



**PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS
PIRMOJI KOMANDINĖ OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI**

UŽDAVINIAI
(Vyresniųjų klasių grupė)

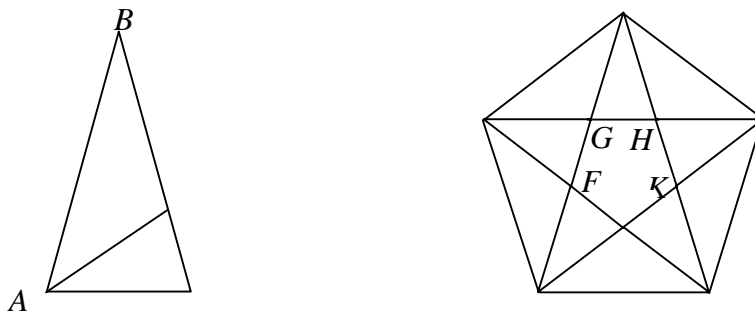
Pasvalys, 1999 m. lapkričio mėn. 26 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.

1. Įrodykite, kad $\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$.
2. Kokius skaitmenis reikia įrašyti vietoj A, B, C, D, E, F , kad keturženkliai skaičiai $BCDE$ ir $AFCB$ tenkintų sąlygą $A = \frac{BCDE}{AFCB}$, $A > 2$?
3. Namų, esančių tarp dviejų gretimų sankryžų, vienos gatvės pusės numerių suma lygi 33. Raskite tuos numerius.
4. Nustatykite, su kokiomis realiosiomis a reikšmėmis lygtys
$$x^3 + ax + 1 = 0 \text{ ir } x^4 + ax^2 + 1 = 0$$
 turi bendrų realiųjų šaknų.
5. Įrodykite, kad su bet kuriais realiaisiais skaičiais
$$\max(x; y) = \frac{1}{2}(|x - y| + x + y);$$
čia $\max(x; y)$ yra didžiausias iš skaičių x ir y .
6. Įrodykite, kad funkcija $y = f(x)$, tenkinanti sąlygą
$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$
yra periodinė.

7. Įrodykite, kad

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

8. Lygiašonis trikampis ABC yra vadinamas **tauriuoju**, jei pusiauokampinė AD kerta šoninę kraštinę BC aukso pjūviu, t.y. $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|BD|}$ (žr. 1 pav.). Įrodykite, kad visi taurieji trikampiai yra panašūs ir raskite jų kampus.



9. Tegul taisyklingojo penkiakampio $ABCDE$ įstrižainių susikirtimo taškai yra F , G , H , K ir L (žr. 2 pav.). Įrodykite, kad trikampiai ACE , EAK ir LAF yra taurieji. Kiek iš viso tauriųjų trikampių yra 2 paveiksle?

10. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_2}}, \\ x_2 = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}}, \\ \dots \\ x_n = \frac{2}{\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_1}}. \end{cases}$$