



# RIETAVO VIENUOLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2012 m. gruodžio 7 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams

1. Skaičiai nuo 1 iki 37 surašyti vienoje eilutėje tokia tvarka, kad kiekvienas skaičius dalija prieš jį esančių skaičių sumą. Koks trečiasis skaičius, jeigu pirmasis skaičius yra 37, o antrasis yra 1?

*Pastaba.* Jeigu  $a = b \cdot q$ , tai sakoma, kad *skaičius a dalijasi iš b* arba *skaičius b dalija skaičių a*.

2. Ar egzistuoja tokie du kvadratiniai trinariniai

$$ax^2 + bx + c$$

ir

$$(a + 1)x^2 + (b + 1)x + c + 1$$

su sveikaisiais koeficientais, kurių šaknys yra sveikieji skaičiai?

*Pastaba.* Kvadratinio trinario  $ax^2 + bx + c$  šaknimi vadiname lygties  $ax^2 + bx + c = 0$  sprendinį.

3. Raskite sumą

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + (n - 1)(n - 1)! + n \cdot n!;$$

čia  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ .

4. Tarkime, kad  $x = (1 + \frac{1}{n})^n$ , o  $y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ . Įrodykite, kad  $x^y = y^x$ .
5. Šachmatų lentos kiekviename langelyje yra įrašytas sveikasis skaičius. Duota, kad kiekvienos eilutės skaičių suma ir kiekvieno stulpelio skaičių suma yra lyginiai skaičiai. Įrodykite, kad visų juoduose langeliuose įrašytų skaičių suma yra lyginė.
6. Duotas daugianaris  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$  su sveikaisiais koeficientais  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ . Be to, yra keturi skirtingi sveikieji skaičiai  $a, b, c$  ir  $d$  tokie, kad

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5.$$

Įrodykite, kad jokiame sveikajame skaičiuje  $k$  negalioja lygybė  $f(k) = 8$ .

7. Raskite visus realiuosius lygties

$$(x + 2006)(x + 2008)(x + 2010)(x + 2012) + 16 = 0$$

sprendinius.

8.  $ABCD$  yra keturkampis, kurio priešingos kraštinės  $AD$  ir  $BC$  yra lygios. Yra žinoma, kad kampas  $D$  yra didesnis už kampą  $C$ . Įrodykite, kad  $|AC| > |BD|$ .
9. Lygiakraščio trikampio kraštinėse  $AB$  ir  $BC$  parinkti taškai atitinkamai  $D$  ir  $K$ . Kraštinėje  $AC$  taškai  $E$  ir  $M$  yra tokie, kad galioja lygybė  $DA + AE = KC + CM = AB$ . Įrodykite, kad kampas tarp tiesių  $DM$  ir  $KE$  yra lygus  $60^\circ$ .
10. Jono Rietaviškio anūkas turėjo 18 popieriaus skiaučių. Paėmęs vieną skiautę jis ją sukarpė į 18 mažesnių ir visas (karpytas ir nekarpytas) sumaišė. Po to vėl ištraukė skiautę, kurią sukarpęs į 18 dalių, vėl visas sumaišė. Ir taip jis žaidė toliau vis paimdamas skiautę, sukarpydamas ją į 18 dalių ir visas sumaišydamas. Kai šis žaidimas anūkui nusibodo, jis suskaičiavo, kad popieriaus skiaučių yra 2012. Ar jis nesuklydo skaičiuodamas popieriaus skiautes?