



RIETAVO DVYLIKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA MOKYTOJO KAZIO ŠIKŠNIAUS TAUREI LAIMĖTI

Rietavas, 2013 m. gruodžio 6 d.

Užduotis vyresniųjų klasių mokiniams
Uždavinių sprendimo trukmė - 2 val.

1. Įrodykite, kad $\sqrt{76 - 42\sqrt{3}} + \sqrt{31 + 12\sqrt{3}}$ yra sveikasis skaičius.
2. Jonas Rietaviškis kasmet švenčia Jonines. Atšventęs šiemetines Jonines, Jonas pastebėjo, kad ši diena buvo pirmadienis, kaip ir prieš 28-erius metus, kai jis pirmą kartą minėjo savo vardo dieną. Jonas Rietaviškis neturi kalendoriaus, tačiau žino, kad metuose yra 365 dienos, o kas ketverius metus išpuolantys keliamieji metai yra viena diena ilgesni. Kiek kartų per šį laikotarpį jis šventė Jonines pirmadienį?
3. Skritulio formos pica dviem statmenais pjūviais buvo supjaustyta į keturias dalis. Paulius paėmė didžiausiąją ir mažiausiąją iš jų, o Ugnei atiteko dvi likusios dalys. Ar galėjo Ugnei atitekti daugiau picos negu Pauliui?
4. Raskite rombo ir į jį įbrėžto skritulio plotų santykį, jei viena rombo įstrižainė yra dvigubai ilgesnė už kitą.
5. Taškas M yra trikampio ABC kraštinėje AB , o taškas N – kraštinėje BC . Be to, $|AM| = 2|MB|$, $|BN| = 2|NC|$ ir $\angle ACB = 2\angle MNB$. Įrodykite, kad trikampis ABC yra lygiašonis.
6. Racionalieji skaičiai $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{19}$ sudaro tokią aritmetinę progresiją, kad

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 448.$$

- (a) Raskite sumą $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{19}$.
 - (b) Ar gali vienuoliktasis šios progresijos narys a_{11} būti lygus $\frac{2013}{20}$?
 - (c) Ar gali septintasis šios progresijos narys a_7 būti lygus $\frac{2013}{19}$?
7. Įrodykite, kad tarp 10 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių yra bent vienas tarpusavyje pirminis su likusiųjų sandauga.
Du natūralieji skaičiai vadinami *tarpusavyje pirminiais*, jei jų didžiausias bendras daliklis lygus vienam.
 8. Raskite visus natūraliuosius skaičius n , su kuriais $n^4 + n^2 + 1$ yra pirminis.
 9. (a) Raskite bent vieną lygties $x^{2013} + y^{2013} = z^{2014}$ sveikąjį sprendinį (x, y, z) .
(b) Įrodykite, kad ši lygtis turi be galo daug sveikųjų sprendinių.
 10. Raskite sumą

$$\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \frac{5}{3! + 4! + 5!} + \dots + \frac{2013}{2011! + 2012! + 2013!}.$$