



**Rietavo šeštoji komandinė matematikos olimpiada  
mokytojo Kazio Šikšniaus taurei laimėti**

Rietavas, 2007 m. gruodžio 8 d.

**Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams**

1. Natūraliųjų skaičių porą  $(m;n)$  vadinkime *žemaitiška pora*, jeigu skaičių  $m$  ir  $n$  didžiausias bendras daliklis yra 7, o suma  $m+n$  lygi 119. Kurios žemaitiškos poros skaičių sandauga didžiausia?
  2. Realieji skaičiai  $x, y$  ir  $z$  tenkina lygybes  $\frac{y}{x} = \frac{x-z}{y} = \frac{z}{x+y}$ . Raskite skaičių  $y$  ir  $z$  santykį  $\frac{y}{z}$ .
  3. Ar galima skaičius nuo 1 iki 100 surašyti į kvadratinę  $10 \times 10$  lentelę taip, kad gretimuose stulpeliuose parašytų skaičių sumos skirtųsi vienetu? Atsakymą pagrįskite.
  4. Natūralieji skaičiai  $x, y$  ir  $z$  tenkina lygtį  $28x + 30y + 31z = 365$ . Raskite sumą  $x + y + z$ .
  5. Įrodykite, kad skaičius  $A = \underbrace{111\dots1}_{2n} - \underbrace{222\dots2}_n$  su kiekvienu  $n \in \mathbb{N}$  yra kurio nors natūraliojo skaičiaus kvadratas.
  6. Trikampių  $ABC$  ir  $A_1BC_1$  perimetrai yra atitinkamai lygūs  $a$  ir  $b$ . Atkarpa  $A_1C_1$  yra lygiagreti su trikampio pagrindu  $AC$ , o į trapeciją  $AA_1C_1C$  galima įbrėžti apskritimą. Raskite kraštinės  $AC$  ilgį.
- 
7. Įrodykite, kad per parabolių  $y = x^2 + x - 13$  ir  $x = y^2 + y - 12$  susikirtimo taškus galima nubrėžti apskritimą. Raskite šio apskritimo spindulio ilgį ir centro koordinatas.
  8. Išspręskite lygtį  $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$ .
  9. Trupmeną  $\frac{a}{b}$  galima pakeisti bet kuria iš trupmenų  $\frac{a+b}{b}$ ,  $\frac{a-b}{b}$  ir  $\frac{b}{a}$ . Ar iš trupmenos  $\frac{1}{2}$  šiais keitiniais galima gauti trupmeną  $\frac{67}{91}$ ? Atsakymą pagrįskite.
  10. Jonas Rietaviškis savo bibliotekos lentynas nutarė pakeisti naujomis. Parduotuvėje yra dviejų rūšių lentynos – ažuolo ir uosio. Jeigu jis pirktų 6 ažuolo ir 11 uosio lentynų, tai į jas tilptų ne daugiau kaip 30 procentų bibliotekos knygų, o į 21 ažuolo ir 16 uosio lentynų jis sutalpintų daugiau kaip 60 procentų knygų. Ar į 29 ažuolo lentynas telpa trečdalis J. Rietaviškio bibliotekos knygų?