



**PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ
ŠEŠTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI**

**U Ž D A V I N I A I
(Vyresniųjų klasių grupė)**

**Pasvalys, 2004 m. lapkričio mėn. 26 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

1. Raskite daugianarį su sveikaisiais koeficientais ir vienetiniu vyriausiuoju koeficientu, kurio šaknis yra skaičius $a = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$.
2. Įrodykite, kad nėra tokių sveikųjų skaičių x ir y , kurie tenkina lygtį
$$15x^2 - 7y^2 = 9.$$
3. Kubas su nuspalvintomis sienomis supjaustomas į 1000 lygių kubelių, kurie supilami į urną. Iš urnos atsitiktinai ištraukiamas vienas kubelis. Raskite tikimybę, kad ištrauktasis kubelis turi dvi nuspalvintas sienes.
4. Laikrodžių meistras netyčia neapsižiūrėjęs sukeitė vietomis laikrodžio rodykles. Kiek kartų tarp pirmadienio 15 val. ir antradienio 15 val. laikrodis rodys tikslų laiką?
5. Raskite visus neneigiamų skaičių $x_1, x_2, \dots, x_{2004}$ rinkinius, tenkinančius lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{2004} = a, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2004}^2 = a^2, \\ \dots \dots \dots \\ x_1^{2004} + x_2^{2004} + \dots + x_{2004}^{2004} = a^{2004}. \end{cases}$$

6. Tarkime, kad trikampio kraštinių ilgių tenkina lygybę

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Raskite kampą prieš kraštinę b .

7. Skirtingi natūralieji skaičiai $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sudaro aritmetinę progresiją.
8. Keturis skaičius A, B, C, D sudėjus po 2 visais įmanomais būdais, gautos sumos: 2003, 2004, 2005, 2007, 2008, 2009. Raskite skaičius A, B, C, D .
9. Skaičiai a, b, c yra teigiami. $a + b + c = 1$. Įrodykite, kad teisingos nelygybės:

$$\frac{9}{4} \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} < \frac{5}{2}.$$

10. Duotas Kvadratas $ABCD$. Taškas M yra kraštinės AD vidurio taškas. Kraštinėse AB ir CD atidėti taškai K ir L , taip kad $KM = 3$, $LM = 4$, $KL = 5$. Raskite kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgį.