laiko ir darbo įdėjus, galima buvo susipažinti su didesniu matematikos vandenyno plotu, jei turėčiau progos paklausyti paskaitų ar pasinaudoti eilinio vadovėlio nurodymais. Matematinės technikos nežinojimas užkerta man kelią į specialistų veikalus.*“

O H. Vėberiui dar 1889 m. rašė „*... Tiek tik ja teužsiimu, kiek nuo jos negaliu atsikratyti. Matematikos nei praplatinti, nei pagilinti nesitikiu. Man šis darbas nereikalingas. Visgi padėtos procios nesigailiu: reikalinga buvo mano protui ben kiek ištaisyti. Mano mislis neūmi, tiesos iš karto nepaveja; bet palengvėl ją suseka, kiek sylos išneša. Ištaisymas proto yra geras kitiems mano darbams...*“

Aplinka jo matematiniams polinkiams nebuvo palanki. P. Karevičius savo atsiminimuose rašo, jog Peterburge Tikybos departamento direktorius A. Baranauską įspėjęs: „Europoje daug yra gabių matematikų...“ Laiške A. Jakštui 1891 m. A. Baranauskas prašo niekam neprasitarti apie jų susirašinėjimą matematikos klausimais. Aplinkiniai į jo, aukšto dvasiškio, „pašalinius“ užsiėmimus žiūrėjo nepalankiai. Esą tai atitraukią jį nuo tiesioginių pareigų.

Jau minėtame laiške A. Jakštui rašė: „*Pagaliau ne matematikoje glūdi kunigo pašaukimo tikslai ir uždaviniai. Visame Dievo apreiškime nėra* *nė vienos matematinės formulės. Užsiimu, kad nedykinėčiau ir kad lavinčiau protą. Matematikos sritis yra laisva nuo politinių agitacijų insinuacijų. Taisyklės ir dėsniai skaičiuose mane žavi, juose matau amžinų nesulaužomų tiesų spindulėlius. Skaičių aibės yra laipsniai, pakeliantys protą prie begalybės supratimo.*

1893 02 26, atsakydamas į Jakšto laišką, rašė, jog pritariąs jo nuomonei, kad dvasinikams reikia susipažinti su pasaulietiškais mokslais. Toliau rašė *„Vienok manau, kad tiktai tie kunigai gali su visu įkarščiu atsidėti vien tik pasaulietiniams mokslams, kurie, be gabumų, dar gauna tam aiškią misiją, kokią aš turėjau, pagal nuostatus dėstydamas lietuvių kalbą seminarijoje. Dabar gi matematinių tyrinėjimų karštligėje neturiu to įsitikinimo, kad tai darau iš pareigos ir ne kartą apima nerimas, kad pataikauju tik savo polinkiui. Tą nerimą kelia ir pastabos, draugiškai man daromos iš įvairių pusių ir įvairiai motyvuotos, tai mano sveikatos požiūriu, tai reikalu naudingesnių ir arčiau su mano pašaukimu susijusių darbų“.*

Savo veiklos įkarštyje A. Baranauskas skirdavo net po 13 valandų per dieną matematikai, *„...kuri teip nevalyvi jog loskos neprašo, prisispyrusi speičia, ir gan – nors tu kur gyvas dėkis!“* (1889 m. laiškas H. Vėberiui). Įtempta protinė veikla pradėjusi atsiliepti sveikatai. Laiške A. Jakštui 1892 11 11 jis skundžiasi anksčiau galėjęs ir po 13 valandų dirbti, o dabar esą ir pusę valandos sunku. Artimesnieji draugai, tarp jų ir H. Vėberis, įkalbinėjo mesti matematiką. Tarpais A. Baranauskas imdavo mažiau ja domėtis. Tačiau ilgesniam laikui nuo jos atitrūkti buvo sunku. Vis grįždavo prie savo mėgiamo mokslo, kol pagaliau vis mažiau, ypač persikėlęs į Seinus, ja teužsiiminėjo.

Kuo mums įdomi A. Baranausko matematinė veikla? Pirmiausia tuo, kad leidžia geriau ir giliau pažinti ir įvertinti jo asmenybę, būdą plačius interesus.

