



RIETAVO DEŠIMTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2011 m. gruodžio 2 d.

Užduotis jaunesniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė - 2val.

1. Lentoje užrašyti šeši realieji skaičiai $a, b, c, a^2 - b, b^2 - c$ ir $c^2 - a$. Kiek daugiausiai tarp jų gali būti neigiamų skaičių?
2. Koks mažiausias teigiamas skaičius, kurio ir 35%, ir 56% yra natūralieji skaičiai?
3. Trikampio kraštinių ilgių a, b ir c tenkina lygybę $a^3 + b^3 = c^3$. Ar šis trikampis gali būti statusis?
4. Raskite visas realiųjų skaičių poras (x, y) , tenkinančias lygybę

$$(x - y^2)(y - x^2) + x^3 + y^3 = 2.$$

5. Ar galima rasti penkis natūraliuosius skaičius n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 , kad jų porų sumos $(n_1 + n_2, n_1 + n_3, \dots, n_4 + n_5)$ sudarytų dešimt iš eilės einančių natūraliųjų skaičių?
6. Įrodykite, kad tarp 12 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas, kuris yra mažesnis už savo *tikrinių daliklių* sumą. (Skaičiaus n *tikriniu dalikliu* vadiname natūralųjį skaičių $d, 1 < d < n$, iš kurio dalijasi n .)
7. Trikampyje ABC išvesta vidurinė linija KL , lygiagreti su kraštine AC (K – kraštinės AB taškas). Per viršūnę A ir vidurinės linijos KL vidurio tašką E nubrėžta tiesė, kuri kraštinę BC kerta taške F . Raskite trikampių AFC ir AFB plotų santykį.
8. Su kokia realiųjų skaičių x ir y pora (x, y) reiškinio

$$x^2 + 13y^2 - 6xy - 4y - 2$$

reikšmė mažiausia? Raskite šią reikšmę.

9. Kokią lygybę tenkina skaičiai a, b ir c , jeigu $x + \frac{1}{x} = a, y + \frac{1}{y} = b, xy + \frac{1}{xy} = c$?
10. Jonas Rietaviškis nusprendė aplankyti draugą Petrą Plungiškį. Prisikepė bandelių ir išvažiavo nepusryčiaęs. Ties Stalgėnais Jonas labai išalko ir nusprendė suvalgyti tris pačias didžiausias bandeles. Dėl to lauktuvių masė sumažėjo 35%. Privažiavęs Milašaičius nusprendė dar šiek tiek pasistiprinti ir suvalgė tris pačias mažiausias bandeles. Dabar jo lauktuvių masė sumažėjo $\frac{5}{13}$ lyginant su prieš tai buvusiu. Kiek bandelių Jonas išsivežė iš namų?