

Mokinių matematikos olimpiados  
rajono etapo užduotys 11 - 12 klasei  
2010 m.

1. Kvadratinė lenta  $3 \times 3$  padalinta į 9 vienetinius langelius. Į kiekvieną langelį nutūpė po vabalą. Po kurio laiko kiekvienas vabalas nuropojo į jam gretimą langelį (t.y. į langelį, turintį bendrą kraštinę su pradiniu vabalo langeliu). Įrodykite, kad bent vienas lentos langelis liko tuščias.

(5 taškai)

2. Petriukas pasirinko tris skirtingus nenulinius skaitmenis. Tada visus devynis dviženklis skaičius, kuriuos galima užrašyti naudojantis vien tais trimis skaitmenimis, jis sudėjo, o sumą padalijo iš 3. Tokiu būdu jis gavo triženklį skaičių, kurio dešimtainėje išraiškoje atpažino visus tris pradinius skaitmenis. Kokį skaičių gavo Petriukas?

(5 taškai)

3. Raskite visus natūraliuosius skaičius  $n$ , kuriems lygtis  $2x + 3y = n$  turi daugiau sveikųjų neneigiamų sprendinių  $(x, y)$  nei lygtis  $2x + 3y = n + 1$ .

(5 taškai)

4. Šešiakampio  $ABCDEF$  visi vidiniai kampai lygūs; be to,  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ ,  $CD = FA$ . Įrodykite, kad šešiakampio įstrižainės  $AD$ ,  $BE$  ir  $CF$  kertasi viename taške.

(5 taškai)

5. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x + 2 = y + z; \\ 2y^2 - 2y + 2 = z + x; \\ 2z^2 - 2z + 2 = x + y. \end{cases}$$

(5 taškai)