



PASVALIO KRAŠTO
14-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalys, 2012 m. lapkričio 23 d.

UŽDAVINIAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Raskite natūraliųjų skaičių x , y ir z trejetus $(x; y; z)$, kurie tenkina lygybę $x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$.
2. Tegū $x^2 + y^2$ dalijasi iš 3; čia x ir y yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad tada x ir y dalijasi iš 3.
3. Įrodykite, kad lygybė

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

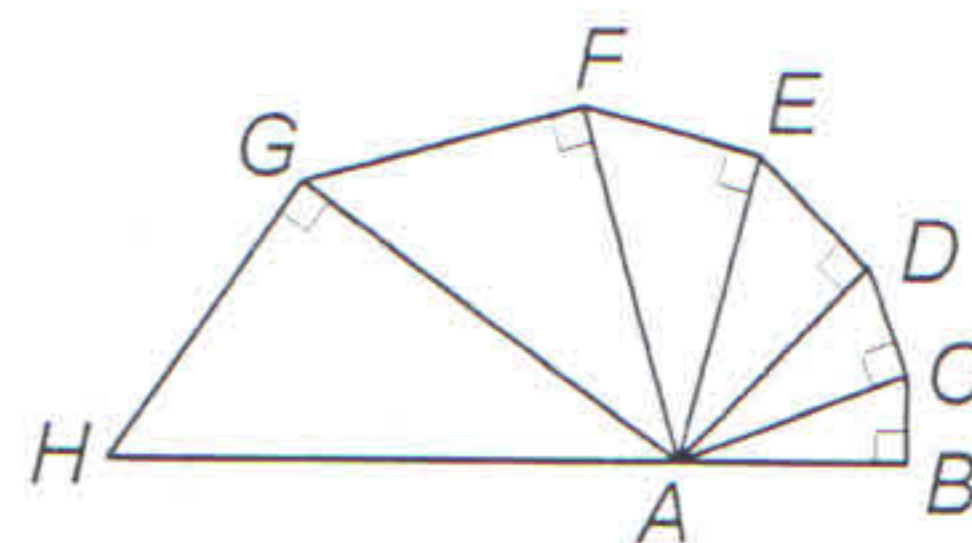
yra teisinga su visais $n \geq 2$.

4. Realieji skaičiai x ir y , $x \neq y$, tenkina lygybes $x^2 = 8x + y$ ir $y^2 = x + 8y$. Raskite $x^2 + y^2$.
5. Inde yra 320 g balto cukraus. Mišinys A gaunamas iš indo išbėrus x g balto ir po to įbėrus x g rudo cukraus ir gerai sumaišius. Balto ir rudo cukraus santykis mišinyje A yra $a:b$ (trupmena $a:b$ nesuprastinama). Mišinys B gaunamas iš indo išbėrus x g mišinio A ir po to įbėrus x g rudo cukraus. Balto ir rudo cukraus santykis mišinyje B yra 49:15. Raskite $x + a + b$.
6. Raskite natūraliųjų skaičių p ir q porų (p, q) , tenkinančių sąlygas

$$\frac{p + q^{-1}}{p^{-1} + q} = 17, \quad p + q \leq 100,$$

skaičių.

7. „Sraigės kiautas“ sudarytas iš 6 trikampių (žr. pav.), kurių kampai 30° , 60° ir 90° ; $AB = 1$ cm. Raskite AH .



8. Raskite $a - \frac{1}{a}$, kai $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 3$, $a > 0$.
9. Kam lygi skaičiaus $\frac{10^{27} + 2}{3}$ skaitmenų suma?

10. Ūkininkas mirdamas liepė savo keturiems sūnums pasidalinti arklius: vyriausiam – trečdalį, antrajam – ketvirtadalį, o jaunėliams dvyniams – po penktadalį arklių. Bet sūnums nesisekė pasidalinti arklius, nes skaičiuodami gaudavo trupmeninius skaičius. Kai viena kumelė atsivedė kumeliuką, ūkininko sūnūs arklius pasidalino, nors kumeliukas niekam neatiteko. Kiek arklių turėjo ūkininkas?