

VILNIAUS MIESTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2008

UŽDAVINIAI

XI klasė

1. Skaičiai x , y ir z susieti lygybėmis $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$. Įrodykite, kad $x = y = z$ arba $(xyz)^2 = 1$.
2. Piramidės, kurios pagrindas taisyklingasis n -kampis, pagrindo viršūnės pažymėtos realiaisiais skaičiais x_1, x_2, \dots, x_n , o piramidės viršūnė – skaičiumi x . Kiekvienos šoninės sienos viršūnių skaičių suma lygi 2007, o visų pagrindo viršūnių skaičių suma yra 2008. Su kokia mažiausia nelygine n reikšme skaičiai x, x_1, x_2, \dots, x_n gali būti teigiami sveikieji? Raskite visus tokių skaičių rinkinius.
3. Trikampio viduje pažymėtas taškas, o per jį išvestos trys tiesės, lygiagrečios trikampio kraštinėms. Šių tiesių dalys, esančios trikampio viduje, yra to paties ilgio x atkarpos. Raskite x , jei trikampio kraštinių ilgiai yra a, b ir c .
4. Duota kvadratinė lentelė, sudaryta iš 6×6 vienetinių langelių. Kai kurie langeliai nudažyti taip, kad vienu metu išbraukus bet kurias tris eilutes ir bet kuriuos tris stulpelius, gautoje 3×3 lentelėje lieka bent vienas nudažytas langelis. Kiek mažiausiai langelių reikia nudažyti?