PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS TREČIOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

U Ž D A V I N I A I

Pasvalys, 2001 m. lapkričio mėn. 23 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_{2001} = 2001, \\ x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{2001}^3 = x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{2001}^4. \end{cases}$$

2. Duota $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1} + 1}$, $n > 1$. Raskite $a_1 + \ldots + a_{2001}$.

3. Automobilio priekinės padangos visiškai nusidėvi, nuvažiavus n_1 km, o užpakalinės – nuvažiavus n_2 km, $n_2 < n_1$. Norint, kad visos padangos nusidėvėtų vienu metu, jos tam tikru momentu keičiamos vietomis. Kiek tada pailginama automobilio rida (naudojant vieną keturių padangų komplektą)?

4. Įrodykite, kad iš plytos negalima išpjauti mažesnės plytos, kurios tūris ir pilnasis paviršius būtų atitinkamai lygūs pusei duotosios plytos tūrio ir pilnojo paviršiaus.

5. Mieste yra *n* pastatų, kurių amžių suma lygi *T*. Kada miestas bus jaunesnis: ar nugriovus seną pastatą, ar pastačius naują?

6. Nelyginiai natūralieji skaičiai jungiami į grupes. Pirmoje grupėje vienas skaičius (1), antroje du (3+5), trečioje trys (7+9+11) ir t.t. Įrodykite, kad *n*-osios grupės skaičių suma lygi n^3.

7. Įrodykite, kad įbrėžtas į apskritimą keturkampis yra lygiašonė trapecija, kai jo įstrižainės yra lygios.

8. Tegu *x* ir *y* – stačiojo trikampio statinių, o *z* – įstrižainės ilgiai. Kas daugiau: a) $x^3 + y^3$ ar z^3? b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ar $\frac{1}{z}$?

9. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais *n* galioja nelygybė

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n^2} \geq 1.$$

10. Išspręskite lygtį

$$|x^2 - 5x + 6| + |x^2 - 2x| = 0.$$