RIETAVO AŠTUNTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2009 m. gruodžio 11 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė – 2val.

1. Kvadratinės lygties $x^2 + px + q = 0$ koeficientai p ir q yra sveikieji skaičiai. Ar gali šios lygties diskriminantas būti lygus 23 ?

2. Keliai nuliais baigiasi skaičius $1000!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$) ?

3. Skaičių rinkinyje $\{3, 4, 12\}$ pakeitę bet kuriuos du jo skaičius a ir b skaičiais $0{,}6a - 0{,}8b$ ir $0{,}8a + 0{,}6b$ gausime kitą rinkinį. Gautajam rinkiniui vėl pritaikykime šį veiksmą, ir taip tęskime toliau. Ar tokiu būdu galima gauti skaičių rinkinį $\{4, 6, 12\}$?

4. Raskite penkiaženklį skaičių $\overline{xyztu}$, kuris yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, jeigu $\overline{xy} = u^2$ ir $\overline{yu}$ taip pat yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

5. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} (x+y)^3 = z, \\ (y+z)^3 = x, \\ (z+x)^3 = y. \end{cases}$

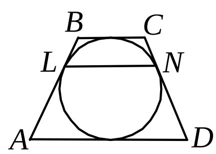
6. Įrodykite, kad su bet kuriuo natūraliuoju n skaičius $2^{4n} + 2^{2n} + 1$ yra sudėtinis.

7. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais a, b ir c galioja nelygybė

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca .$$

8. Apskaičiuokite sumą

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+2009} .$$



9. Apie spindulio R apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija (žr. pav.). Šoninių trapecijos kraštinių lietimosi su apskritimu taškai sujungti lygiagrečia su pagrindais styga, kurios ilgis 6. Raskite trapecijos plotą.

10. Šachmatų turnyre, kuriame kiekvienas šachmatininkas su kiekvienu kitu šachmatininku susitinka po vieną kartą, dalyvavo $n \geq 17$ žaidėjų. Už pergalę skiriamas 1 taškas, už lygiąsias – 0,5 taško, pralaimėjus taškai neskiriami. Vienuolika turnyro dalyvių surinko ne daugiau kaip po 5 taškus. Kiek dalyvių surinko 8,5 taško ?