Antra, uždarius XIX šimtmečio pirmojoje pusėje senąjį Vilniaus universitetą, Lietuvoje faktiškai beveik neliko mokslo įstaigų. Mokslu galėjo užsiiminėti tik privatūs asmenys. A. Baranauskas buvo praėjusio šimtmečio antrosios pusės pirmasis matematikas tyrinėtojas lietuvis. Po jo atsirado ir kitų. O iš tikrųjų matematika suklestėjo Lietuvoje tik per pastaruosius keturis dešimtmečius.

Autorius prie A. Baranausko kapo Seinų katedroje 1994 m.

LITERATŪRA

1. K. Alminauskis. Vyskupo Antano Baranausko laiškai Hugo Weberiui. *Archyvum philologicum*, 1939, **8**, 225–258; 12 neskelbtų A. Baranausko laiškų H. Vėberiui. – LKLI BR, f. 1–585.
2. A. Baltrūnas. Antanas Baranauskas – matematikas. *Mokslas ir technika*, 1983, Nr. 10, 30–32.
3. A. Baltrūnas. *Šimtas matematikos mįslių*. „Vaga", Vilnius, 1983.
4. A. Baranowski. *O wzorach słuzących do obliczenia liczby liczb pierwszych nie przekraczających danej granicy*. – Rozpravy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie, 1895, t. 28, s. 192–210. Trumpa santrauka: S. D. (S. Dickstein). *Prace matematyczno–fizyczne, 1897 (***8), 13–14.**
5. A. Baranowski. [Prace matematyczne, 1894]. Biblioteka PAN w Krakowie, Rps. 2820.
6. A. Baranowski. *O progresji transcendentalnej oraz o skali i syłach umysłu ludzkiego; Studium matematyczno-filozoficzne*. – Warszawa, 1897. – 45 s.
7. A. a. kunigo vyskupo Anatano Baranausko laiškai į profesorių Joną Bauduin'ą de Courtenay. *Lietuvių tauta*, 1909, **1**, d. 3, 408–433. Yra atskiras atspaudas.
8. Antano Baranausko laiškai A. Jakštui–Dambrauskui. VUMB, E 332, F. 69.
9. Antanas Baranauskas. *Raštai*, I, II. „Vaga", Vilnius, 1970.
10 M. Biržiška. *M. Barono gyvenimas ir raštai*. Kaunas–Marijampolė, 1924.
11. Vikt. Biržiška. Baranauskas matematikas. *Lietuviškoji enciklopedija*. Kaunas, t. 2, 1183–1187.
12. P. L. Chebyshev. Mémoire sur les nombres premiers. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1852, **17**, 366–390.
13. A. Dambrauskas. Vyskupas Antanas Baranauskas, kaipo matematikas. *Draugija*, 1907, Nr. 4, p. 332–342. Taip pat: A. Dambrauskas–Jakštas. Užgesę žiburiai. Lietuvių katalikų mokslo akademijos leidinys, 1 Nr, Kaunas, 1930, p. 156–166, ir fotografuotinis leidimas, Roma, 1975. Yra atskiras atspaudas.

14. A. Davydov. *Načal'naja algebra*. Pirmasis leidimas 1866, paskutinysis dvidešimt ketvirtasis, 1922.

15. L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers*, vol. 1. Carnegie Institution of Washington Publication Nr. 256. Fotografuotinis leidimas: Chelsea Publishing Company, New York, 1952.

16. C. F. Gauss. *Werke*, Bd 2, 444–447.

17. J. Hadamard. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et ses conséquences arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1896, **24**, 199–220.

18. C. Hossfeld. Bemerkung über eine zahlentheoretische Formel. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1890, **25**, 382–384.

19. S. Yla. Antanas Baranuskas. Tautos dainius, tarmių tyrinėtojas. *Vardai ir veidai mūsų kultūros istorijoje*. Chicago, 1973, 109–165

20. A. Jakštas. *Trys garsiausieji matematikos klausimai*. Švietimo ministerijos knygų leidimo komisijos leidinys, Kaunas, 1924.

