



**PASVALIO KRAŠTO MOKSLEIVIŲ
PENKTOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI
UŽDAVINIAI
(Vyresniųjų klasių grupė)**

**Pasvalys, 2003 m. lapkričio mėn. 21 d.
Uždavinių sprendimo trukmė – 2 val.**

1. Lygiagretainio $ABCD$ taškas E yra kraštinės BC vidurio taškas, o F – kraštinės CD vidurio taškas. Įrodykite, kad tiesės AE ir AF dalija įstrižainę BD į tris lygias dalis.
2. Žinoma, kad daugianarį $p(x)$ dalijant iš $x+1$ gaunama liekana 1, o dalijant iš $x-1$ liekana yra 3. Kokia liekana bus dalijant $p(x)$ iš x^2-1 ?
3. Įrodykite, kad skaičius 2^k+1 nesidalija iš 7 su visais natūraliaisiais skaičiais k .
4. Duota $m \times n$ lentelė su skaičiais, tenkinančiais sąlygą: kiekvienas skaičius lentelėje yra lygus kaimyninių skaičių aritmetiniam vidurkiui (keturių, jei skaičius yra lentelės viduje, trijų, jei jis yra lentelės pakraštyje, dviejų, jei skaičius yra lentelės kampe). Įrodykite, kad visi lentelėje esantys skaičiai yra lygūs.
5. Įrodykite, kad tarp visų vienodo perimetro P trikampių maksimalų plotą turi lygiakraštis trikampis.
6. Šeima susideda iš trijų asmenų: tėvo, motinos ir sūnaus. Šiuo metu jų amžių suma lygi 65 metams. Prieš 9 metus ši suma buvo lygi 40 metų. Prieš 4 metus tėvas buvo 9 kartus vyresnis už sūnų. Kiek metų turi tėvas, motina ir sūnus?
7. Raskite sumą $S = f\left(\frac{1}{2003}\right) + f\left(\frac{2}{2003}\right) + \dots + f\left(\frac{2002}{2003}\right)$, jei $f(x) = \frac{9^x}{3+9^x}$.
8. Žymėkime $a * b = a^b$. Raskite $\frac{2 * (2 * (2 * 2))}{((2 * 2) * 2) * 2}$.
9. Sakykime, kad n -tieji kalendoriniai metai yra laimingi, jeigu skaičius $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ dalijasi be liekanos iš 5. Ar yra laimingi 2003 ir 2004 metai?
10. Ar egzistuoja trikampis, kurio aukštinės lygios 1, 2 ir 3?