21. A. Jakštas–Dambrauskas. Atsiminimai apie vysk. A. Baranauską. *Naujoji Romuva*, 1938, Nr. 9, 199–201. 1924.

21. P. Karevičius. Atsiminimai. Rankraštis. Vilniaus uninersiteto biblioteka. Rankraščių skyrius, F 187–27, 1, 41.

23. F. Kympan. *Istorija čisla* π. Moskva, 1971.

24. J. Kubilius. Matematikos mokslo laimėjimai Tarybų Sąjungoje ir jos raida Tarybų Lietuvoje. *40 metų*, Valstybinė politinės ir mokslinės literatūros leidykla, Vilnius, 1958, 240–258.

25. J. Kubilius. Antanas Baranauskas ir matematika. Kn.: „*Literatūra ir kalba*. Antanas Baranauskas". **20**, Vilnius, „Vaga", 1986, p. 82–98.

26. J. Kubilius. Poetas ir matematikas. *Tiesa*, 1985 01 17, 174 (12733), 2 p.

27. J. Kubilius. Antanas Baranauskas ir matematika. *Mokslas ir gyvenimas , 1985, nr. 7, 26–27.*

28. J. Kubilius. Rymano dzeta funkcijos paslaptys. *Alfa plius omega*, 1996, nr. 1, 47–54.

29. J. Kubilius. Pirminiai skaičiai ir kriptografija. *Alfa plius omega*, 1996, nr. 1, 65–70.

30. J. Kubilius (red.). *Matematikos terminų žodynas*. Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius, 1994.

31. A. Legendre. *Essai sur la théorie des nombres*. Duprat, Paris, 1892.

32. D. N. Lehmer. *List of prime numbers from 1 to 10 006 721*. New York, 1956.

33. F. Lindemann. Ueber die Zahl π. *Mathematische Annalen*, 1882, **20**, 213–225.
34. A. Malynin, K. Burenin. *Učebnik algebry i sbornik algebraičeskich zadač*. Pirmasis leidimas, 1870, paskutinysis, septintasis, 1884.
35. E. Manstavičius. A. Baranauskas ir matematika. *Literatūra ir menas*, 1985 01 19, 3 (1990), 5.
36. E. Meissel. Ueber die Bestimmung der Primzahlen innerhalb gegebener Grenzen. *Mathematische Annalen*, 1870, **2**, 636–642.
37. E. Meissel. Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten hundert Millionen natürlichen Zahlen vorkommen. *Mathematische Annalen*, 1871, **3**, 523–525. Pataisos: ibid, 1883, **21**, S. 304.
38. E. Meissel. Berechnungder Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Milliarde natürlichen Zahlen vorkommen. *Mathematische Annalen*, 1885, **25**, 251–257.
39. R. Mikšytė. *Antano Baranausko kūryba*. „Vaga“, Vilnius, 1964.
40. R. Mikšytė. *Antanas Baranauskas*. „Vaga“, Vilnius, 1993.
41. B. Riemann. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse. *Monatsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1859, 1860, 671–680.
42. F. Rudio. *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung*. Leipzig, 1892.
43. F. Symonas. Keletas faktų iš vysk. A. Baranausko gyvenimo užrubežyje. *Draugija*, 1912, Nr. 61, 3–6.
44. V. Stakėnas, G. Stepanauskas. Analizinės skaičių teorijos apžvalga. *Alfa plius omega*, 1996, nr. 1, 19–45.
45. *Šventasis raštas. Senasis ir Naujasis Testamentas*. Lietuvos katalikų vyskupų konferencija, 1998.
46. J. Tumas. *Lietuvių literatūros paskaitos. Draudžiamasis laikas. Antanas Baranauskas, 1835–1902*. „Vaiva“, Kaunas, 1924.
47. C.–J. de la Vallée Poussin. Recherches analytiques sur la théorie des nombres (premiére partie). La fomction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en générale. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1896, **20**, 183–256.
48. G. Wertheim. *Elemente der Zahlentheorie*. Leipzig, 1887.
49. Ch. Wolphius. *Elementa matheseos universae*, t. 1. Halae Magdeburgicae, 1742.